BAC PRO 3 ans
TERMINALE PROFESSIONNELLE

Mathématiques

Groupements A et B

C. Baudet, L. Breitbach, P. Dutarte, D. Laurent
Sous la direction de G. Barussaud

CORRIGÉ

les NOUVEAUX cahiers

FOUCHER

Sommaire

ISBN 978-2-216-11612-6

11. Calcul intégral (programme complémentaire)

Évaluations vers le Bac pro

Avertissement

Pour des raisons techniques, les figures de ce livre du professeur ne reprennent pas à l'identique celles du livre élève. Elles fournissent cependant les éléments de réponse aux problèmes posés.

Pictogrammes des différents thématiques du programme

 Vie économique et professionnelle

 Prévention, santé et sécurité

 Évolution des sciences et techniques

 Développement durable

 Vie sociale et loisirs

1 Nuage de points et point moyen

Capacités
- Représenter un nuage de points
- Déterminer le point moyen

(Livre élève pages 5 et 6)

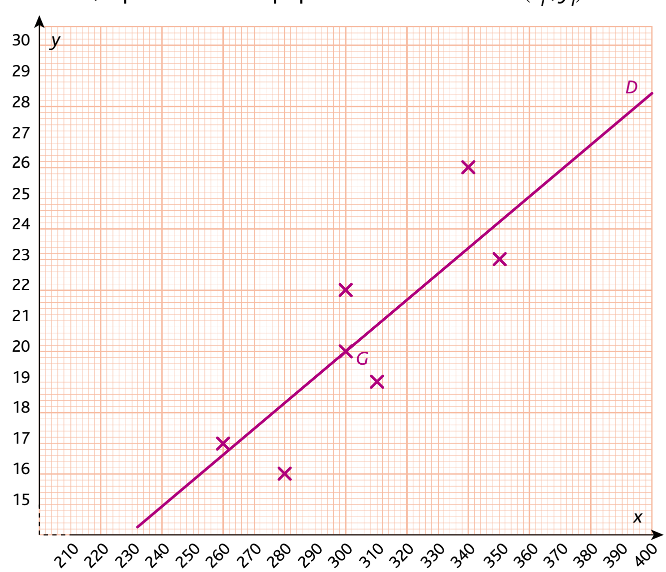
1 Représenter une série par un nuage de points

Évolution de la production et publicité

Le tableau suivant donne, pour sept années consécutives, l'évolution de la production d'un certain type de pièces et des frais de publicité correspondants, dans une entreprise du secteur industriel.

Production (en milliers) : x_i	260	280	260	310	300	350	340
Frais de publicité (en milliers d'euros) : y_i	17	16	17	19	22	23	26

1. Sur le graphique ci-dessous, représenter les sept points de coordonnées $(x_i\,;y_i)$.



Les points obtenus forment le **nuage de points**.

2. Décrire ce nuage de points, en cochant une des propositions suivantes :

- ❒ les points du nuage sont éparpillés dans toutes les directions du graphique ;
- ☒ la forme du nuage est plutôt allongée dans une direction ;
- ❒ la forme du nuage est plutôt ronde ;
- ❒ la forme du nuage est plutôt parabolique.

➔ 2 Déterminer le point moyen et tracer une droite

On reprend l'énoncé précédent.

1. En moyenne…

a. Calculer la moyenne $\overline{x}$ des sept productions (en milliers), puis la moyenne $\overline{y}$ des sept frais de publicité (en milliers d'euros).

$\overline{x}$ = 300 .... ; $\overline{y}$ = 20 ....

b. Placer le point G de coordonnées $(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$. Comment se situe-t-il par rapport au nuage ?

Le point G se situe « au centre » du nuage.

Le point G se nomme le **point moyen**.

2. On ajuste ce nuage par la droite D d'équation $y = 0{,}084x - 5{,}2$. Vérifier que le point G appartient à la droite D.

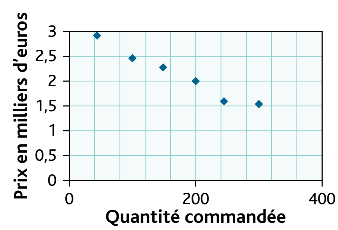
$0{,}084 \times 300 - 5{,}2 = 20$

3. Tracer la droite D sur le graphique de la page précédente.

Comment déterminer le point moyen ?

Le tableau suivant donne le prix de vente d'un article en fonction de la quantité commandée.

Quantité commandée : x_i	50	100	150	200	250	300
Prix en milliers d'euros : y_i	2,8	2,4	2,3	2	1,65	1,6



Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points correspondant.

- On calcule la moyenne $\overline{x}$ des valeurs x_i.

  La moyenne des quantités commandées est : $\overline{x} = \dfrac{50+100+150+200+250+300}{6}$ = 175 ....

- On calcule la moyenne $\overline{y}$ des valeurs y_i.

  La moyenne des prix est :

  $\overline{y} = \dfrac{2{,}8 + 2{,}4 + 2{,}3 + 2 + 1{,}65 + 1{,}6}{6}$ = 2,125 ....

Vérifiez sur le graphique que le point moyen est bien « au centre » du nuage !

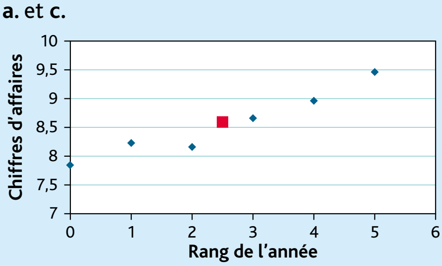
- Le point G a pour coordonnées $(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$.

  Les coordonnées de G sont : (....175..... ; ....2,125....).

RÉPONSES

Exercice

a. et **c.**



b. On a $\overline{x} = 2{,}5$ et $\overline{y} = 8{,}555$ d'où $G(2{,}5\ ;8{,}555)$.

2 Ajustement affine

Capacités
- Déterminer, à l'aide des TIC, une équation d'une droite d'ajustement
- Utiliser cette équation pour interpoler ou extrapoler

(Livre élève pages 7 et 8)

1 Exploiter une droite d'ajustement

Une utilisation électrique de la statistique !

La tension U aux bornes d'une batterie de force électromotrice e et de résistance interne r s'écrit théoriquement $U = -ri + e$. On a procédé à différentes mesures :

Intensité i (A)	0	0,1	0,4	1
Tension U (V)	12	11	7	1

Les intensités i sont sur l'axe des x et les tensions U sur l'axe des y.

1. Placer dans un repère orthogonal les quatre points correspondant à ces mesures.

2. Tracer, dans ce même repère, la droite d'équation $y = -11x + 12$ et vérifier qu'elle passe « à proximité » des quatre points.

Cette droite se nomme **droite d'ajustement**.

3. Exploiter cette droite d'ajustement pour déterminer la force électromotrice e et la résistance interne r.

$r = 11$

$e = 12$

2 Déterminer un ajustement affine

Quelle tendance pour les gaz à effet de serre (GES) ?

Le tableau suivant correspond aux émissions de gaz à effet de serre (en millions de tonnes équivalent CO_2) relevées en France (Source : Ifen).

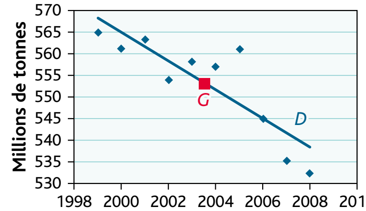
Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Émissions GES	565	561	563	554	558	557	561	545	535	532

1. Recherche du point moyen

Calculer les coordonnées $\overline{x}$ (moyenne de la première ligne du tableau) et $\overline{y}$ (moyenne de la seconde ligne) du point moyen G.

$\overline{x} = 2\,003,5$; $\overline{y} = 553,1$.

2. Détermination d'une droite d'ajustement



a. On souhaite ajuster le nuage de points par une droite D passant par le point G.

On admet que D a pour coefficient directeur $-3{,}33$.

On note $y = -3{,}33x + b$ une équation de D.

Calculer le nombre b.

$553{,}1 = -3{,}33 \times 2\,003{,}5 + b$ d'où $b = 7\,224{,}755$

b. En supposant que la tendance observée sur ces dix années se poursuive, estimer la quantité d'émissions de gaz à effet de serre en France en 2015.

$-3{,}33 \times 2\,015 + 7\,224{,}755 = 514{,}805$

Comment ajuster un nuage de points à l'aide d'un tableur ?

Le tableau suivant donne le prix de vente d'un article en fonction de la quantité commandée.

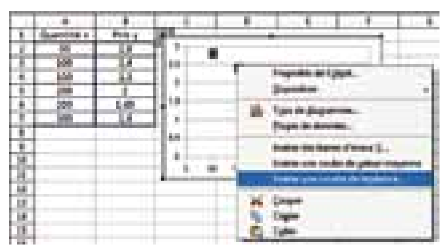
Quantité commandée : x_i	50	100	150	200	250	300
Prix en milliers d'euros : y_i	2,8	2,4	2,3	2	1,65	1,6

Représenter à l'aide d'un tableur le nuage de points correspondant puis en effectuer un ajustement affine.

- **Sélectionner** les données puis :

  – avec Excel 2003, cliquer sur l'icône *Assistant graphique* et choisir *Nuage de points* ; avec Excel 2007-2010, choisir *Insertion/Nuage de points* ;

  – avec OpenOffice Calc, cliquer sur l'icône *Diagramme* puis choisir *XY (dispersion)*.



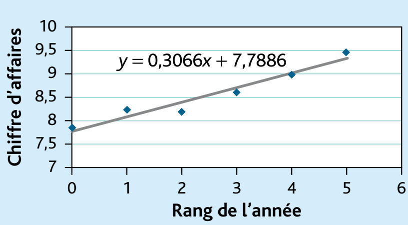
- Cliquer avec le bouton droit sur l'un des points du nuage et choisir *Ajouter une courbe de tendance...* avec Excel ou *Insérer une courbe de tendance...* avec OpenOffice. Choisir *Linéaire* et cocher *Afficher l'équation sur le graphique*.

  On obtient l'équation : $y = -0{,}0049x + 2{,}98$

RÉPONSES

Exercice

a.



b. On peut estimer le chiffre d'affaires en 2011 (année de rang 6) à :
$0{,}3 \times 6 + 7{,}8 = 9{,}6$ millions d'euros.

(Livre élève pages 9 et 10)

J'utilise un logiciel (tableur)

Ajuster un grand nombre de données

Capacité de production éolienne

Ouvrir le fichier « **01_prod_eolienne.xls** » ou « **01_prod_eolienne.ods** » fournissant la capacité de production éolienne de 76 pays de 2001 à 2010 (Source : EWEA).

1. Étude de la capacité de production française

a. Sélectionner les données de la France (ou utiliser le filtre « Pays »), puis représenter le nuage de points correspondant.

Pourquoi un ajustement affine a-t-il ici peu de sens ?

La forme du nuage n'est pas une droite.

b. Montrer à l'aide du tableur, qu'en ne retenant que les années de 2005 à 2010 (rangs 5 à 10), on peut ajuster la production française par la droite d'équation $y = 839x - 4\,114$.

c. En supposant que cette tendance se maintienne, estimer la production française en 2013 (rang $x = 13$).

$839 \times 13 - 4\,114 = 6\,793$ MW.

2. Comparaison de l'Europe et de l'Asie

- À l'aide du filtre, sélectionner les données des pays d'Europe, les copier, puis les coller sur une nouvelle feuille.

a. Calculer, pour chaque année, la production totale des pays européens.

b. Effectuer un ajustement affine de la production en Europe de 2001 à 2010 (afficher l'équation).

c. À l'aide de l'équation $y = 6\,815x + 3\,391$, estimer la production européenne en 2013 (rang $x = 13$).

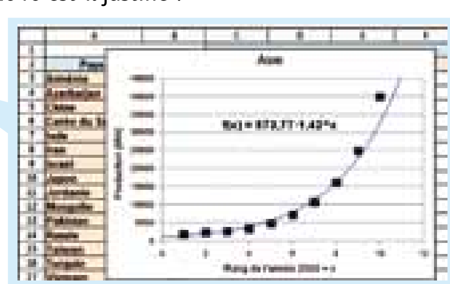
$6\,815 \times 13 + 3\,391 = 91\,986$ MW.

- À l'aide du filtre, copier les données des pays d'Asie, puis les coller sur une nouvelle feuille.

d. Calculer, pour chaque année, la production totale des pays asiatiques.

e. Un ajustement affine de la production en Asie de 2001 à 2010 est-il justifié ?

Non (l'augmentation s'accélère).



f. Le tableur permet d'ajuster le nuage à l'aide d'une « courbe de tendance exponentielle ». En utilisant la formule $973{,}77 \times 1{,}42$ ^ x (le symbole ^ indique la puissance), estimer la production asiatique en 2013 (rang $x = 13$).

$973{,}77 \times 1{,}42^{13} \approx 92\,940$ MW.

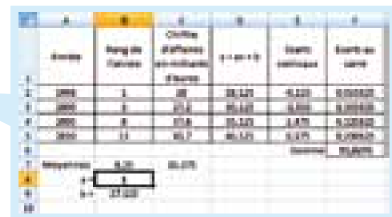
J'utilise un logiciel (tableur)

Comprendre le principe des moindres carrés

Chiffre d'affaires d'un constructeur d'automobiles

1. Principe des « moindres carrés »

Ouvrir le fichier « 01_moindres_carres.xls » ou « 01_moindres_carres.ods », donnant le chiffre d'affaires, en milliards d'euros, d'un constructeur d'automobiles.



On recherche une droite d'équation $y = ax + b$, passant par le point moyen et ajustant « au mieux » le nuage des quatre années données.

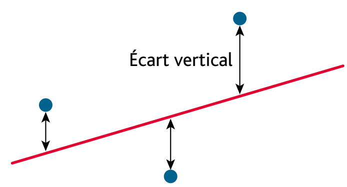
a. Dans quelles cellules sont calculées les coordonnées $(\bar{x}\ ;\ \bar{y})$ du point moyen ?

B7 et C7.

b. Puisque la droite passe par le point moyen, on a $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Expliquer la formule entrée en B9.

$\bar{y}$ est en C7 ; $\bar{x}$ en B7 et a en B8.

c. Pourquoi la somme des écarts contenus en colonne E ne permet-elle pas de savoir si la droite est proche des points du nuage et quel est l'avantage de considérer la somme des écarts au carré, en colonne F ?



Les écarts négatifs se soustraient aux écarts positifs.

Les écarts au carré sont tous positifs.

d. Modifier en B8 la première décimale du coefficient directeur a de la droite (prendre 1,1 ; 1,2 ; 1,3…) de sorte à obtenir en F6 une somme des écarts au carré minimale (observer en même temps la droite sur le graphique). Quel est, à 10^{-1} près, le coefficient a optimal ?

$a = 1{,}2$.

A **Appelez le professeur pour exposer votre résultat.**

2. Comparaison avec l'ajustement du tableur

Le tableur peut afficher directement la droite d'ajustement obtenue selon le principe précédent des « moindres carrés ».

a. Quelle est l'équation de la droite d'ajustement donnée par le tableur ?

$y = 1{,}2118x + 25{,}801$.

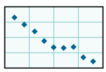
b. Comparer au résultat obtenu à la question 1.d. On a $1{,}2 \approx 1{,}2118$.

A **Appelez le professeur pour exposer vos commentaires.**

Exercices & Problèmes

Exercices p. 13 à 15

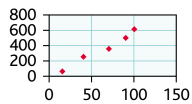
1. QCM

a. 

b. $b = -0{,}2$

c. Le point moyen est G (6,5 ; 31,575).

d. 49,8

e. 

f. G(63 ; 359)

g. $y = 6{,}06x - 22{,}73$.

h. G(3 ; 341,8)

i. $y = 0{,}8x + 339{,}4$

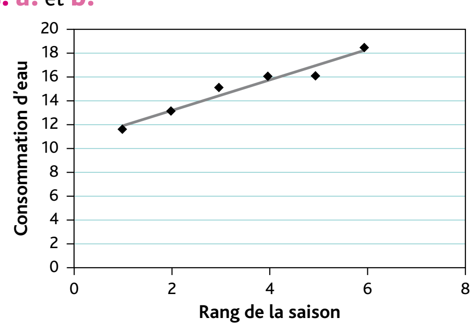
j. 344 200 €

› Exploiter un ajustement affine donné

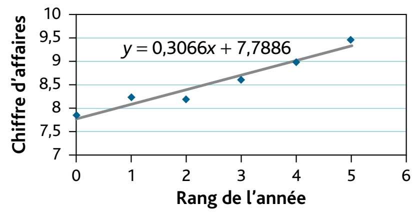
2. On peut estimer l'étendue de la glace dans l'océan Arctique en juin 2050 à :
$-0{,}0424 \times 2\,050 + 96{,}522 \times 9{,}6$ km^2.

3. On a $y = -3{,}885\,7 \times 2\,020 + 9\,461{,}3 \approx 1\,612$ m.

4. a. et b.



c. On peut estimer la consommation en 2011 (année de rang 10) à :
$1{,}2 \times 10 + 11 = 23$ millions de m^3.



d. On peut estimer le chiffre d'affaires en 2011 (année de rang 6) à :
$0{,}3 \times 6 + 7{,}8 = 9{,}6$ millions d'euros.

› Déterminer un ajustement affine

5. a. La calculatrice donne l'équation :
$y = 0{,}173\,4x - 339{,}64$.

b. On peut estimer le SMIC en 2012 à :
$y = 0{,}173\,4 \times 2\,012 - 339{,}64 \approx 9{,}24$ €.

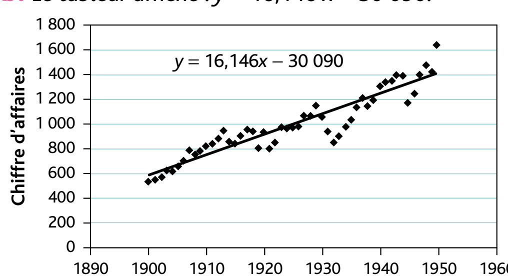
6. *Errata* a. « (Les résultats seront arrondis à 10^{-2}) ».

a. La calculatrice donne l'équation (résultats arrondis à 10^{-2}) : $y = 0{,}04x$.

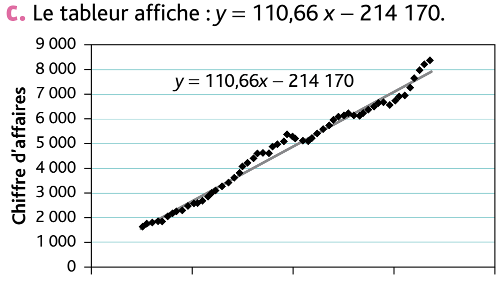
b. On en déduit que $R = 0{,}04$ Ω.

7. a. Un ajustement affine n'est pas justifié car la tendance globale n'est pas celle d'une droite.

b. Le tableur affiche : $y = 16{,}146\,x - 30\,090$.



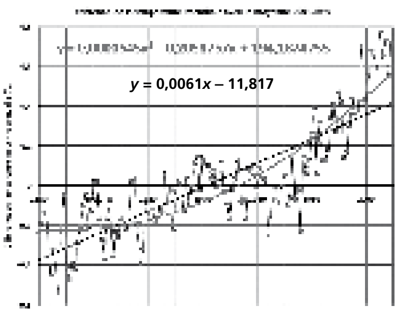
c. Le tableur affiche : $y = 110{,}66\,x - 214\,170$.



d. L'affirmation est exacte. On retrouve les coefficients directeurs des droites d'ajustement, arrondis à l'unité.

› Exploiter un ajustement non affine

8.



a. L'équation affichée par le tableur est : $y = 0{,}0061x - 11{,}817$.

b. L'ajustement qui semble préférable est l'ajustement par la parabole.

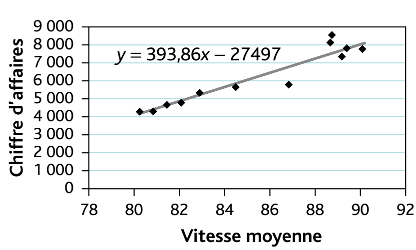
c. Estimation de l'écart de température en 2040
– à l'aide de l'ajustement affine :
$0{,}006\,1 \times 2\,040 - 11{,}817 = 0{,}627$;
– à l'aide de l'ajustement parabolique :
$0{,}000\,054\,5 \times 2040^2 - 0{,}205\,88 \times 2\,040 + 149{,}19 = 1{,}002$.

Problèmes p. 15 et 16

› Problème 1
Vitesse et sécurité routière

1. On peut formuler l'hypothèse que le nombre de morts est lié à la vitesse moyenne.

2. a.



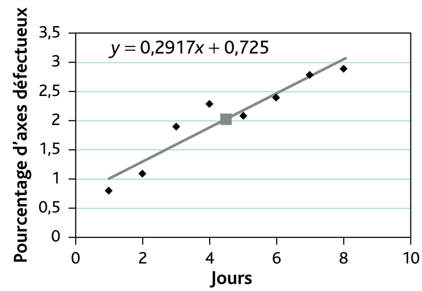
b. Le nuage de points a une forme allongée. On peut envisager un ajustement affine.

3. a. Le tableur fournit l'équation : $y = 393{,}86x - 27\,497$.

b. Pour une vitesse moyenne de 78 km/h, on peut estimer le nombre de morts à :
$393{,}86 \times 78 - 27\,297 \approx 3\,424$.
Le nombre de vies sauvées serait :
$4\,273 - 3\,424 = 849$ vies.

› Problème 2
Dérive d'une machine

1.



2. On a $\bar{x} = 4{,}5$ et $\bar{y} = 2{,}037\,5$ donc $G(4{,}5\,;\,2{,}037\,5)$.

3. La calculatrice donne (en arrondissant les coefficients à 10^{-3}) :
$y = 0{,}292x + 0{,}725$.

5. On peut estimer le pourcentage d'axes défectueux le 11^e^ jour à :
$0{,}292 \times 11 + 0{,}725 = 3{,}937$ d'où environ 3,9 % d'axes défectueux.

› Problème 3
Indice de réfraction du Plexiglas

Errata

1. Dans le tableau, modifier les titres des deux dernières colonnes.
Colonne 3 : sin r x_i. Colonne 4 : sin i y_i.
Le texte de la question 1 devient :
« Reproduire et compléter le tableau en calculant les sinus x_i des angles de réfraction et les sinus y_i des angles d'incidence (compte tenu de la précision des mesures, on arrondira les résultats à 10^{-3}). »

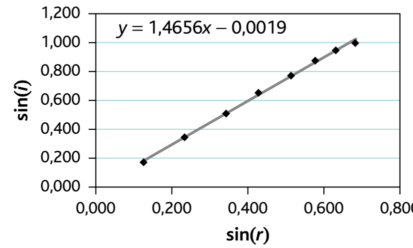
1. et 2.

Incidence i	Réfraction r	sin r x_i	sin i y_i	(sin i)/sin (r)
10°	7°	0,122	0,174	1,42
20°	13,5°	0,233	0,342	1,47
30°	20,0°	0,342	0,500	1,46
40°	25,5°	0,431	0,643	1,49
50°	31,0°	0,515	0,766	1,49
60°	35,5°	0,581	0,866	1,49

Incidence i	Réfraction r	sin r x_i	sin i y_i	(sin i)/ sin (r)
70°	39,5°	0,636	0,940	1,48
80°	43,5°	0,688	0,985	1,43

On constate que le quotient $\frac{\sin i}{\sin r}$ est pratiquement constant.

3.



On obtient : $y = 1{,}47x$.

4. On peut estimer l'indice de réfraction du plexiglas à environ 1,47.

Je me teste

(Livre élève pages 17 et 18)

EXERCICE 1 Étude d'un échantillon

On dispose des données suivantes concernant un échantillon de 20 hommes : âges t_i en années, tailles x_i en mètres, poids y_i en kg (en physique, on parle de masses).

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Âge : t_i	22	26	33	35	38	40	42	42	43	44	45	48	49	50	51	53	56	61	64	75
Taille : x_i	1,82	1,71	1,72	1,75	1,77	1,97	1,94	1,76	1,68	1,98	1,79	1,82	1,80	1,87	1,72	1,65	1,90	1,81	1,75	1,68
Poids : y_i	75	66	64,4	74,2	70,5	93,2	90,4	71,5	59,8	95,2	73,1	74,2	71	82,8	75,4	68,7	75,1	73	82,6	64

On peut trouver ces données sur le fichier « 01_lorentz.xls » ou « 01_lorentz.ods ».

On souhaite examiner de quelle manière le poids est lié à l'âge et à la taille.

1 Représenter avec un tableur les nuages des points $M_i(t_i\,;\,y_i)$ et $N_i(x_i\,;\,y_i)$.

2 D'après l'aspect de ces deux nuages, peut-on considérer que, sur cet échantillon :

a. le poids est lié à l'âge ?

Non. Le nuage des points M_i n'a pas une forme allongée.

b. le poids est lié à la taille ?

Oui. Le nuage des points N_i a une forme allongée.

A

Appelez le professeur pour présenter votre argumentation.

3 Effectuer un ajustement affine du nuage de points $N_i(x_i\,;\,y_i)$ à l'aide du tableur. Donner une équation de la droite obtenue.

$y = 85{,}708x - 78{,}797$.

4 Selon la tendance observée sur cet échantillon, estimer le poids d'un homme mesurant 1,85 m.

$85{,}708 \times 1{,}85 - 78{,}797 \approx 79{,}8$ kg.

EXERCICE 2 Formule de Lorentz

La formule de Lorentz donne le poids moyen selon la taille :

$$\textbf{poids} = 100 \times \left(\textbf{taille} - 1 - \frac{\textbf{taille} - 1{,}5}{a}\right).$$

(taille en mètres ; poids en kg ; $a = 4$ pour un homme ; $a = 2{,}5$ pour une femme.)

1 Que fournit la formule :

a. pour un homme de 1,85 m ?

$100 \times \left(0{,}85 - \frac{0{,}35}{4}\right) =$

76,25 kg

b. pour une femme de 1,73 m ?

$100 \times \left(0{,}73 - \frac{0{,}23}{2{,}5}\right) =$

63,8 kg.

2 Cette formule a-t-elle un sens appliquée à un petit garçon de 80 cm ?

$100 \times \left(-0{,}2 - \frac{-0{,}7}{4}\right) = -2{,}5$

n'a pas de sens.

3 Montrer que, dans les cas des hommes, la formule de Lorentz peut s'écrire sous la forme :
$y = 75x - 62{,}5$ où x désigne la taille, en m, et y le poids, en kg.

$100 \times \left(x - 1 - \frac{x - 1{,}5}{4}\right) = 100 \times (x - 1 - 0{,}25x + 0{,}375)$

$= 100 \times (0{,}75x - 0{,}625) = 75x - 62{,}5.$

4 Calculer y pour $x = 1{,}85$ et comparer au résultat de la question 4 de l'exercice 1.

$75 \times 1{,}85 - 62{,}5 = 76{,}25.$

Ce résultat est inférieur à 79,8.

A

Appelez le professeur pour présenter vos calculs.

2. DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

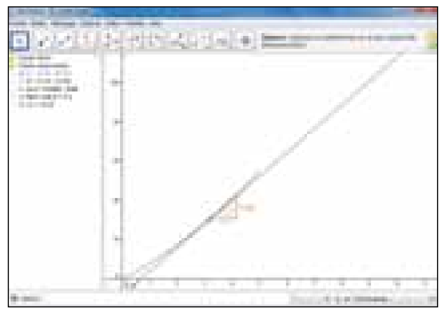
4 Fonction dérivée

Capacité
- Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction

(Livre élève pages 19 et 20)

1 Déterminer une fonction dérivée

La vitesse du surfeur



Un surfeur est resté 5 secondes dans un tube. Pour obtenir la fonction donnant la position du surfeur à chaque instant, on a considéré lors de l'étude du mouvement du surfeur par vidéo qu'il était en accélération constante de l'entrée à la sortie du tube.
Soient la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = 0{,}8x^2 + 7x$ et C_f sa courbe représentative.

Ouvrir le fichier « **02_surfeur.ggb** ». En A est affiché le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.
Le point B a même abscisse que le point A et son ordonnée est égale à $f'(x_A)$.

1. a. Vérifier que la trace du point B est activée.

b. Déplacer le point A pour tout x de $[0 ; 5]$.

2. a. Donner les nombres dérivés pour $x = 0$ et $x = 5$. $f'(0) =$ 7 .... et $f'(5) =$ 15 ....

b. Vérifier l'ordonnée de B pour ces abscisses. Elle a pour valeur le nombre dérivé. ....

3. Quelle conjecture peut-on faire sur l'allure de la courbe obtenue par la trace du point B ?

La courbe obtenue par la trace du point B est une droite. ....

L'équation de cette courbe est $y =$ $1{,}6x + 7$ ....

4. Taper cette expression dans le champ de saisie pour vérifier la vraisemblance de la conjecture faite.

La fonction f' qui, à tout x de $[0 ; 5]$, associe $f'(x) = 1{,}6x + 7$ est appelée fonction dérivée de la fonction f.

f' permet d'obtenir la vitesse du surfeur à chaque instant passé dans le tube.

2 Dériver quelques fonctions usuelles

1. Soient la fonction f définie pour tout x par $f(x) = x^2$ et C_f sa courbe représentative.

Ouvrir le fichier « **02_carre.ggb** ». En A est affiché le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.

a. Déplacer le point A pour obtenir différentes valeurs de x et compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	-4	-2	0	2	4

b. Quelle conjecture peut-on faire sur l'allure de la courbe obtenue par la trace du point B ?

La courbe obtenue est une droite ; $y = 2x$. ....

c. Taper cette expression dans le champ de saisie pour vérifier la vraisemblance de la conjecture.

d. On en déduit que la fonction dérivée de la fonction carré est : $f'(x) = 2x$.

2. Soient la fonction g définie pour tout x par $g(x) = x^3$ et C_g sa courbe représentative.

Ouvrir le fichier « **02_cube.ggb** ».

a. Déplacer le point A pour obtenir différentes valeurs de x et compléter le tableau suivant :

x	– 2	– 1	0	1	2
$g'(x)$	12	3	0	3	12

b. Quelle conjecture peut-on faire sur l'allure de la courbe obtenue par la trace du point B ?

La courbe obtenue est une parabole : $y = 3x^2$.

c. Taper cette expression dans le champ de saisie pour vérifier la vraisemblance de la conjecture.

d. On en déduit que la fonction dérivée de la fonction cube est : $g'(x) = 3x^2$.

3. Soient la fonction h définie pour tout x par $h(x) = ax + b$ et C_h sa courbe représentative.

Ouvrir le fichier « **02_affine.ggb** ». Vérifier que le coefficient a vaut 1.

a. Déplacer le point A pour obtenir différentes valeurs de x et compléter le tableau suivant :

x	– 2	– 1	0	1	2
$h'(x)$	1	1	1	1	1

b. Quelle conjecture peut-on faire sur l'allure de la courbe obtenue par la trace du point B ?

C'est une droite d'équation $y = 1$ ou $y = a$.

c. Faire varier les coefficients a et b à l'aide des curseurs et vérifier la conjecture faite.

d. On en déduit que la fonction dérivée de la fonction affine h est : $h'(x) = a$.

Ces résultats se retrouvent dans le formulaire page 25.

Comment calculer la dérivée d'une fonction ?

a. Calculer la dérivée de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 3x - 4$.

- Identifier la forme de la fonction : $f(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 3$ et $b = -4$.
- Lire dans le tableau de la page 25 la fonction dérivée correspondante : $f'(x) = a$.
- Calculer la dérivée : $f'(x) = 3$.

b. Calculer la dérivée de la fonction g définie pour tout x positif par $g(x) = \sqrt{x} + 5x + 2$.

- Identifier la forme de la fonction : $g(x)$ est de la forme $u(x) + v(x)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 5x + 2$.
- Lire dans le tableau de la page 25 la fonction dérivée correspondante : $g'(x) = u'(x) + v'(x)$.
- Calculer la dérivée : on a donc, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 5$.

RÉPONSES

Exercices

1 a. $f'(x) = -8x$; b. $f(x) = -4x + 1{,}5$.

2 a. $f'(x) = 15x^2 - 4$; b. $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

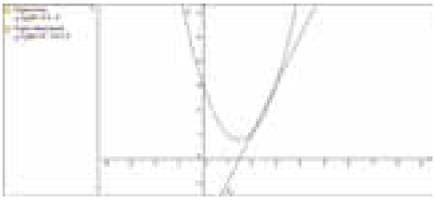
3 a. $f'(x) = 4$; b. $f'(x) = 6x^2$.

2. DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

5 Signe de la dérivée et sens de variation

(Livre élève pages 21 et 22)

Capacités
- Étudier, sur un intervalle donné, les variations d'une fonction à partir du calcul et de l'étude du signe de sa dérivée. Dresser son tableau de variation
- Déterminer un extremum d'une fonction sur un intervalle donné à partir de son sens de variation



1 Sommet d'une parabole

Soit la fonction f_1 définie sur [– 1 ; 4] par $f_1(x) = x^2 - 3x + 3$.

1. Tracer, à l'aide de GeoGebra ou de la calculatrice, la représentation graphique de la fonction f_1.

2. Calculer l'abscisse x du sommet de cette parabole : $x = \frac{3}{2 \times 1}$ $x = 1{,}5$

Le sommet de la parabole correspond-il à un maximum ou à un minimum de f_1 ? Au minimum

3. Dresser le tableau de variation de f_1.

x	– 1	1,5	4
$f_1(x)$	7 ↘	0,75	↗ 7

4. Tracer, dans le même repère que f_1, la fonction g_1 définie sur [– 1 ; 4] par $g_1(x) = 2x - 3$.

5. Que représente la fonction g_1 pour la fonction f_1 ?

g_1 représente la fonction dérivée de f_1.

6. Dresser le tableau de signe de la fonction g_1.

x	– 1		1,5		4
Signe de $g_1(x)$		–	0	+	

7. Conjecturer le lien qui existe entre le tableau de variation de la fonction f_1 et le tableau de signe de la fonction g_1. Lorsque le signe de g_1 est négatif, la fonction f_1 est décroissante et le contraire quand g_1 est positif.

2 Signe de la dérivée et sens de variation

1. Recommencer ce travail avec les fonctions $f_2(x) = -x^2 + x - 4$ et $g_2(x) = -2x + 1$ définies sur [– 2 ; 3].

- L'abscisse x du sommet de cette parabole vaut $x = 0{,}5$, le sommet de la parabole correspond à un maximum de la fonction f_2.
- Tableau de variation de f_2

x	– 2	0,5	3
$f_2(x)$	– 10 ↗	– 3,75	↘ – 10

- La fonction g_2 représente la fonction dérivée pour la fonction f_2.
- Tableau de signe de g_2

x	– 2		0,5		3
Signe de $g_2(x)$		+	0	–	

2. Recommencer ce travail avec les fonctions $f_3(x) = 3x^2 + 5x - 2$ et $g_3(x) = 6x + 5$ définies sur $[-3 ; 1]$.

- L'abscisse x du sommet de cette parabole vaut $x = \frac{-5}{6}$ ...., le sommet de la parabole correspond à un minimum .... de la fonction f_3.

Tableau de variation de f_3

x	-3		$\frac{-5}{6}$		1
$f_3(x)$	10	↘	$4{,}25$	↗	6

- La fonction g_3 représente la fonction dérivée .... pour la fonction f_3.

Tableau de signe de g_3

x	-3		$\frac{-5}{6}$		1
Signe de $g_3(x)$		$-$	0	$+$	

3. La conjecture faite à la question 1.7. est-elle vérifiée ? Oui pour g_2 et g_3 ....

Comment étudier le sens de variation d'une fonction ?

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0{,}2 ; 5]$ par $f(x) = \frac{1}{x} + x$.

Pour cela, on montrera que la dérivée peut se mettre sous la forme $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

- Calculer la dérivée de f : $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 1$ ....
- Mettre l'écriture de $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 1 = \frac{-1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{-1+x^2}{x^2}$ ....

$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ ....

On applique l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

- Rechercher sur l'intervalle d'étude les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule. Pour -1 et 1. ....

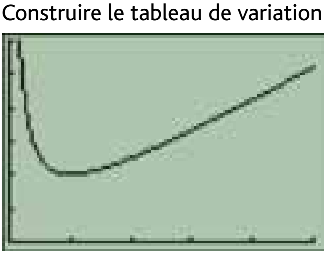
Sur $[0{,}2 ; 5]$, $f'(x)$ s'annule pour l'abscisse 1 ....

- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0{,}2 ; 5]$ et l'indiquer dans le tableau de variation.

Du signe de $(x-1)$. $x - 1 > 0$ pour $x > 1$ et $x - 1 < 0$ pour $x < 1$.

- Construire le tableau de variation de la fonction f.

x	$0{,}2$		1		5
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$5{,}2$	↘	2	↗	$5{,}2$



Pensez à vérifier la cohérence entre le tableau de variation et la courbe.

RÉPONSES

Exercice

a. $f'(x) = 7$.

x	0		10
Signe de $f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-5	↗	65

b. $f'(x) = -4$.

x	-5		6
Signe de $f'(x)$		$-$	
$f(x)$	23	↘	-21

c. $f'(x) = 2x - 3$.

x	0		$1{,}5$		4
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-0{,}25$	↗	6

d. $f'(x) = 6x^2 - 2$

x	-1		$-\sqrt{1/3}$		$\sqrt{1/3}$		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\approx 0{,}770$	↘	$-0{,}770$	↗	48

(Livre élève pages 23 et 24)

6 J'utilise une calculatrice

Rechercher un extremum

1. Rechercher un extremum

On a vu dans la fiche 5 que les sommets des paraboles correspondent aux points où la dérivée est nulle. On va vérifier dans cette partie, à l'aide de la dérivée, si pour d'autres fonctions le point où la dérivée s'annule correspond toujours à un minimum ou un maximum.

Soient les fonctions : f définie sur $[-2 ; 2]$ par $f(x) = x^3 - 3x$; g définie sur $[0{,}2 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - x$ et h définie sur $[-2 ; 2]$ par $h(x) = x^3$.

a. Calculer les dérivées des fonctions f, g et h sur leur intervalle de définition et étudier leur signe.

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $\Delta = 36 > 0$; $x = -1$ et $x_2 = 1$ d'où $f'(x) < 0$ pour $x \in [-1 ; 1]$.

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$; $g'(x) > 0$ pour $x < 0{,}25$. $h'(x) = 3x^2$ toujours positive.

b. Dresser les tableaux de variation des fonctions f, g et h.

x	-2		-1		1		2
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

x	$0{,}2$		$0{,}25$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$0{,}247$	↗	$0{,}25$	↘	

x	-2		0		2
Signe de $h'(x)$		+	0	+	
$h(x)$	-8	↗		↗	8

c. Tracer les courbes représentatives des fonctions f, g et h sur la calculatrice et vérifier les résultats précédents.

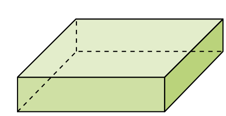
d. Grâce à l'observation des tableaux de variation, répondre au problème posé.

Non ce n'est pas toujours le cas. Pour contre exemple le tableau de variation de h.

Ne pas confondre tableau de signes et tableau de variation.

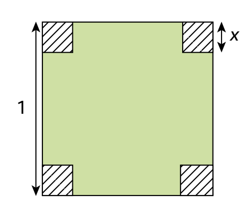
2. Déterminer la valeur exacte d'un extremum

On désire construire une boîte sans couvercle de volume le plus grand possible. Pour cela, on dispose d'une plaque carrée de 1 mètre de côté. À chaque coin de la plaque, on enlève un carré de côté x (mètre), avec x compris entre 0 et 0,5.



a. Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de x :

largeur : $1 - 2x$; longueur : $1 - 2x$; hauteur : x.



b. Vérifier que le volume de la boîte s'exprime en fonction de x par $V(x) = 4x^3 - 4x^2 + x$.

$(1 - 2x)(1 - 2x)x = (4x^2 - 4x + 1) \times x = 4x^3 - 4x^2 + x$

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 0{,}5]$ par $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + x$.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice.

Réglez correctement la fenêtre de la calculatrice pour voir la courbe sur l'intervalle d'étude.

d. Déterminer graphiquement l'abscisse du maximum. $x = 0{,}17$.

e. Étudier les variations de f.

$f'(x) = 12x^2 - 8x + 1$; $\Delta = 16 > 0$; $x_1 = 1/6$ et $x_2 = 0{,}5$;

x	0		$1/6$		$0{,}5$
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$		↗		↘	

f. La valeur exacte du maximum est $\frac{1}{6}$. Donc, le volume maximal de la boîte vaut $\frac{2}{27}\,\text{m}^3$.

J'utilise un logiciel (tableur)

Déterminer un minimum

Coût unitaire de gestion

Le responsable d'un magasin analyse le coût unitaire (coût d'un seul objet) de gestion de son stock d'imprimantes multifonctions. Il estime que ce coût $C(n)$, en euros, est lié au nombre n de commandes reçues, où n est compris entre 5 et 30, par la relation : $C(n) = 2n + 40 + \dfrac{450}{n}$.

1. Calculs de coûts unitaires

	A	B
1	n	C(n)
2	5	140
3	6	127
4	7	118,285714
5	8	112,25
6	9	108
7	10	105
8	11	102,909091
9	12	101,5

a. ▪ Avec un tableur, réaliser la feuille de calcul dont voici un extrait.

▪ Faire varier n de 5 à 30 avec un pas de 1.

▪ Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B2 ? =2*A2+40+450/A2

▪ Recopier cette formule vers le bas jusqu'à la valeur 30 de n.

b. ▪ En utilisant l'Assistant graphique, afficher la représentation graphique de $C(n)$. Choisir *Nuage de points reliés par une courbe lissée*.

▪ Régler sur l'axe des ordonnées le minimum à 90 et le maximum à 150.

c. Estimer graphiquement la valeur du minimum. Pour $n = 15$

d. Estimer graphiquement les valeurs de n pour lesquelles $C(n) \leq 110$. Pour $9 \leq n \leq 26$

2. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[5 ; 30]$ par $f(x) = 2x + 40 + \dfrac{450}{x}$.

a. Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f. $f'(x) = 2 - \dfrac{450}{x^2}$

b. On admet que $f'(x)$ peut s'écrire : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 450}{x^2}$.

Étudier le signe de $f'(x)$. Pour cela on est amené à résoudre l'équation $2x^2 - 450 = 0$.

$x^2 = 225$ d'où $x = -15$ ou $x = 15$ soit sur $[5 ; 30]$ pour $x = 15$.

c. Construire le tableau de variation de la fonction f.

x	5		15		30
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	140	↘	100	↗	115

d. En déduire la valeur du minimum. $f(15) = 100$

e. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 110$.

Pour cela, se ramener à une inéquation du second degré. On se ramène à $2x^2 - 70x + 450 \leq 0$.

$\Delta = 1\,300$; $x_1 = \dfrac{70 - \sqrt{1300}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{70 + \sqrt{1300}}{4}$. Soit pour $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$.

3. Exploitation

En utilisant les résultats précédents, compléter les phrases suivantes :

a. Le nombre de commandes à réaliser afin d'obtenir un coût unitaire de gestion de stock minimal est 15 ; dans ce cas le montant de ce coût minimal vaut 100 .

b. Le nombre de commandes correspondant à un coût unitaire de gestion de stock inférieur ou égal à 110 € est compris entre 9 et 26 .

Exercices & Problèmes

Exercices p. 27 et 28

1. QCM

a. la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

b. la fonction f est constante sur cet intervalle.

c. pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$.

d. $f'(x) = -6x + 1$.

e. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Choix dans une liste

a. La fonction f est décroissante sur $[-1 ; 4]$ et la fonction f est croissante sur $[-9 ; -1]$.

b. La fonction f est décroissante sur $[-5 ; -2]$ et $[5 ; 9]$ et la fonction f est croissante sur $[-2 ; 5]$.

c. La fonction f est croissante sur $[0 ; 0{,}5]$ et la fonction f est décroissante sur $[0{,}5 ; 1]$.

3. Associer

		$f(x) = 4x^2 + \dfrac{4}{x} + 5$
$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$	$\longrightarrow$	$f(x) = 4\sqrt{x}$
$f'(x) = 4x + 2$		$f(x) = \dfrac{4}{3}x^3 + x^2 + x - 5$
$f'(x) = 4x - \dfrac{4}{x^2}$		$f(x) = 2\sqrt{x}$
$f'(x) = 4x^2 + 2x + 1$		$f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x} + 5$
		$f(x) = 2x^2 + 2x - 5$

4. QCM

x	-4		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Donc, f est décroissante sur $[-1 ; 2]$.

› Calculer une fonction dérivée

5. a. $f'(x) = \dfrac{4}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

b. $f'(x) = -\dfrac{6}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

6. a. $f'(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.

b. $f'(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.

7. a. $f'(x) = 3x^2 + 2$.

b. $f'(x) = 15x^2 - 4x$.

8. a. $f'(x) = -4x$.

b. $f'(x) = 3x^2 - 7$.

9. a. $f'(x) = 6x - \dfrac{2}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

b. $f'(x) = 15x^2 + \dfrac{4}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

10. a. $f'(x) = 42x + 1$.

b. $f'(x) = 6x - 6$.

11. a. $f'(x) = 9x^2 + 8x$.

b. $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

12. a. $f'(x) = 7$, $f'(1) = 7$.

b. $f'(x) = 8x + 3$, $f'(3) = 27$.

c. $f'(x) = -3x^2 + 14x$, $f'(1) = 11$.

13. a. $f'(x) = -6x - 10$, $f'(0) = -10$.

b. $f'(x) = 14x - \dfrac{2}{x^2}$ avec $x \neq 0$, $f'(2) = 27{,}5$.

14. a. $f'(x) = x + 4$.

b. $f'(2) = 6$.

c. $y = 6x - 5$.

› Déterminer le sens de variation d'une fonction à partir de sa fonction dérivée

15. a. $f'(x) = 4x$.

x	-3		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$2x^2 - 1$	17	$\searrow$	-1	$\nearrow$	17

b. $f'(x) = \dfrac{4}{x^2} + 2$.

x	-5		-1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-9{,}8$	$\nearrow$	2

16. a. $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	0	↘	-4	↗	0

b. $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↗	23	↘	-4	↗	7

17. a. $f'(x) = -10x$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$-5x^2 + 2$	-3	↗	2	↘	-3

b. $f'(x) = 9x^2 + 4x - 12$.

x	-3		$\approx -1{,}40$		$\approx 0{,}96$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-24	↗	$\approx 15{,}49$	↘	$\approx -4{,}02$	↗	11

› Rechercher l'extremum d'une fonction sur un intervalle donné

18. $f'(x) = 8x - 2$. Le minimum de f sur $[-1\,;1]$ est pour $x = \frac{1}{4}$. Il est égal à $\frac{3}{4}$.

19. $f'(x) = -54x^2 + 9$. Le maximum de f sur $[0\,;2]$ est pour $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Il est égal à $f(\frac{1}{\sqrt{6}}) \approx 1{,}837$.

20. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Le maximum de f sur $[-2\,;0]$ est pour $x = -1$. Il est égal à 6.

21. $f'(x) = 1{,}5x^2 - 2$. Le minimum de f sur $[-1\,;4]$ est pour $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$. Il est égal à $f(\sqrt{\frac{4}{3}}) \approx -4{,}732$.

Problèmes p. 29 et 30

› Problème 1

Le caddy moyen

1. a. $C_A(n) = 100 \times n$.

2. a.

x	0	30	50	90	150	200	300	400	410
$f(x)$	4 800	3 000	2 200	1 560	3 000	6 400	19 200	40 000	42 520

c. $f'(x) = 0{,}8x - 72$.

d. $f'(x) = 0$ pour $x = 90$.

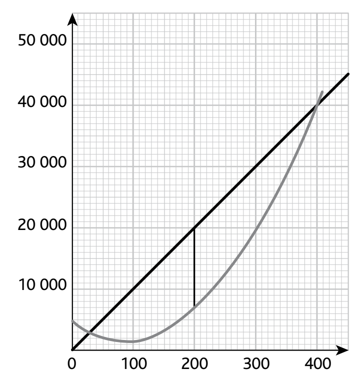
e.

x	0		90		410
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4 800	↘	1 560	↗	42 520

3. a. Les charges sont minimales pour 90 clients.

b. Il s'agit de la différence des extrémités du segment verticale. 20 000 – 6 500 = 13 500.
Soit, avec la précision du graphique, les 13 600 € de bénéfice.

Graphique pour les questions : 1.b., 2.b., 2.f. et 3.b.



› Problème 2

$E'(\theta) = -0{,}032\,\theta + 17{,}8$.
La dérivée s'annule pour $\theta = 556{,}25$.
Donc, la f.e.m. atteint sa valeur maximale pour une température de 556,25 °C.

› Problème 3

Surface imprimable maximale

1. $A = (21 - 2 \times 2)(29{,}7 - 2 \times 3) = 402{,}9$.
La surface imprimable vaut 402,9 cm².

2. $y = \frac{623{,}7}{x}$.

3. $A(x) = (x - 4)(\frac{623{,}7}{x} - 6)$

$= 623{,}7 - 6x - 4 \times \frac{623{,}7}{x} + 24$.

Soit la relation donnée.

4. a. Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée lorsque $x > 0$.

$A'(x) = -6 + \frac{2\,494{,}8}{x^2}$. $A'(x) = 0$ avec $x > 0$,

pour $x = \sqrt{415{,}8} \approx 20{,}39$.

L'aire est maximale pour $x = 20{,}39$.

b. $y = \frac{623{,}7}{20{,}39} \approx 30{,}59$.

Cette page a pour dimensions 20,4 cm × 30,6 cm.

c. Non.

› Problème 4
La bouée de bateau

1. $V'(h) = \frac{2}{3}\pi(9 - 3h^2)$. D'où $V'(h) \geq 0$ pour $-\sqrt{3} \leq h \leq \sqrt{3}$.

Donc, V est croissante sur $[0\,;\sqrt{3}]$ et décroissante sur $[\sqrt{3}\,;3]$.

2. D'après 1, le volume maximal sera pour $h = \sqrt{3}$.

$V(\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi(9 \times \sqrt{3} - \sqrt{3}^3) \approx 21{,}766$. Soit un volume maximal de 21,766 dm^3.

3. On constate que le volume est deux fois plus grand que le volume de 2 cubes de côtés $\sqrt{3}$ (environ 10,39 dm^3).

› Problème 5
Le meilleur chauffe-eau

1. a. $V = \frac{\pi d^2}{4} \times h$.

b. $h = \frac{4}{\pi d^2}$.

2. a. Surface d'un disque : $\frac{\pi d^2}{4}$; surface du rectangle : $\pi d \times h = \pi d \times \frac{4}{\pi d^2} = \frac{4}{d}$.

On obtient bien $S(d) = \frac{\pi d^2}{2} + \frac{4}{d}$.

b. Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée lorsque $x > 0$.

$S'(d) = \pi d - \frac{4}{d^2}$. $S'(d) = 0$ lorsque $\pi d^3 - 4 = 0$.

Soit $d = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1{,}083\,9$ m.

c. D'après 1.b. on en déduit que $h = 1{,}083\,9$ m.

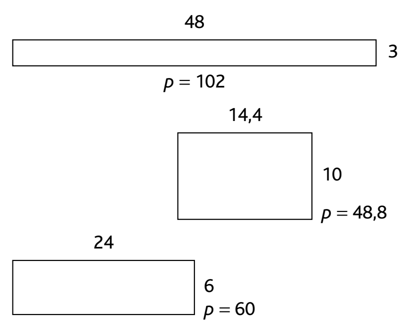
3. $h = d$. Le cylindre a la même hauteur que son diamètre.

› Problème 6
La boîte de conserve

On changeant d'unité du mètre au décimètre, le problème reste identique.
D'après le problème 5, la boîte a pour dimensions $h = d = 1{,}084$ dm.
Ce n'est pas tout à fait le cas des boîtes vendues dans le commerce qui ont une hauteur légèrement supérieure au diamètre. Mais les dimensions restent proches des dimensions idéales.

› Problème 7
La clôture la plus courte

1. a. et **b.**



c. Le rectangle de plus petit périmètre semble être le carré de côté 12.

2. a. On a $s = L \times l$ d'où $L = \frac{s}{l}$.

Donc, $p = 2l + 2L = 2l + \frac{2s}{l}$.

b. Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée :

$p'(x) = 2 - \frac{2s}{x^2}$.

$p'(x) = 0$ lorsque $2x^2 - 2s = 0$. C'est-à-dire, pour $x > 0$, lorsque $x = \sqrt{s}$.

c. Lorsque $x = \sqrt{s}$, le rectangle est un carré. Ce qui confirme la conjecture de 1.c.

› Problème 8
La fonte des neiges

1. $V'(t) = 560t + 560$.
Pour $t = 1$, le débit est de 1 120 m^3/mois.
Pour $t = 2$, le débit est de 1 680 m^3/mois.

2. $V(t) = 630 = 280(1 + t)^2$.
Ce qui revient à résoudre l'équation
$280t^2 + 560t - 350 = 0$. Soit pour $t = -2{,}5$ ou $t = 0{,}5$.
Comme $t > 0$, alors $V(t) = 630$ pour $t = 0{,}5$.

Le débit est alors de 840 m^3/mois.

› Problème 9

Puissance d'une batterie

1. La puissance maximale est obtenue lorsque la dérivée s'annule.

$P'(I) = U - 2rI$. $P'(I) = 0$ lorsque $U - 2rI = 0$. Soit lorsque $I = \dfrac{U}{2r}$.

2. Le terme r de la résistance interne est au dénominateur. Donc, il est préférable d'avoir une plus petite résistance interne possible.

Je me teste

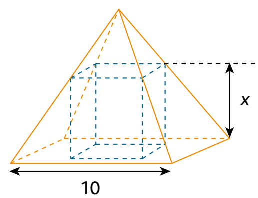
(Livre élève pages 31 et 32)

EXERCICE Réservoir d'eau potable

Lors de la construction d'un hôtel, il est nécessaire de prévoir un réservoir d'eau potable. Celui-ci à la forme d'un parallélépipède rectangle.

L'architecte prévoit de le placer au centre de la serre située sur le toit de l'hôtel.

La serre a la forme d'une pyramide de hauteur 8 mètres et de base un carré de 10 mètres de côté.



On désigne par x la hauteur du réservoir exprimée en mètres. Le volume V du réservoir, exprimé en m^3, est donné par la formule $V = \frac{25}{16}(x^3 - 16x^2 + 64x)$. (On ne cherchera pas à démontrer cette formule.)

1 Étude de la situation

a. Quelles valeurs peut prendre la hauteur x ?

$x \in [0 ; 8]$

b. Calculer le volume du réservoir pour $x = 0$, puis pour $x = 4$ et pour $x = 8$.

Pour $x = 0$ $V(0) = 0$

Pour $x = 4$ $V(4) = \frac{25}{16} \times (4^3 - 16 \times 4^2 + 6^4 \times 4) = 100$

Pour $x = 8$ $V(8) = \frac{25}{16} \times (8^3 - 16 \times 8^2 + 6^4 \times 8) = 0$

c. Les calculs précédents permettent-ils de déterminer pour quelle hauteur x le volume du réservoir est maximal ?

Non car on ne sait pas encore à quelle hauteur le volume du réservoir est maximal.

A

Appelez le professeur pour expliquer votre proposition.

2 Recherche du volume maximal

On considère la fonction f définie sur [0 ; 8] par $f(x) = \frac{25}{16}(x^3 - 16x^2 + 64x)$.

a. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f pour x variant de 0 à 8.

Indiquer les dimensions de la fenêtre choisie :

Xmin : 0 ……… Xmax : 8 ……… Ymin : 0 ……… Ymax : 200 ………

b. Vérifier graphiquement l'hypothèse formulée en 1.c.

Indiquer votre démarche :

Effectivement, on trouve plutôt $x \approx 2{,}7$ au lieu de $x = 4$.

c. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

$f'(x) = \frac{25}{16}(3x^2 - 32x + 64) = \frac{75}{16}x^2 - 50x + 100$

d. Dresser le tableau de variation de f sur [0 ; 8].

$\frac{75}{16}x^2 - 50x + 100$; $\Delta = 625 > 0$ $x_1 = 8/3$ et $x_2 = 8$.

x	0		8/3		8
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0
$f(x)$	0	↗		↘	0

e. Déterminer la hauteur x pour laquelle le volume du réservoir est maximal.

Pour $x = 8/3 \approx 2{,}67$.

Appelez le professeur pour présenter votre démarche.

f. En déduire le volume maximal V_{max} du réservoir.

On a V_{max} pour $f(8/3)$. $V_{max} = \frac{3\,200}{27} \approx 118{,}5$. $V_{max} \approx 118{,}5\ \text{m}^3$.

3 Quel pourcentage du volume de la serre occupe ce réservoir ?

On rappelle la formule du volume de la pyramide : $V_{pyramide} = \frac{1}{3}\text{base} \times \text{hauteur}$

$V_{pyramide} = \frac{1}{3} \times (10^2) \times 8 = \frac{800}{3} \approx 266{,}7\ \text{m}^3$.

$\frac{V_{max}}{V_{pyramide}} = \frac{3\,200}{9} \times \frac{3}{800} = \frac{4}{9}$. Soit environ 44,4 %.

7 Suites arithmétiques

Capacité
- Appliquer les formules donnant le terme de rang n en fonction du premier terme et de la raison de la suite

(Livre élève pages 33 et 34)

1 Découvrir une nouvelle formule

Fidélité récompensée ?

Malika est cliente chez un opérateur téléphonique. Elle a reçu 50 points de fidélité en cadeau de bienvenue, puis chaque mois, avec son abonnement, elle gagne le même nombre de points supplémentaires. Voici le récapitulatif des points de fidélité obtenus les six premiers mois de son abonnement.

Mois	1er mois	2^{e} mois	3^{e} mois	4^{e} mois	5^{e} mois	6^{e} mois
Nombre total de points fidélité acquis	80	110	140	170	200	230

1. Combien de points supplémentaires Malika gagne-t-elle chaque mois ?

Malika gagne chaque mois 30 points supplémentaires.

2. On désigne par u_n le nombre total de points acquis après n mois. Le premier terme de la suite est $u_0 = 50$.
La suite numérique (u_n) est une suite arithmétique. Quelle est sa raison r ?

La raison de la suite (u_n) est $r = 30$.

3. Compléter les pointillés :

$u_0 = 50$
$u_1 = 80$ $+r$
$u_2 = 110$ $+2r$
$u_3 = 140$ $+3r$
$u_4 = 170$ $+4r$
$u_5 = 200$ $+5r$
$u_6 = 230$ $+6r$
⋮
u_n $+nr$

$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_0 + 2r$
$u_3 = u_0 + 3r$
$u_4 = u_0 + 4r$
$u_5 = u_0 + 5r$
$u_6 = u_0 + 6r$
⋮
$\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Le premier terme peut être u_0 ou u_1.

4. Utiliser la formule établie à la question précédente pour calculer le nombre de points que Malika pourra acquérir si son abonnement dure 24 mois (soit u_{24}).

$u_{24} = 50 + 24 \times 30 = 770$ soit 770 points.

5. Ce nombre de points sera-t-il suffisant pour que Malika reçoive gratuitement le téléphone portable offert pour 1 000 points de fidélité ?

Les 770 points ne suffisent pas pour obtenir ce portable.

6. Si son abonnement lui rapportait 40 points de fidélité par mois, au bout de combien de mois pourrait-elle recevoir ce téléphone ?

On considère que la suite (u_n) a pour raison $r = 40$. En calculant, on trouve $u_{23} = 970$, $u_{24} = 1\,010$, il faut donc 24 mois.

Pour une suite arithmétique, la formule donnant le terme de rang n, en fonction du premier terme u_0 et de la raison r est : $u_n = u_0 + nr$.

2 Appliquer des formules

Avec l'achat d'un logiciel, un commercial propose un contrat d'assistance de deux ans comprenant une installation à domicile et un conseiller joignable par téléphone pour 20 € le premier mois, puis le deuxième mois 0,60 € de moins par rapport au mois précédent, et ainsi de suite. On note u_n la mensualité au n-ième mois pour ce contrat.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 = 20$; $u_2 = 20 - 0{,}60 = 19{,}4$.

$u_3 = 19{,}4 - 0{,}60 = 18{,}8$.

2. Donner la raison de la suite (u_n).

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -0{,}60$ car $u_2 - u_1 = 19{,}4 - 20 = -0{,}60$.

$u_2 - u_1 = 19{,}4 - 20 = -0{,}60$.

3. Parmi les trois propositions suivantes, entourer celle donnant l'expression de u_n en fonction de n.

$u_n = u_1 + (n-1)r$ $\qquad$ $u_n = u_1 + nr$ $\qquad$ $u_n = u_1 + (n+1)r$

4. Utiliser la formule choisie pour déterminer le montant de la dernière mensualité, soit u_{24}.

$u_{24} = 20 + (24 - 1) \times (-0{,}60) = 6{,}2$.

Le montant de la dernière mensualité est 6,20 €.

5. Combien coûte au total ce contrat d'assistance ? On pourra utiliser la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique : $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

$S_{24} = \dfrac{24(u_1 + u_{24})}{2} = \dfrac{24(20 + 6{,}2)}{2} = 314{,}4$.

Ce contrat d'assistance coûte au total 314,40 €.

Comment appliquer, pour une suite arithmétique, les formules donnant u_n en fonction du premier terme et de la raison de la suite ?

Une suite arithmétique (u_n) a pour premier terme $u_0 = 2$ et pour raison $-0{,}1$. Calculer u_{100}.

- Identifier les éléments connus : u_0 et la raison r.
- Identifier l'élément inconnu : u_{100}
- Choisir la formule qui convient : ☒ $u_n = u_0 + nr$ ❐ $u_n = u_1 + (n-1)r$
- Remplacer dans la formule choisie les éléments connus par leur valeur, puis calculer l'élément inconnu.

$u_{100} = u_0 + 100 \times r$ soit $u_{100} = 2 + 100 \times (-0{,}1)$

donc $u_{100} = -8$.

RÉPONSES

Exercices

1 On choisit la formule $u_n = u_0 + nr$ soit $u_{12} = 2{,}1 + 12 \times (-3{,}2)$ donc $u_{12} = -36{,}3$.

2 On choisit la formule $v_n = v_1 + (n-1)\,r$ soit $v_{20} = -150 + (20-1) \times 2{,}6$ donc $v_{20} = -100{,}6$.

8 Suites géométriques

Capacités
- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique
- Appliquer les formules donnant le terme de rang n en fonction du premier terme et de la raison de la suite

(Livre élève pages 35 et 36)

1 Utiliser une nouvelle formule pour les suites géométriques

À quand la fête ?

Quatre anciens élèves d'un lycée professionnel veulent retrouver leurs camarades et décident de créer une association d'anciens élèves. Pour cela, ils partent du principe suivant : « Tous les ans, chaque adhérent doit recruter un ancien élève. » Ainsi, chaque année le nombre d'adhérents doublera.

1. Si les adhérents suivent ce principe, déterminer le nombre d'adhérents la deuxième et troisième année.

Le nombre d'adhérents doublant chaque année par rapport à la précédente, il y aura 8 adhérents la deuxième année et 16 adhérents la troisième.

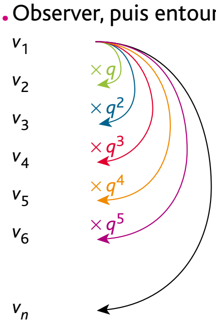
On définit la suite (v_n) dont le premier terme v_1 est 4 et v_n le nombre d'adhérents la n-ième année.

2. La suite (v_n) est géométrique. Donner la raison q et les valeurs de v_2 et v_3.

La raison de la suite est $q = 2$ puisque l'on double le nombre d'adhérents.

$v_2 = 8$ et $v_3 = 16$.

3. Observer, puis entourer l'expression de v_n qui semble correcte.



$v_n = v_1 \times q^{n-1}$
$v_n = v_1 \times q^{n}$
$v_n = v_1 \times q^{n+1}$

L'exposant dépendra du premier terme u_0 ou u_1 et du rang considéré.

4. L'association projette d'organiser un gala lorsque le seuil de 200 adhérents sera atteint. Pourra-t-elle organiser ce gala la sixième année ? Vérifier la réponse en calculant v_6 à l'aide de la formule choisie précédemment.

Il y aura 32 adhérents la quatrième année, 64 la cinquième et 128 la sixième année. L'association ne pourra pas organiser le gala la sixième année.

Vérification : $v_6 = 4 \times 2^5 = 128$.

Pour une suite géométrique, la formule donnant le terme de rang n, en fonction du premier terme u_1 et de la raison q est : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

2 Résoudre un problème concret en utilisant les suites numériques

Le recyclage des bouteilles en plastique permet d'obtenir de nouvelles fibres en polyester pour fabriquer des vêtements en fibre polaire. Pour confectionner une veste polaire, il faut 27 bouteilles en plastique. En janvier 2011, une entreprise fabrique 4 000 vestes polaires. Pendant l'année 2011, elle souhaite augmenter la production, chaque mois, de 5 % par rapport au mois précédent.
On appelle u_1 la production du mois de janvier.

1. Calculer u_2, la production du 2^e mois et u_3 la production du 3^e mois.

$4\,000 \times \frac{5}{100} = 200$ donc $u_2 = 4\,000 + 200 = 4\,200$.

$4\,200 \times \frac{5}{100} = 210$ donc $u_3 = 4\,200 + 210 = 4\,410$.

2. Montrer que les termes u_1, u_2 et u_3 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique (u_n) dont on précisera la raison.

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4\,200}{4\,000} = 1{,}05$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{4\,410}{4\,200} = 1{,}05$.

u_1, u_2 et u_3 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,05.

3. À l'aide des fonctionnalités d'un tableur, recopier et compléter la feuille de calculs ci-contre.

Mois	n	u_n
janvier	1	4000
février	2	4 200
mars	3	4 410
avril	4	4 630,5
mai	5	4 862,025
juin	6	5105,126
juillet	7	5360,383
août	8	5628,402
septembre	9	5909,822
octobre	10	6205,313
novembre	11	6515,579
décembre	12	6841,357

4. Calculer la production totale de vestes polaires sur l'année 2011. En déduire le nombre de bouteilles recyclées nécessaires pour leur fabrication.

En ajoutant $u_1 + u_2 + \ldots + u_{12}$ on trouve un total de 63 669 vestes polaires.

1 719 063 bouteilles seront nécessaires.

5. Le terme général de la suite (u_n) est $u_n = 4\,000 \times 1{,}05^{n-1}$, calculer la production le 36^e mois. L'objectif de production de 22 000 vestes polaires par mois, en moins de 3 ans, est-il atteint ?

$u_{36} = 4\,000 \times 1{,}05^{35} \approx 22\,064{,}06$

L'objectif de 22 000 vestes en moins de 3 ans sera donc atteint.

Comment utiliser, pour une suite géométrique, les formules donnant u_n en fonction du premier terme et de la raison de la suite ?

Une suite géométrique (u_n) a pour premier terme $u_0 = -20\,000$ et pour raison 0,6. Calculer u_{20}.

- Identifier les éléments connus. u_0 et la raison q.
- Identifier l'élément inconnu. u_{20}
- Choisir la formule qui convient : ☒ $u_n = u_0 \times q^n$ ☐ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- Remplacer dans la formule choisie les éléments connus par leur valeur, puis calculer l'élément inconnu.

$u_{20} = u_0 \times q^{20} = -20\,000 \times 0{,}6^{20}$

$u_{20} \approx -0{,}731$

RÉPONSES
Exercices

1 On choisit la formule $u_n = u_0 \times q^n$ soit $u_{13} = -12 \times 2^{13}$ donc $u_{13} = -98\,304$.
2 On choisit la formule $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ soit $v_8 = 3\,100 \times 0{,}25^7$ donc $v_8 \approx 0{,}1892$.

(Livre élève pages 37 et 38)

9 J'utilise un logiciel (tableur)

Comparer des formules

Producteur de microprocesseurs

Pour suivre l'évolution du marché, une entreprise fabriquant du matériel informatique doit augmenter le nombre de microprocesseurs qu'elle produit, de façon à obtenir le plus rapidement l'objectif de 10 000 pièces par jour.
On considère qu'initialement, elle produit 6 500 pièces chaque jour. Deux plans de production sont étudiés :
- **plan 1 : augmenter chaque jour la production de 300 unités par rapport au jour précédent ;**
- **plan 2 : augmenter chaque jour la production de 3 % par rapport à la veille.**

On note P_n la production de microprocesseurs le n-ième jour dans le plan 1,
$P_n = P_{n-1} + 300$ et $P_0 = 6\,500$.
On note P'_n la production de microprocesseurs le n-ième jour dans le plan 2,
$P'_n = P'_{n-1} \times 1{,}03$ et $P'_0 = 6\,500$.

	A	B	C	D	E
1		Plan 1		Plan 2	
2	rang n	Pn calculé mois après mois	Pn calculé directement	P'n calculé mois après mois	P'n calculé directement
3	0	6500		6500	
4	1				
5	2				

1. Sur tableur, préparer la feuille de calcul ci-contre en prolongeant jusqu'à $n = 50$.

	A	B	C	D	E
1		Plan 1		Plan 2	
2	rang n	Pn calculé mois après mois	Pn calculé directement	P'n calculé mois après mois	P'n calculé directement
3	0	6500	6500	6500,00	6500,00
4	1	6800	6800	6695,00	6695,00
5	2	7100	7100	6895,85	6895,85
6	3	7400	7400	7102,73	7102,73
7	4	7700	7700	7315,81	7315,81
8	5	8000	8000	7535,28	7535,28
9	6	8300	8300	7761,34	7761,34
10	7	8600	8600	7994,18	7994,18
11	8	8900	8900	8234,01	8234,01
12	9	9200	9200	8481,03	8481,03
13	10	9500	9500	8735,46	8735,46
14	11	9800	9800	8997,52	8997,52
15	12	10100	10100	9267,45	9267,45
16	13	10400	10400	9545,47	9545,47
17	14	10700	10700	9831,83	9831,83
18	15	11000	11000	10126,79	10126,79
19	16	11300	11300	10430,59	10430,59
20	17	11600	11600	10743,51	10743,51
21	18	11900	11900	11065,81	11065,81
22	19	12200	12200	11397,79	11397,79
23	20	12500	12500	11739,72	11739,72

2. En B4, entrer la formule =B3+300 et recopier vers le bas la formule jusqu'en B53 puis, en D4, entrer la formule =D3*1,03 et recopier vers le bas la formule jusqu'en D53.

3. Parmi les formules suivantes, entourer celle qui permet par recopie de calculer P_n en fonction de n. L'écrire dans la cellule C3.

=B3+A3*300 =$B$3+A3*300 =B+$A$3*300

Quel est le rôle du symbole $ dans cette formule ?

Ce symbole permet de fixer la référence de la cellule B3.

Recopier la formule jusqu'en C53, puis comparer les colonnes B et C.

Les colonnes B et C affichent les mêmes résultats, les deux modes de calculs sont équivalents.

4. Entrer en E3 une formule, calculant P'_n directement en fonction de n, que l'on puisse recopier jusqu'en E53. Comparer les résultats des colonnes D et E.

La formule à écrire en E3 est =$D$3*1,03^A3.

Les colonnes D et E affichent les mêmes nombres, les deux modes de calculs se valent.

A

Présentez au professeur votre feuille de calculs et justifiez oralement la formule de calcul direct de la cellule E3.

5. Au bout de combien de jours, pour chaque plan, l'objectif est-il atteint ? Quel plan de production l'entreprise va-t-elle choisir ? Pour le plan 1, les 10 000 pièces par jour seront atteintes le 12e jour.

Pour le plan 2, ce sera le 15e jour. L'entreprise choisira le plan 1.

J'utilise un logiciel (tableur)

Choisir le bon crédit

Coût total d'un crédit

Vous devez emprunter 2 500 € pour un achat. Le vendeur vous propose de choisir entre deux formules de crédit sur 12 mois.

Proposition 1 : la première mensualité est de 400 €, et chaque mois les mensualités suivantes diminuent de 30 € par rapport au mois précédent.

Proposition 2 : la première mensualité est de 400 € et chaque mois, les mensualités suivantes diminuent de 10 % par rapport au mois précédent.

	A	B	C
1		Proposition 1	Proposition 2
2	1ère mensualité	400	400
3	2ème mensualité		
4	3ème mensualité		
5	4ème mensualité		
6	5ème mensualité		
7	6ème mensualité		
8	7ème mensualité		
9	8ème mensualité		
10	9ème mensualité		
11	10ème mensualité		
12	11ème mensualité		
13	12ème mensualité		
14	TOTAL		

1. Générer les suites

- Ouvrir un logiciel tableur et recopier le tableau ci-contre.
- Quelle formule, à écrire dans la cellule B3 permettra, par recopie, d'obtenir les mensualités de la proposition 1 ?

  =B2-30

- Quelle formule, à écrire dans la cellule C3 permettra, par recopie, d'obtenir les mensualités de la proposition 2 ?

  =C2*0,9

- Écrire ces deux formules dans les cellules B3 et C3 et recopier pour obtenir toutes les mensualités.
- La suite de nombres formée par les mensualités de la proposition 1 est-elle arithmétique ou géométrique ? Même question pour la proposition 2.

  Pour la proposition 1, les mensualités forment une suite arithmétique de raison – 30.

  Pour la proposition 2, les mensualités forment une suite géométrique de raison 0,9.

2. Comparer l'évolution des mensualités

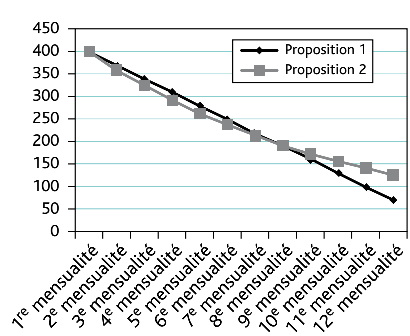
- Faire une phrase pour comparer l'évolution des mensualités des deux propositions.

  Dans les deux cas, le montant des mensualités diminue, les deux suites de nombres sont décroissantes.

  Les premiers mois, la proposition 2 diminue plus vite que la 1, ensuite c'est l'inverse.

- Utiliser les fonctionnalités du tableur pour proposer une représentation graphique qui permette d'illustrer et de comparer l'évolution des mensualités.

	Proposition 1	Proposition 2
1ère mensualité	400	400,00
2ème mensualité	370	360,00
3ème mensualité	340	324,00
4ème mensualité	310	291,60
5ème mensualité	280	262,44
6ème mensualité	250	236,20
7ème mensualité	220	212,58
8ème mensualité	190	191,32
9ème mensualité	160	172,19
10ème mensualité	130	154,97
11ème mensualité	100	139,47
12ème mensualité	70	125,52
TOTAL	2820	2870,28



3. Comparer le coût total du crédit

- Pour obtenir le montant total des 12 mensualités avec chaque proposition, utiliser la fonction « somme » du tableur.
- Comparer le coût total des deux propositions. Laquelle avez-vous intérêt à choisir ?

En faisant le total des mensualités, on se rend compte que la proposition 1 revient moins cher que la proposition 2

même si les premières mensualités sont plus élevées.

A

Présentez au professeur votre étude et justifiez oralement votre choix.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 41 et 42

1. QCM

a. u_3 **b.** u_4 **c.** géométrique **d.** $u_n = 2 \times 3^n$

e. 486 **f.** arithmétique **g.** $v_n = -5 + 4(n - 1)$

h. 31

› Déterminer la nature d'une suite et sa raison

2. a. C'est une suite arithmétique de raison $r = 1{,}1$.

b. Le sixième terme est 15,6.

c. $u_n = 10{,}1 + (n - 1) \times 1{,}1$.

3. a. Cette suite est géométrique car les rapports $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ sont égaux.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{16}{64} = 0{,}25$; $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4}{16} = 0{,}25$; $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$;

$\dfrac{u_4}{u_3} = \dfrac{0{,}25}{1} = 0{,}25$

b. La raison est 0,25.

c. $u_n = 64 \times 0{,}25^n$

d. Le 10^{e} terme de la suite est u_9.
$u_9 = 64 \times 0{,}25^9 \approx 2{,}44.10^{-4}$

4. Par lecture graphique, on trouve $u_1 = -\,0{,}5$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3{,}5$, $u_4 = 7$ et $u_5 = 11{,}5$
$u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$, la suite n'est pas arithmétique.
$\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$ la suite n'est pas géométrique. La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

5. a. suite arithmétique ; $u_1 = 0{,}75$; $r = 2$.

b. suite géométrique ; $u_1 = 0{,}1$; $q = 10$.

c. suite arithmétique ; $u_1 = -\,7{,}7$; $r = 0{,}3$.

d. suite arithmétique ; $u_1 = 1{,}75$; $r = -\,3$.

e. suite géométrique ; $u_1 = -\,12$; $q = 2{,}3$.

6. Suite n° 1
$u_1 = 100$; $r = -\,10$; $u_n = 100 - 10(n - \mathbf{1})$.
Suite n° 2
$u_1 = -\,15$; $r = 20$; $u_n = -\,15 + 20(n - \mathbf{1})$.

› Calculer les termes d'une suite

7. u_{62} est le 63^{e} terme de la suite (u_n).
$u_{62} = 13 + 62 \times (-\,1{,}4) = -\,73{,}8$

8. v_{20} est le 20^{e} terme de la suite (v_n).
$v_{20} = 0{,}000\ 15 \times 4^{19}$
$v_{20} \approx 41\ 231\ 686{,}04$

9. a. Cette suite est géométrique.

b. $q = 2{,}1$ et $u_1 = 0{,}7$.

c. $u_{21} = 0{,}7 \times 2{,}1^{20}$
$u_{21} \approx 1\ 947\ 529$

10. a. Cette suite est arithmétique.

b. $r = 4$ et $v_0 = -\,1$

c. $v_{1\,000} = 4 \times 1\ 000 - 1 = 3\ 999$

Problèmes p. 42 à 44

› Problème 1

Logo d'une entreprise

1. Il s'agit d'une suite géométrique car on passe d'un terme au terme suivant en multipliant par un même nombre. La raison de la suite (l_n) est $\dfrac{\sqrt{43}}{8}$.

2. La longueur du dixième côté est l_{10} ;
Avec le tableur, on trouve $l_{10} \approx 1{,}33$

	A	B
1	rang	l_n
2	1	8
3	2	6,55744
4	3	5,37500
5	4	4,40578
6	5	3,61133
7	6	2,96013
8	7	2,42636
9	8	1,98884
10	9	1,63021
11	10	1,33625

3. Avec la formule :
$l_{10} = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{43}}{8}\right)^9 \approx 1{,}33$

› Problème 2

Augmentation de capital

1. $u_1 = 51\ 625$ et $u_2 = 53\ 302{,}812\ 5$

2. La suite (u_n) est géométrique.

3. La raison de la suite est 1,032 5.

4. $u_{10} = 50\ 000 \times 1{,}0325^{10}$
$u_{10} \approx 68\ 844{,}72$

La valeur acquise, au bout de 10 ans, en plaçant le capital sur ce compte est 68 844,72 euros.

› Problème 3

Régime amaigrissant

1. $u_{30} = 3\,000 + 29 \times (-20)$
$u_{30} = 2\,420$
$v_{30} = 3\,000 \times 0{,}99^{29}$
$v_{30} \approx 2\,241{,}51$
Ni Alex, ni Medhi n'aura atteint l'objectif de 1 800 kcal le 30ᵉ jour.

2. En utilisant la calculatrice ou le tableur, on trouve qu'Alex atteindra 1 800 kcal le 61ᵉ jour et Medhi le 52ᵉ. C'est donc Medhi qui atteint l'objectif en premier.

Expérimenter à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice

› Problème 4

Jouer sans risque

La mise de départ de 0,15 € double à chaque partie, on peut donc considérer une suite géométrique de premier terme 0,15 et de raison 2. Avec un tableur, on obtient le tableau suivant :

	A	B
1	Partie	Mise en euros
2	1	0,15
3	2	0,3
4	3	0,6
5	4	1,2
6	5	2,4
7	6	4,8
8	7	9,6
9	8	19,2
10	9	38,4

Les joueurs peuvent jouer 8 parties de cartes sans dépasser la mise limite de 20 euros.

Les suites dans la vie courante et professionnelle

› Problème 5

Distance de freinage

1. La distance d'arrêt d'un véhicule est égale à la somme de la distance de freinage et de la distance de réaction.
• Pour un temps de réaction de 0,1 s, sur route mouillée et à vitesse de 83,5 km/h, la distance d'arrêt sera :
$50 + 2{,}3 = 52{,}3$ soit $D_1 = 52{,}3$ m.
• Pour un temps de réaction de 0,2 s :
$50 + 2{,}3 \times 2 = 54{,}6$ soit $D_2 = 54{,}6$ m.
• Pour un temps de réaction de 0,3 s :
$50 + 2{,}3 \times 3 = 56{,}9$ soit $D_3 = 56{,}9$ m.

2. La suite étant arithmétique, la raison est 2,3.
$D_2 - D_1 = 54{,}6 - 52{,}3 = 2{,}3$.

3. $D_n = D_1 + (n-1) \times 2{,}3$
donc $D_n = 52{,}3 + (n-1) \times 2{,}3$.

4. $D_{10} = 52{,}3 + 9 \times 2{,}3 = 73$.
La distance d'arrêt pour un temps de réaction d'une seconde est donc 73 m.

5. Pour trouver le temps de réaction correspondant à une distance d'arrêt de 200 m, on résout l'équation :
$200 = 52{,}3 + (n-1) \times 2{,}3$.
On trouve $n \approx 65{,}22$.
On en déduit qu'il ne faut pas dépasser un temps de réaction de 6,5 s si on veut s'arrêter en moins de 200 m.

› Problème 6

Construction

1. $u_2 = 19{,}4$; $u_3 = 18{,}818$; $u_4 = 18{,}253\,46$.

2. La suite (u_n) est géométrique car les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sont égaux.
$\frac{u_2}{u_1} = \frac{19{,}4}{20} = 0{,}97$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{18{,}818}{19{,}4} = 0{,}97$;
$\frac{u_4}{u_3} = \frac{18{,}253\,46}{18{,}818} = 0{,}97$
La raison est 0,97.

3. $u_n = 20 \times 0{,}97^{n-1}$.
$u_{18} = 20 \times 0{,}97^{17} \approx 11{,}917$.

4. $Q = 20 \times \frac{1 - 0{,}97^{18}}{1 - 0{,}97} \approx 281{,}37$.
La quantité totale de terre extraite pendant les 18 jours de chantier est d'environ 281 m³.

› Problème 7

Réalisation d'un toit en ardoises

1. La raison de la suite (u_n) est – 7 car :
$u_2 - u_1 = 143 - 150 = -7$
$u_3 = 143 + (-7) = 136$
$u_4 = 136 + (-7) = 129$.

2. Le nombre d'ardoises sur la 20ᵉ rangée correspond à u_{20}.
$u_{20} = 150 + 19 \times (-7) = 17$.

3. Le nombre total d'ardoises pour la réalisation du toit se calcule avec la formule :
$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ soit $S_{20} = \frac{20}{2}(150 + 17) = 1\,670$
Il faudra 1 670 ardoises pour réaliser le toit.

› Problème 8
Choix d'un contrat

1. La formule à écrire dans la cellule B3 est =B2+3,25.

2. La formule à écrire dans la cellule E3 est =E2*1,02.

3. Voir le tableau ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	Année	Entreprise CHAUFECO versements annuels	Entreprise CHAUFECO Cumul des versements		Entreprise CHAUFMAX versements annuels	Entreprise CHAUFMAX Cumul des versements
2	2011	150,00 €	150,00 €		150	150,00 €
3	2012	153,25 €	303,25 €		153,00 €	303,00 €
4	2013	156,50 €	459,75 €		156,06 €	459,06 €
5	2014	159,75 €	619,50 €		159,18 €	618,24 €
6	2015	163,00 €	782,50 €		162,36 €	780,61 €
7	2016	166,25 €	948,75 €		165,61 €	946,22 €
8	2017	169,50 €	1 118,25 €		168,92 €	1 115,14 €
9	2018	172,75 €	1 291,00 €		172,30 €	1 287,45 €
10	2019	176,00 €	1 467,00 €		175,75 €	1 463,19 €
11	2020	179,25 €	1 646,25 €		179,26 €	1 642,46 €

4. Les montants inscrits dans les cellules C11 et F11 correspondent au total des versements obtenus pour chaque contrat.

5. Le contrat le plus intéressant est le contrat Chaufmax (même si l'écart entre les deux contrats n'est pas très important).

› Problème 9

1. Si la valeur de la voiture diminue de 20 % chaque année par rapport à l'année précédente, cela revient à multiplier par 0,80 la valeur de la voiture pour connaître sa valeur de revente l'année suivante. La suite (V_n) est donc une suite géométrique de raison 0,80.

2. $V_5 = V_0 \times q^5$
$V_5 = 14\,000 \times 0{,}80^5$
$V_5 = 4\,587{,}52$ €.

3. a. Si le prix des voitures augmente de 2 % chaque année entre 2010 et 2015 alors, une voiture valant 14 000 € en 2010 vaudra environ 15 460 € en 2015 car :
$14\,000 \times 1{,}02^5 \approx 15\,457{,}13$ soit environ 15 460 €.

b. Romain devra donc dépenser environ 10 860 € pour remplacer sa voiture en 2015 car :
$15\,460 - 4\,600 = 10\,860$.

Je me teste

(Livre élève pages 45 et 46)

EXERCICE 1

Deux villes A et B ont décidé de lancer un programme de construction de logements sociaux neufs. En 2009, il y avait 3 460 logements sociaux dans la ville A et 2 740 dans la ville B. Le projet de la ville A consiste en la construction, à partir de 2010, de 160 logements sociaux supplémentaires chaque année. Celui de la ville B consiste à augmenter à partir de 2010 le nombre de logements sociaux de 7 % chaque année.

1 On note a_n le nombre de logements sociaux dans la ville A au cours de l'année 2009 + n. On donne $a_0 = 3\,460$.

a. Donner l'expression du terme a_n en fonction de n et préciser la nature de la suite (a_n).

Chaque année, on ajoute 160 logements, il s'agit donc d'une suite arithmétique de raison 160 et $a_n = a_0 + n \times r$

donc $a_n = 3\,460 + 160n$.

b. En 2019, le nombre de logements de la ville A aura-t-il doublé ?

En 2019, il y aura 5 060 logements donc le nombre de logements n'aura pas doublé.

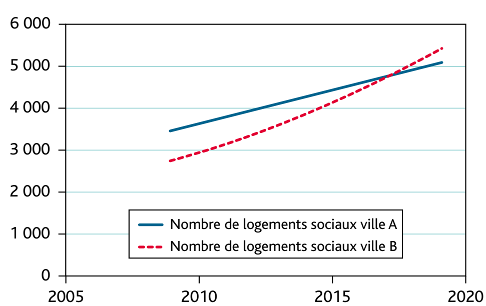
2 On considère la suite (b_n) dont les termes représentent le nombre de logements sociaux dans la ville B. L'expression du terme de rang n est : $b_n = 2\,740 \times (1{,}07)^n$ et $b_0 = 2\,740$.

Donner la nature de la suite (b_n) et préciser sa raison.

La suite (b_n) est une suite géométrique de raison 1,07 car chaque année, le nombre de logements augmente de 7 %.

3 Pour comparer les deux projets, on utilise la feuille de calcul d'un tableur.

a. Reproduire la feuille de calcul ci-contre dans votre logiciel et, à l'aide des fonctionnalités, calculer les nombres de logements sociaux jusqu'en 2019.



	A	B	C	D
1	Année	Rang de l'année	Nombre de logements sociaux ville A	Nombre de logements sociaux ville B
2	2009	0	3 460	2740
3	2010	1	3 620	2931,8
4	2011	2	3 780	3137,026
5	2012	3	3 940	3356,61782
6	2013	4	4 100	3591,58107
7	2014	5	4 260	3842,99174
8	2015	6	4 420	4112,00116
9	2016	7	4 580	4399,84125
10	2017	8	4 740	4707,83013
11	2018	9	4 900	5037,37824
12	2019	10	5 060	5389,99472
13–15	total des logements sociaux construits entre 2010 et 2019		1600	2649,99472

b. Comparer l'évolution du nombre de logements sociaux pour les deux villes entre 2010 et 2019.

Le nombre de logements sociaux augmente plus vite avec la ville B qu'avec la ville A. À partir de 2018, il y a davantage de logements sociaux dans la ville B.

c. Quelle est celle des deux villes qui aura construit sur cette période le plus grand nombre de logements sociaux ?

C'est la ville B qui aura construit le plus de logements (≈ 2 650 pour la ville B contre 1 600 pour la ville A).

A

Appelez le professeur pour présenter oralement la réponse c.

EXERCICE 2

Partie A Performances mécaniques

Avant de mettre sur le marché un nouveau modèle de treuils électriques, une entreprise procède à des essais de levage.

À chaque essai, on ajoute une charge de 500 N à la charge précédente. La fréquence de rotation du moteur, à vide (sans aucune charge) est 5 000 tr/min.

Essai n°	0	1	2	3
Charge *F* (en newtons)	0	500	1 000	1 500
Fréquence de rotation *N* du moteur (en tr/min)	5 000	4 800	4 608	4 423,68

On désigne par N_n la fréquence de rotation du moteur au n-ième essai. Le premier terme de la suite est $N_0 = 5\,000$.

1 À l'aide des valeurs du tableau, dire si la suite (N_n) est arithmétique ou géométrique et donner sa raison.

$\frac{N_1}{N_0} = \frac{4\,800}{5\,000} = 0{,}96$; $\frac{N_2}{N_1} = \frac{4\,608}{4\,800} = 0{,}96$; $\frac{N_3}{N_2} = \frac{4\,423{,}68}{4\,608} = 0{,}96$. On constate que les rapports $\frac{N_{n+1}}{N_n}$ sont égaux,

la suite est géométrique, de raison 0,96.

2 Exprimer N_n en fonction de n.

$N_n = N_0 \times q^n$ soit $N_n = 5\,000 \times 0{,}96^n$.

3 Calculer la fréquence de rotation obtenue à l'essai n° 8, pour une charge de 4 000 N.

$N_8 = 5\,000 \times 0{,}96^8 \Rightarrow N_8 \approx 3\,606{,}95$.

4 En utilisant une calculatrice graphique ou un tableur, déterminer la charge maximale que peut soulever ce treuil sans que la fréquence de rotation du moteur soit inférieure à 50 % de sa valeur à vide, N_0.

Le treuil peut soulever au maximum 8 000 N sans descendre sous 2 500 tr/min. (Voir extrait du tableau obtenu avec un tableur, page 42.)

5 Ce treuil doit permettre de soulever des charges de 15 000 N sans que la fréquence de rotation soit inférieure à 40 % de la valeur à vide. Les essais effectués sont-ils concluants ?

Les essais ne sont pas concluants car pour une charge de 15 000 N, la fréquence est 1 469 tr/min. (Voir tableau page 42.)

Essai n°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Charge F en newtons	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
Fréquence de rotation N du moteur en tr/min	5 000	4800	4608	4423,68	4246,7328	4076,86349	3913,78895	3757,23739	3606,94789	3462,66998	3324,16318

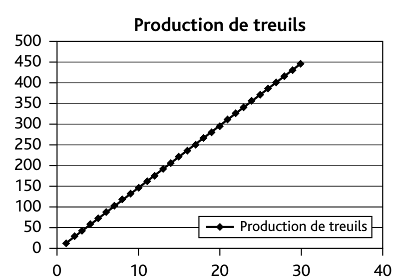
Essai n°	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Charge F en newtons	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500
Fréquence de rotation N du moteur en tr/min	3191,19665	3063,54879	2941,00684	2823,36656	2710,4319	2602,01462	2497,93404	2398,01668	2302,09601	2210,01217	2121,61168

Essai n°	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Charge F en newtons	11000	11500	12000	12500	13000	13500	14000	14500	15000
Fréquence de rotation N du moteur en tr/min	2036,74722	1955,27733	1877,06623	1801,98358	1729,90424	1660,70807	1594,27975	1530,50856	1469,28822

Partie B Mise sur le marché

L'entreprise fabriquant les treuils fait également une étude de marché. Elle estime qu'il faudrait atteindre 1 000 pièces fabriquées le 30e jour.
La production sera de 10 treuils le premier jour puis 15 treuils supplémentaires seront produits chaque jour par rapport au jour précédent.
On désigne par P_n le nombre de treuils produits le n-ième jour. Le premier terme de la suite est $P_1 = 10$.

1 En utilisant une calculatrice graphique ou un tableur, proposer un graphique montrant l'évolution de la production jusqu'au 30e jour.



2 L'objectif de 1 000 pièces fabriquées le 30e jour sera-t-il atteint ?

L'objectif ne sera pas atteint car la production le 30e jour sera de 445 treuils ce qui est nettement inférieur aux 1 000 pièces souhaitées.

A

Appelez le professeur pour présenter votre argumentation.

10 Section d'un solide par un plan

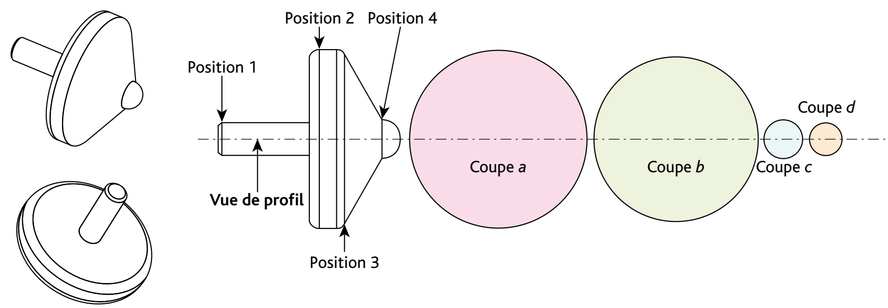
(Livre élève pages 47 et 48)

Capacités
- Représenter avec ou sans TIC, la section d'un solide usuel par un plan
- Identifier un solide usuel dans un objet donné, à partir d'une représentation géométrique de ce dernier
- Isoler une figure plane extraite d'un solide à partir d'une représentation

1 Étudier les sections d'un solide par un plan

Fabrication de toupie

Des techniciens d'usinage doivent fabriquer la toupie dessinée ci-dessous.



1. En observant les différentes vues, donner le nom des solides qui constituent la toupie.

La toupie est constituée d'une demi-sphère, de cylindres et de troncs de cônes.

2. On donne 4 coupes *a*, *b*, *c* et *d* obtenues par section de la toupie par des plans verticaux.
Associer chaque coupe à la position du plan vertical qui a permis d'obtenir cette section.

Position 1 •	• Coupe *a*
Position 2 •	• Coupe *b*
Position 3 •	• Coupe *c*
Position 4 •	• Coupe *d*

On appelle **section** d'un solide par un plan la surface suivant laquelle le plan coupe le solide. Les sections peuvent avoir la forme de figures usuelles (triangles, carrés, rectangles, disques...).

2 Représenter la section d'un solide par un plan

Un tétraèdre régulier est une pyramide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

Étude d'une pyramide

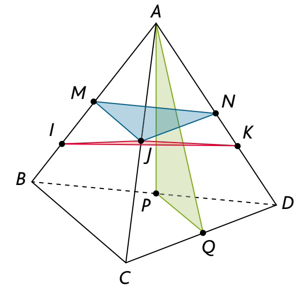
ABCD est un tétraèdre régulier. Les points *I*, *J* et *K* sont situés respectivement sur les segments [*AB*], [*AC*] et [*AD*] de telle façon que $BI = \frac{1}{4}BA$, $CJ = \frac{1}{2}CA$ et $DK = \frac{1}{3}DA$.

1. Placer, sur le dessin en perspective cavalière de la page suivante, les points *I*, *J* et *K*.

2. Dessiner, en rouge, la section du tétraèdre par le plan (*IJK*). Donner la nature de la section.

La section du tétraède par le plan (*IJK*) est un triangle.

c. Placer, sur le même dessin, les points M et N qui sont respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AD]$. Dessiner, en bleu, la section du tétraèdre par le plan (JMN). Donner la nature de la section, justifier la réponse.



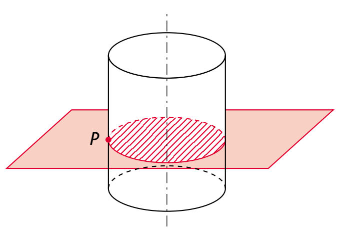
La section du tétraède avec le plan (JMN) est un triangle équilatéral. Le théorème des milieux appliqué aux faces ADC, ABC et ABD permet d'écrire : $(MN) // (BD)$; $(MJ) // (BC)$; $(JN) // (DC)$ et $MJ = \frac{1}{2}BC$; $JN = \frac{1}{2}CD$ et $MN = \frac{1}{2}BD$.
Or $BC = CD = BD$ d'où $MJ = JN = MN$.

d. Placer, sur le même dessin, les points P et Q qui sont respectivement les milieux des segments $[BD]$ et $[DC]$. Dessiner, en vert, la section du tétraèdre par le plan (APQ). Donner la nature de la section, justifier la réponse.

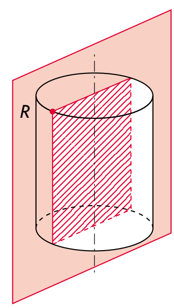
La section est un triangle isocèle car les segments $[AP]$ et $[AQ]$ sont les hauteurs issues de A dans les triangles équilatéraux ADB et ADC d'où $AP = AQ$.

e. Ouvrir le fichier « **04_tetraedre.g3w** ». Vérifier la nature des sections du tétraèdre par les plans (IJK), (JMN) et (APQ) en faisant tourner la figure.

Comment connaître la nature de la section d'un solide usuel par un plan ?



Section : disque



Section : rectangle

Tracer les plans suivants en respectant les indications :
– plan parallèle à la base passant par le point P ;
– plan parallèle à l'axe du cylindre passant par le point R.

- Tracer le contour de la section délimitée par l'extérieur du solide.
- Hachurer la zone située à l'intérieur de ce contour, la section du solide par le plan est ainsi visualisée.
- Identifier la nature de la section obtenue. Par exemple, en comptant le nombre de côtés, en exploitant les données de l'énoncé…

Exercices

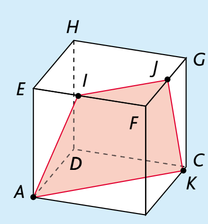
RÉPONSES

Pour chaque énoncé, cocher la bonne réponse.

1 La section d'un cube par un plan parallèle à une face est :
❒ un triangle ❒ un rectangle ☒ un carré

2 La section d'une sphère par un plan passant par son centre est :
❒ un cercle ☒ un disque ❒ un cylindre

3 La section ci-contre obtenue par la coupe d'un cube par un plan est :
❒ un quadrilatère quelconque ❒ un rectangle ☒ un trapèze



11 Vecteurs de l'espace

Capacité
- Calculer la norme d'un vecteur dans un repère orthonormal de l'espace

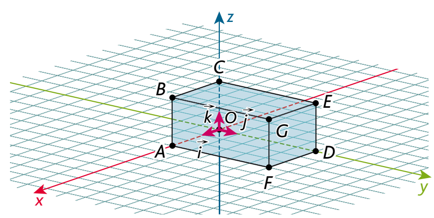
(Livre élève pages 49 et 50)

1 Se repérer dans l'espace

On considère trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ orthogonaux deux à deux et tels que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace.

Les **coordonnées** d'un point dans ce repère sont : son **abscisse *x***, son **ordonnée *y*** et sa **cote z**.



Les coordonnées du point O sont $(0\ ;0\ ;0)$ et celles du point $A(3\ ;0\ ;0)$.

1. Donner les coordonnées des 6 autres sommets du parallélépipède rectangle *ABCOFGED*.

$B(3\ ;0\ ;3)$ $C(0\ ;0\ ;3)$ $D(0\ ;5\ ;0)$ $E(0\ ;5\ ;3)$ $F(3\ ;5\ ;0)$ $G(3\ ;5\ ;3)$

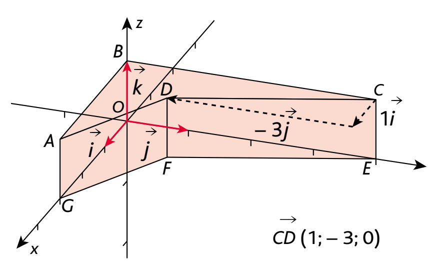
2. En observant la figure, déterminer les dimensions du parallélépipède, sachant que l'unité sur chaque axe est le centimètre.

Longueur : 5 cm ; largeur : 3 cm ; hauteur : 3 cm.

2 Se déplacer dans l'espace

Quel programme !

Pour usiner une pièce à l'aide d'une machine à commande numérique, il est nécessaire de connaître les coordonnées des points du profil et de spécifier les déplacements de l'outil de coupe (fraise), qui effectue le tour de la pièce en suivant le tracé *ABCDA*.
La pièce à usiner est le solide *ABCDGOEF* représenté ci-contre.
On considère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.



$\overrightarrow{CD}\ (1;-3;0)$

1. Coordonnées d'un point

Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G.

$A(3\ ;0\ ;1)$ $B(0\ ;0\ ;1)$ $C(0\ ;4\ ;1)$ $D(1\ ;1\ ;1)$ $E(0\ ;4\ ;0)$
$F(1\ ;1\ ;0)$ $G(3\ ;0\ ;0)$

2. Coordonnées d'un vecteur

Le déplacement de l'outil est indiqué à la machine sous forme d'un vecteur.

Le **vecteur** est donné par trois nombres x, y et z qui sont ses coordonnées et qui indiquent, pour chacune des trois directions correspondant aux axes, le déplacement à effectuer.

Par exemple, le déplacement du point C au point D correspond au vecteur $\overrightarrow{CD}$ de coordonnées $(1\,;-3\,;0)$.

a. Déterminer, en utilisant la figure, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AG}$ puis, les comparer.

$\overrightarrow{BO}(0\,;0\,;-1)$; $\overrightarrow{CE}(0\,;0\,;-1)$; $\overrightarrow{DF}(0\,;0\,;-1)$ et $\overrightarrow{AG}(0\,;0\,;-1)$.

Ces vecteurs ont des coordonnées identiques, ils sont donc égaux.

b. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ peuvent se calculer à partir des coordonnées des points C et D : $(x_D - x_C\,; y_D - y_C\,; z_D - z_C)$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$. Vérifier que les résultats sont en accord avec les informations données précédemment.

$\overrightarrow{CD}(1-0\,;1-4\,;1-1)$ d'où $\overrightarrow{CD}(1\,;-3\,;0)$ ce qui correspond aux données précédentes.

c. En utilisant la même méthode, calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DA}$.

$\overrightarrow{AB}(0-3\,;0-0\,;1-1)$; $\overrightarrow{AB}(-3\,;0\,;0)$; $\overrightarrow{BC}(0-0\,;4-0\,;1-1)$ d'où $\overrightarrow{BC}(0\,;4\,;0)$;

$\overrightarrow{DA}(3-1\,;0-1\,;1-1)$ d'où $\overrightarrow{DA}(2\,;-1\,;0)$.

3 Norme d'un vecteur

La longueur du déplacement de C vers D, c'est-à-dire la distance CD peut être connue en calculant la norme du vecteur $\overrightarrow{CD}$. Cette norme se note $\|\overrightarrow{CD}\|$ et se calcule de la façon suivante en utilisant les coordonnées du vecteur : $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{1^2+(-3)^2+0^2} = \sqrt{10}$, donc $CD \approx 3{,}16$.

1. Calculer, avec la même méthode, les distances AB, BC et DA.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+0^2} = \sqrt{9} = 3$; $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{0^2+4^2+0^2} = \sqrt{4^2} = 4$;

$\|\overrightarrow{DA}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{5}$ d'où $DA \approx 2{,}24$.

2. Quelle est la distance parcourue par l'outil de coupe lorsqu'il tourne une fois autour de la pièce ?

La distance parcourue est $AB + BC + CD + DA = 3 + 4 + \sqrt{10} + \sqrt{5}$ soit environ 12,4.

Comment calculer la norme d'un vecteur de l'espace ?

Dans un repère orthonormal de l'espace noté $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points G et H ont pour coordonnées : $G(5\,;3\,;-1)$ et $H(-2\,;1\,;2)$. Calculer la distance GH.

- Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GH}$ en utilisant les coordonnées des deux points
  $\overrightarrow{GH}(x_H - x_G\,; y_H - y_G\,; z_H - z_G)$; $\overrightarrow{GH}((-2)-5\,;$ 1 $-$ 3 ; 2 $-$ (-1) $)$
  soit $\overrightarrow{GH}($ -7 ; -2 ; 3 $)$.
- Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{GH}$ en utilisant la formule : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ où x, y et z sont les coordonnées du vecteur. Ce qui donne :
  $\|\overrightarrow{GH}\| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{62}$.
- En déduire la distance GH qui est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{GH}$. $GH = \sqrt{62} \approx 7{,}87$.

RÉPONSES

Exercice

a. $\overrightarrow{AB}(-8\,;-4\,;2)$. $\overrightarrow{AC}(-2\,;-5\,;2)$. $\overrightarrow{BC}(6\,;-1\,;0)$.

b. $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-8)^2+(-4)^2+2^2} = \sqrt{84}$ d'où $AB \approx 9{,}17$.

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2+(-5)^2+2^2} = \sqrt{33}$ d'où $AC \approx 5{,}74$.

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{6^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{37}$ d'où $BC \approx 6{,}08$.

12

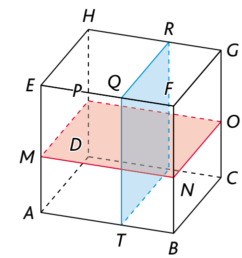
(Livre élève pages 51 et 52)

J'utilise un logiciel (Geoplan-Geospace)

Étudier la section d'un cube par des plans particuliers

Ouvrir le fichier « **04_cube1.g3w** ». *ABCDEFGH* est un cube.

Aide logiciel :
Les touches [1] et [2] du clavier numérique font tourner le cube sur lui-même.
La touche [3] fait revenir à la position d'origine du cube.
Les touches [4], [5] et [6] permettent de voir les sections de face.



a. Plans parallèles à une face du cube

- Déplacer le point *M*, avec la souris, le long du segment [*AE*].
- À quelles faces du cube, le plan (*MPO*) est-il parallèle ?

Le plan (*MPO*) est parallèle aux faces *HGFE* et *DCBA*.

- Quelle est la nature de la section du plan (*MPO*) avec le cube ?

La section est un carré.

- Déplacer le point *Q*, le long du segment [*EF*]. À quelles faces du cube le plan (*QRT*) est-il parallèle ?

Le plan (*QRT*) est parallèle aux faces *EHDA* et *FGCB*.

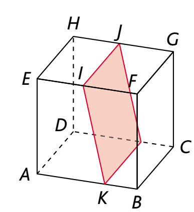
- Quelle est la nature de la section du plan (*QRT*) avec le cube ?

La section est un carré.

- À partir de ces deux exemples, conjecturer sur la nature de la section d'un cube par un plan parallèle à une face.

La section d'un cube par un plan parallèle à une face est un carré.

b. Plan parallèle à une arête du cube



- Ouvrir le fichier « **04_cube2.g3w** ». Déplacer le point *I*, le long du segment [*EF*].
- À quelles arêtes du cube, le segment [*IJ*] est-il parallèle ?

Le segment [*IJ*] est parallèle aux arêtes [*EH*], [*FG*], [*AD*] et [*BC*].

- Déplacer le point *K* dans l'espace. Quelle est la nature de la section du plan (*IJK*) avec le cube ?

La section du plan (*IJK*) avec le cube est un rectangle.

c. Plan coupant plusieurs faces

- Ouvrir le fichier « **04_cube3.g3w** ». Déplacer dans l'espace les points *M*, *N* et *L* pour trouver les cas où le plan (*LMN*) coupe 3 faces du cube, 4 faces, 5 faces, puis 6 faces du cube.
- Donner, dans chaque cas observé, la nature de la section obtenue. Compléter le tableau.

Nombre de faces coupées	3 faces	4 faces	5 faces	6 faces
Nature de la section	triangle	quadrilatère	pentagone	hexagone

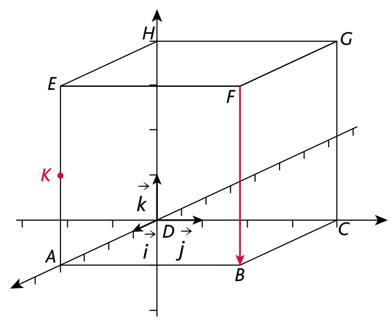
J'utilise un logiciel (Atelier 3D)

Opérations sur des vecteurs de l'espace

1. Observation de vecteurs

Ouvrir le fichier « **04_vecteurs1.g3d** ».

On considère dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel *ABCDEFGH* est un cube.



a. Citer des vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{FB}$.

$\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont égaux à $\overrightarrow{FB}$.

b. ▪ Créer le point milieu du segment [*AE*] en cliquant sur l'icône puis sur le segment [*AE*]. Nommer *K*, ce point en cliquant sur puis sur le point.

▪ Compléter les égalités suivantes avec le nombre qui convient :

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ $\quad$ $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

2. Opérations sur les vecteurs

Ouvrir le fichier « **04_vecteurs2.g3d** ».

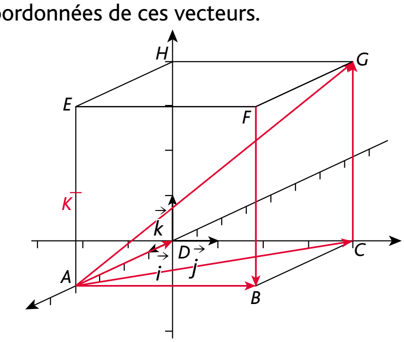
Les coordonnées de *A* sont (4 ; 0 ; 0), celles de *B* sont (4 ; 4 ; 0).

a. Donner les coordonnées des points *C*, *D* et *G*. Faire un clic droit sur le point pour afficher les coordonnées.

C(0 ; 4 ; 0) ; *D*(0 ; 0 ; 0) et *G*(0 ; 4 ; 4).

b. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AG}$ sur le dessin du cube en cliquant sur , puis en faisant glisser la souris d'une extrémité à l'autre du vecteur. Calculer les coordonnées de ces vecteurs.

$\overrightarrow{AB}(0 ; 4 ; 0)$; $\overrightarrow{AC}(-4 ; 4 ; 0)$; $\overrightarrow{AD}(-4 ; 0 ; 0)$; $\overrightarrow{CG}(0 ; 0 ; 4)$; $\overrightarrow{AG}(-4 ; 4 ; 4)$.



c. ▪ Représenter, en cliquant sur l'icône le vecteur somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Cliquer ensuite sur le point *A* pour que ce vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ait le point *A* comme origine.

▪ Procéder de même pour obtenir le vecteur somme $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$.

▪ Donner les coordonnées de ces deux vecteurs somme.

Que constate-t-on ? $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}(-4 ; 4 ; 0)$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}(-4 ; 4 ; 4)$;

ce sont les mêmes déplacements que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$.

▪ Compléter les égalités suivantes avec le vecteur qui convient :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

d. ▪ Créer le point *M* milieu du segment [*AG*]. Donner les coordonnées de ce point.

M(2 ; 2 ; 2)

▪ Représenter, en cliquant sur l'icône , les vecteurs $2\overrightarrow{AM}$ et $2\overrightarrow{BM}$.

▪ Compléter les égalités suivantes avec le vecteur qui convient :

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG}$ $\quad$ $2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BH}$

Exercices & Problèmes

Exercices p. 55 à 57

1. QCM

a. triangle.
b. disque.
c. rectangle.

› Identifier des solides usuels, représenter la section d'un solide usuel par un plan

2. Dans la première lanterne, on peut identifier des sphères, cylindres, parallélépipèdes rectangles et un tronc de cône. Dans la deuxième lanterne, on reconnaît des cylindres, troncs de cônes, parallélépipèdes rectangles et une sphère.

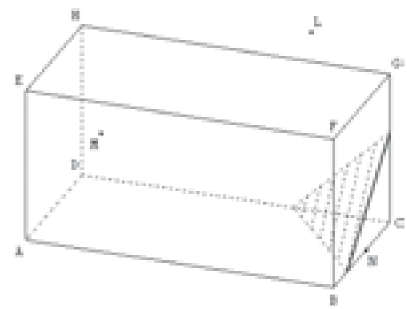
3. a. Dé à 4 faces : tétraèdre régulier.
Dé à 8 faces : octaèdre régulier.
Dé à 10 faces : décaèdre régulier.
Dé à 12 faces : dodécaèdre régulier.

b.
• Pour le dé à 4 faces :
– sur une des faces du cube, dessiner un triangle équilatéral qui définit trois des sommets du dé et la longueur de la base ;
– découper la résine autour du triangle, de façon à obtenir un prisme de la hauteur du dé ;
– calculer la hauteur et la position du quatrième sommet ;
– couper le prisme parallèlement à la base triangulaire, à la hauteur du quatrième sommet, dessiner la position du sommet sur cette section ;
– découper des pyramides dans le prisme selon un plan passant par le sommet et une des arêtes opposée ;
– adoucir les angles pour que le dé roule facilement.
• Pour le dé à 8 faces :
– sur une des faces du cube, tracer les diagonales, leur point d'intersection sera le premier sommet du dé ;
– déterminer la longueur du côté des triangles équilatéraux qui vont constituer le dé, en déduire la hauteur de celui-ci, rogner le dé en résine en conséquence ;
– découper des pyramides dans le prisme selon un plan passant par le sommet et une arête située au milieu de la face adjacente au sommet ;
– adoucir les angles pour que le dé roule facilement.
• Pour les dés à 10 et 12 faces, il faut utiliser des méthodes de découpage similaires. Les élèves peuvent également réfléchir en utilisant de la pâte à modeler ou de l'argile afin de procéder à des essais de découpages.

4. b. On peut obtenir des parallélépipèdes rectangles, des prismes et des pyramides.

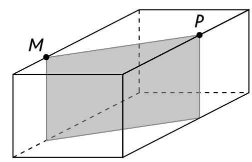
c. Les sections de coupe peuvent être des triangles, rectangles, trapèzes, pentagones…

d. La section obtenue est un triangle.

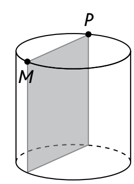


5. (a) triangle.
(b) triangle équilatéral car [*BE*], [*ED*] et [*BD*] étant des diagonales des faces du cube, elles ont la même longueur.
(c) hexagone.

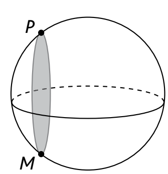
6. a. b. La section est :



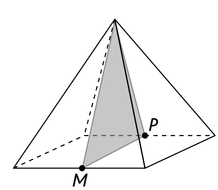
un rectangle



un rectangle

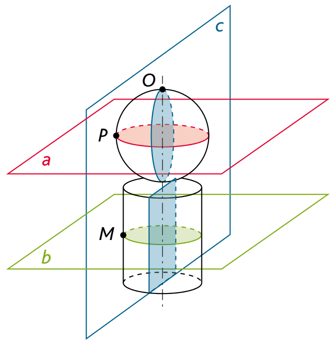


un disque



un triangle

7.



› Calculer les coordonnées et la norme d'un vecteur

8. a. $\overrightarrow{AB}(2\,;-1{,}5\,;-3)$
$\overrightarrow{AC}(3\,;-8{,}5\,;1)$
$\overrightarrow{BC}(1\,;-7\,;4)$

b. $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2+(-1{,}5)^2+(-3)^2} = \sqrt{15{,}25}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3^2+(-8{,}5)^2+1^2} = \sqrt{82{,}25}$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1^2+(-7)^2+4^2} = \sqrt{66}$

c. On regarde si la relation de Pythagore est vérifiée :
$AC^2 = 82{,}25$
$AB^2 + BC^2 = 66 + 15{,}25 = 81{,}25$
Le triangle ABC n'est pas rectangle.

d. $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

D'où $\begin{cases} x_c - x_D = 2 \\ y_c - y_D = -1{,}5 \\ z_c - z_D = -3 \end{cases}$. On en déduit $D(0\,;-3{,}5\,;5)$.

9. a. $\overrightarrow{MN}(-3\,;4\,;0)$; $\overrightarrow{PQ}(-3\,;4\,;0)$; $\overrightarrow{MP}(0\,;4\,;-3)$ et $\overrightarrow{NQ}(0\,;4\,;-3)$

$\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{(-3)^2+4^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$

$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-3)^2+4^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$

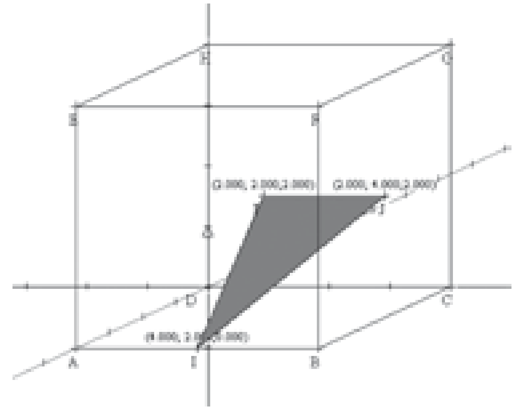
$\|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{0^2+4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\|\overrightarrow{NQ}\| = \sqrt{0^2+4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

b. Les droites (MN) et (PQ) sont parallèles puisque les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont égaux.

c. Le quadrilatère $MNPQ$ est un losange puisque les côtés sont parallèles deux à deux ($\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$) et les quatre côtés ont pour longueur 5.

10. a. b. voir le dessin ci-dessous.



c. $I(4\,;2\,;0)$ et $J(2\,;4\,;2)$

d. $\overrightarrow{IJ}(-2\,;2\,;2)$; $\overrightarrow{MI}(2\,;0\,;-2)$; $\overrightarrow{MJ}(0\,;2\,;0)$

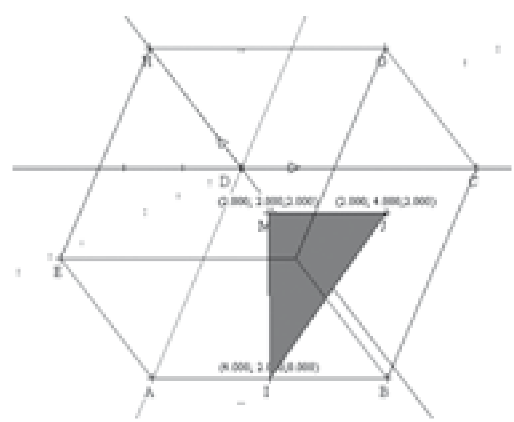
$\|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2+2^2} = \sqrt{12}$

$\|\overrightarrow{MI}\| = \sqrt{2^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$

$\|\overrightarrow{MJ}\| = \sqrt{0^2+2^2+0^2} = \sqrt{4} = 2$

e. Si le triangle MIJ est rectangle alors, la relation de Pythagore sera vérifiée :
$IJ^2 = (\sqrt{12})^2 = 12$
$MI^2 + MJ^2 = (\sqrt{8})^2 + 2^2 = 12 \Rightarrow$ La relation de Pythagore est vérifiée, le triangle MIJ est donc rectangle en M.

f. On peut vérifier à l'aide du logiciel, on obtient la vue suivante :



11. a. $\vec{p} + \vec{p}\,'(2{,}1\,;-1{,}4\,;3{,}5)$

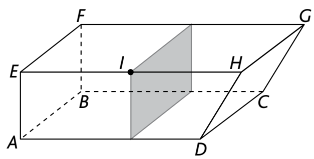
b. $2\vec{p}(10{,}2\,;-6{,}8\,;17)$
$-3\vec{p}\,'(9\,;-6\,;15)$

c. $\vec{p} = -1{,}7\vec{p}\,'$ donc $k = -1{,}7$.

› Étudier des figures planes et des volumes

12. a. Les faces *EHDA* et *FGCB* sont des trapèzes, toutes les autres faces sont des rectangles.

b. c. La section obtenue lorsque l'on coupe le prisme par un plan parallèle à la face *AEFB* et passant par *I* est un rectangle.



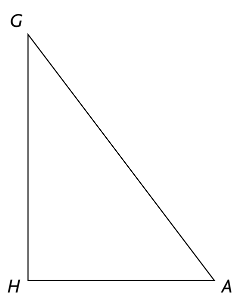
13. a. On applique successivement la relation de Pythagore dans les triangles rectangles *ABC*, *AGC* et *ADH*.

$AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

$AG = \sqrt{(\sqrt{20})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5$

$AH = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3.$

b.



c. Le triangle *AHG* est un triangle rectangle car :

$AH^2 + HG^2 = AG^2$

$3^2 + 4^2 = 5^2$.

La relation de Pythagore est vérifiée d'où le nom de triangle de Pythagore.

14. a. *A'B'C'D'* est un carré.

b. $A'B' = \frac{1}{3} \times 21 = 7$ cm.

$SH' = \frac{1}{3} \times 31{,}2 = 10{,}4$ cm.

c. $\mathcal{A} = 21^2 = 441$ cm^2.

$\mathcal{A}' = 7^2 = 49$ cm^2.

On a $\mathcal{A}' = \frac{1}{9}\mathcal{A}$.

d. $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 441 \times 31{,}2 = 4\,586{,}4$ cm^3.

$\mathcal{V}' = \frac{1}{3} \times 49 \times 10{,}4 \approx 169{,}87$ cm^3.

On a $\mathcal{V}' = \frac{1}{27}\mathcal{V}$.

Problèmes p. 57 et 58

› Problème 1

La sécurité est-elle respectée ?

1. Le pentagone *ABCDE* peut être décomposé en un trapèze et un rectangle.

$\frac{(B+b)h}{2} + L \times l = \frac{(2+1) \times 20}{2} + 30 \times 20 = 90$

L'aire du pentagone est 90 m^2.

2. Pour obtenir le volume du bassin, on multiplie l'aire du pentagone trouvée précédemment par la largeur du bassin soit 20 m.

$90 \times 20 = 1\,800$

Le volume du bassin est 1 800 m^3.

3. a. $\tan\alpha = \frac{1}{20} = 0{,}05$ on en déduit $\alpha = 2{,}86°$ soit $\alpha = 3°$.

b. Le bassin est conforme à la réglementation puisque la pente est inférieure à 4°.

› Problème 2

Machine à commande numérique

a. $\overrightarrow{OA}(25\,;0\,;0)$; $\overrightarrow{AF}(0\,;0\,;-25)$; $\overrightarrow{OD}(0\,;25\,;0)$; $\overrightarrow{HG}(0\,;0\,;-8)$

b. En observant les coordonnées des points *A*, *J* et *D*, on constate que *AODJ* est un carré dont le côté mesure 25. Lorsque l'outil de coupe suit le contour de ce carré, il parcourt 25×4 soit une distance de 100.

› Problème 3

Fabrication d'une planche à découper

1. *B*(0 ; 195 ; 18) ; *D*(315 ; 220 ; 18) ; *F*(340 ; 140 ; 18) ; *H*(437 ; 125 ; 18) ; *J*(355 ; 85 ; 18) ; *L*(340 ; 25 ; 18) ; *N*(25 ; 0 ; 18)

2. a. $\overrightarrow{AB}(0\,;170\,;0)$; $\overrightarrow{CD}(290\,;0\,;0)$; $\overrightarrow{EF}(0\,;-55\,;0)$; $\overrightarrow{GH}(82\,;0\,;0)$; $\overrightarrow{IJ}(-82\,;0\,;0)$; $\overrightarrow{MN}(-290\,;0\,;0)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires ; $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

b. $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 170^2 + 0^2} = \sqrt{170^2} = 170$

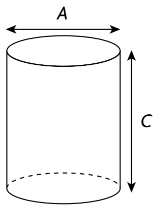
d'où $AB = 170$.

De même, on trouve $CD = 290$, $EF = 55$, $GH = 82$, $IJ = 82$ et $MN = 290$. Ces distances peuvent être vérifiées sur le plan.

› Problème 4

Cylindrée d'un moteur

1.



2. On applique la formule donnée dans l'énoncé :

$$\pi\left(\frac{A}{2}\right)^2.C.n = \pi\left(\frac{7{,}7}{2}\right)^2 \times 6{,}56 \times 4 \approx 1\,221{,}9$$

La cylindrée totale de ce moteur est donc d'environ 1 200 cm^3.

3. V correspond au volume d'un cylindre, soit $\pi R^2 \times h$.
Le rapport volumétrique se calcule donc de la façon suivante :

$$\rho = \frac{V+v}{v} = \frac{\pi R^2 C + v}{v} = \frac{\pi \times 3{,}85^2 \times 3{,}28 + 38}{38} \approx 5$$

Je me teste

(Livre élève pages 59 et 60)

EXERCICE 1

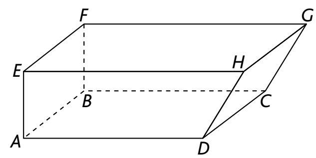
On considère un prisme droit *ABCDEFGH*.

$AE = FB = 1{,}5$ cm

$AD = BC = 3{,}5$ cm

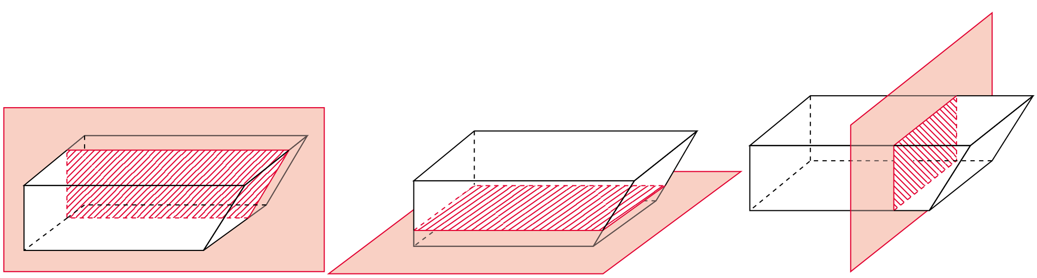
$EH = FG = 4{,}3$ cm

$EF = AB = HG = DC = 2{,}1$ cm



Dans cet exercice, on va chercher où placer un plan de coupe, parallèle à l'une des faces du prisme de façon à réduire le volume du prisme de 15 %.

1 Sur les prismes ci-dessous, dessiner 3 cas possibles de plans parallèles à l'une des faces du prisme.



1^er^ cas — 2^e^ cas — 3^e^ cas

2 Quelle sera la nature de la section obtenue, dans chaque cas ?

1^er^ cas : la section est un trapèze.

2^e^ cas : la section est un rectangle.

3^e^ cas : la section est un rectangle.

3 Calculer le volume initial du prisme. Détailler les calculs.

Pour calculer le volume, on détermine d'abord l'aire de la face *EHDA* (trapèze) puis on multiplie par la hauteur.

$V = ((4{,}3 + 3{,}5) \times 1{,}5 \div 2) \times 2{,}1 = 12{,}285$ soit $12{,}285\ \text{cm}^3$.

4 Proposer, une position du plan de coupe qui permette d'obtenir le volume réduit. Vous disposez d'un logiciel de géométrie 3D, d'un logiciel tableur et d'une calculatrice graphique.

1. Une solution possible :

On considère que le plan de coupe sera parallèle à la face trapézoïdale *EHDA*. Le volume du prisme formé aura pour volume : $\mathscr{V} = \mathscr{A} \times h'$ où $\mathscr{A}$ est l'aire du trapèze *EHDA* et h' la distance séparant le point *A* de la position du plan.

$\mathscr{A} = (4,3 + 3,5) \times 1,5 \div 2 = 5,85$ soit $\mathscr{A} = 5,85$ cm^2.

Si on réduit le volume initial de 12,285 cm^3 de 15 %, le volume recherché est approximativement 10,442 cm^3. La recherche de la valeur de h' correspondant peut se faire par calcul, à l'aide de la calculatrice, d'un tableur ou d'un logiciel de géométrie 3D.

On trouvera $h' \approx 1,785$ cm. Le plan de coupe parallèle à la face *EHDA* doit donc se situer à une distance de 1,785 cm du point *A* pour que le volume du prisme soit réduit de 15 %.

A

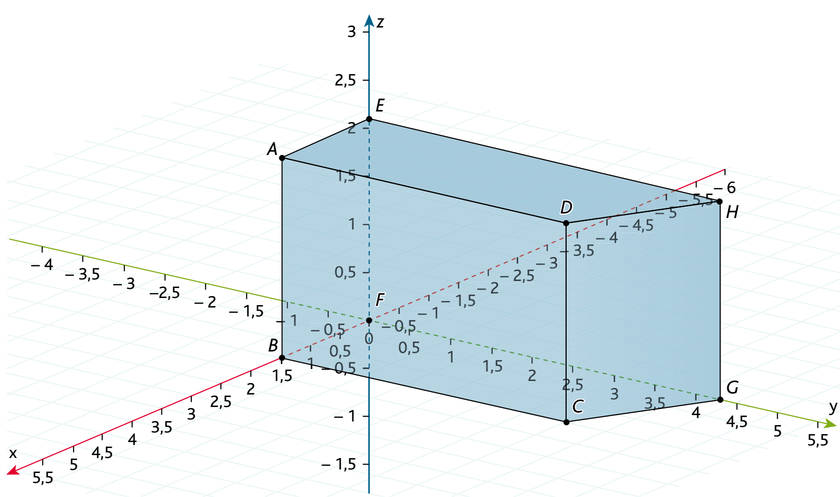
Appelez le professeur pour expliquer la démarche suivie à la question 4.

EXERCICE 2

Le prisme précédent doit être usiné à l'aide d'une machine à commande numérique.

Le prisme est positionné dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, comme indiqué ci-dessous.

B(1,5 ; 0 ; 0) *C*(1,5 ; 3,5 ; 0)
G(0 ; 4,3 ; 0) *E*(0 ; 0 ; 2,1)



1 Donner les coordonnées des points *A*, *D* et *H*.

A(1,5 ; 0 ; 2,1)

D(1,5 ; 3,5 ; 2,1)

H(0 ; 4,3 ; 2,1)

2 Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{EA}$.

$\overrightarrow{AD}\,(1{,}5 - 1{,}5 ; 3{,}5 - 0 ; 2{,}1 - 2{,}1) \Rightarrow \overrightarrow{AD}(0 ; 3{,}5 ; 0)$.

$\overrightarrow{DH}\,(0 - 1{,}5 ; 4{,}3 - 3{,}5 ; 2{,}1 - 2{,}1) \Rightarrow \overrightarrow{DH}(-1{,}5 ; 0{,}8 ; 0)$.

$\overrightarrow{HE}\,(0 - 0 ; 0 - 4{,}3 ; 2{,}1 - 2{,}1) \Rightarrow \overrightarrow{HE}(0 ; -4{,}3 ; 0)$.

$\overrightarrow{EA}\,(1{,}5 - 0 ; 0 - 0 ; 2{,}1 - 2{,}1) \Rightarrow \overrightarrow{EA}(1{,}5 ; 0 ; 0)$.

3 Calculer la distance parcourue par l'outil de coupe lorsqu'il tourne une fois autour de la pièce.

La distance parcourue par l'outil correspond au périmètre du quadrilatère *AEHD*. En utilisant la norme des vecteurs précédents, on détermine les longueurs *AD*, *DH*, *HE* et *EA*.

$AD = 3{,}5$; $DH = \sqrt{(-1{,}5)^2 + (0{,}8)^2 + 0^2} = \sqrt{2{,}89}$; $HE = 4{,}3$ et $EA = 1{,}5$.

Le contour de la pièce mesure $3{,}5 + \sqrt{2{,}89} + 4{,}3 + 1{,}5$ soit 11.

Appelez le professeur pour présenter oralement la méthode choisie à la question 3.

13 Fonction logarithme népérien

Capacité
- Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme népérien sur un intervalle donné

(Livre élève pages 61 et 62)

1 Découvrir la fonction logarithme népérien

Une petite nouvelle dans la famille des fonctions

1. Recherche d'une fonction dont la dérivée est une fonction connue

Voici quatre fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies pour tout x :

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \;;\; f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 \;;\; f_3(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5 \;;\; f_4(x) = x^2 - x.$$

Revoyez les formules du chapitre 2 si nécessaire.

a. Déterminer les fonctions dérivées f'_1, f'_2, f'_3, f'_4.

$f'_1(x) = x$; $f'_2(x) = x^2$; $f'_3(x) = x^3$; $f'_4(x) = 2x - 1$.

b. L'une d'elles est-elle égale à la fonction carré ? f'_2 est égale à la fonction carré.

c. L'une d'elles est-elle égale à la fonction cube ? f'_3 est égale à la fonction cube.

d. L'une d'elles est-elle égale à la fonction inverse ? Aucune des dérivées obtenues n'est égale à la fonction inverse.

La fonction logarithme népérien est la fonction, définie pour $x > 0$, dont la dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ et qui s'annule en 1.

ln(x) s'écrit usuellement ln x.

La fonction logarithme népérien se note ln. On a : ln : $x \mapsto \ln x$.

e. Compléter à l'aide du texte précédent : $\ln 1 = 0$; $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

2. Calcul de quelques valeurs

Utiliser la touche $\boxed{\text{ln}}$ de la calculatrice pour effectuer les calculs suivants. Arrondir au centième.

$\ln 0{,}2 \approx -1{,}61$; $\ln 0{,}8 \approx -0{,}22$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}18$; $\ln 2 \approx 0{,}69$

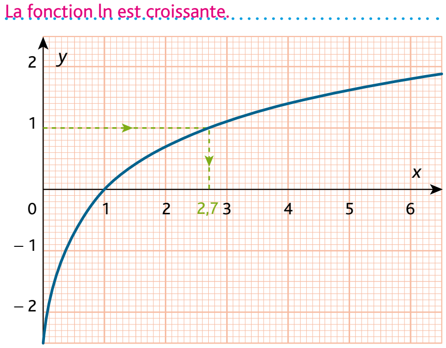
3. Sens de variation de la fonction ln

a. Donner le signe de $\frac{1}{x}$ pour $x > 0$. $\frac{1}{x}$ est positif.

b. En déduire le sens de variation de la fonction ln sur $]0 ; +\infty[$. La fonction ln est croissante.

c. Voici la courbe représentative de la fonction ln.

La réponse faite au b. est-elle conforme à l'allure de cette courbe ? Cette courbe est celle d'une fonction croissante.



d. Placer sur cette courbe le point d'ordonnée 1.

Donner une valeur approchée au dixième de l'abscisse de ce point. 2,7

La valeur exacte de cette abscisse est un nombre réel non décimal noté e.

2 Vérifier les propriétés opératoires de la fonction logarithme népérien

1. Calculer ln (3×5), ln 3 et ln 5. ln $(3 \times 5) \approx 2{,}708$; ln $3 \approx 1{,}099$; ln $5 \approx 1{,}609$.

Quelle relation semble lier les trois nombres ? Les valeurs approchées de ln (3×5) et ln 3 + ln 5 sont égales.

Plus généralement, pour $a > 0$ et $b > 0$, on peut montrer que **$\ln (a \times b) = \ln a + \ln b$**.

2. Calculer $\ln \left(\frac{7}{4}\right)$, ln 7 et ln 4. $\ln \left(\frac{7}{4}\right) \approx 0{,}56$; $\ln 7 \approx 1{,}946$; $\ln 4 \approx 1{,}386$.

Quelle relation semble lier les trois nombres ? Les valeurs approchées de $\ln \left(\frac{7}{4}\right)$ et ln 7 – ln 4 sont égales.

Plus généralement, pour $a > 0$ et $b > 0$, on peut montrer que **$\ln \left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$**.

3. Calculer $\ln (2^3)$ et $3 \times \ln 2$. $\ln (2^3) \approx 2{,}079$; $3 \times \ln 2 \approx 2{,}079$.

Comparer les deux résultats. Les valeurs approchées de $\ln (2^3)$ et $3 \times \ln 2$ sont égales.

Plus généralement, pour $a > 0$ et n entier positif ou négatif, on peut montrer que **$\ln (a^n) = n \times \ln a$**.

Comment rechercher l'exposant d'une puissance à l'aide d'un logarithme népérien ?

a. Rechercher l'entier n tel que $3^n = 6\,561$.

- Prendre le logarithme des deux membres de l'équation : $\ln (3^n) = \ln 6\,561$.
- Appliquer la formule $\ln (a^n) = n \times \ln a$ au premier membre : $n \times \ln 3 = \ln 6\,561$.
- Isoler l'inconnue dans le premier membre : $n = \dfrac{\ln 6\,561}{\ln 3}$
- Calculer n en tapant le calcul tel qu'il est écrit, sur la calculatrice : $n = 8$

b. Trouver le plus petit entier n tel que $0{,}85^n < 0{,}75$.

- Prendre le logarithme des deux membres de l'inéquation : $\ln (0{,}85^n) < \ln 0{,}75$
- Appliquer la formule $\ln (a^n) = n \times \ln a$ au premier membre :
  $n \times \ln 0{,}85 < \ln 0{,}75$
- Diviser les deux membres de l'inéquation par ln 0,85.
  $n > \dfrac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}85}$
- Effectuer le membre de droite avec la calculatrice : $n > 1{,}77$
- Donner la réponse : Le plus petit entier n cherché est 2.

Attention au sens lorsque vous divisez ! Le logarithme d'un nombre compris entre 0 et 1 est négatif.

RÉPONSES
Exercices

1 $\ln 8 \approx 2{,}08$; $\ln 0{,}7 \approx -0{,}36$; $\ln \left(\frac{2}{3}\right) \approx -0{,}41$; $\ln 2\,000 \approx 7{,}60$.

2 $n = \dfrac{\ln 1024}{\ln 2} = 10$.

3 $n < \dfrac{\ln 3}{\ln 1{,}2}$; $n < 6{,}025$. Le plus grand entier n cherché est 6.

4 $\ln (e^2) = 2 \times \ln e = 2$; $\ln (e^3) = 3 \times \ln e = 3$.

5 $\ln 49 + 3 \ln 7 = 2 \ln 7 + 3 \ln 7 = 5 \ln 7$.

14 Fonction logarithme décimal

Capacités
- Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme décimal, sur un intervalle donné
- Exploiter une droite tracée sur du papier semi-logarithmique

(Livre élève pages 63 et 64)

1 Découvrir la fonction logarithme décimal

Un petit tour en chimie

1. pH d'une solution

Le pH d'une solution mesure son acidité.
Par définition, pH = – log x où x désigne la concentration en ions H_3O^+ exprimée en mole par litre et log la fonction logarithme décimal.

Calculer le pH d'une solution où $x = 10^{-4}$ mole par litre en tapant sur la calculatrice :

$\boxed{–}$ $\boxed{\log}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{–}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{EXE}}$ pH = 4

2. Logarithme décimal d'une puissance de 10

Donner les logarithmes suivants à l'aide de la touche $\boxed{\log}$ de la calculatrice :

log 10 = 1 ; log (10^5) = 5 ; log (10^{-2}) = – 2 ; log (10^2) = 2 ; log (10^{-8}) = – 8

Que remarque-t-on ? On obtient l'exposant de la puissance de 10.

Parmi les égalités suivantes où n est un entier relatif, quelle est celle qui semble correcte ?

❐ $\log(10^n) = 1$ ☒ $\log(10^n) = n$ ❐ $\log(10^n) = -n$

Les propriétés opératoires du logarithme décimal sont les mêmes que celles du logarithme népérien :

$\log(a \times b) = \log a + \log b$, $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$; $\log(a^n) = n \times \log a$ où $a > 0$ et $b > 0$.

3. Sens de variation de la fonction logarithme décimal

a. Tracer, à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, la courbe représentative de la fonction log sur l'intervalle]0 ; 6].

b. Donner, à l'aide de ce graphique, le sens de variation de la fonction log.

La fonction log est croissante sur]0 ; 6].

2 Conjecturer le lien avec le logarithme népérien

Recopier et compléter le tableau suivant. Arrondir les résultats au millième.

x	0,4	0,8	1	5	10	20
$\frac{\ln x}{\ln 10}$	– 0,378	– 0,097	0	0,699	1	1,301
$\log x$	– 0,378	– 0,097	0	0,699	1	1,301

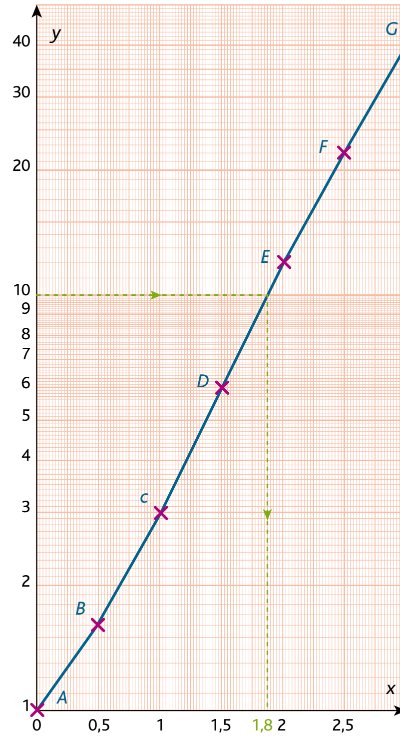
Comparer les résultats des deux lignes du tableau. Les valeurs approchées sont égales.

La fonction **logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction définie pour $x > 0$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Comment exploiter une courbe tracée sur un papier semi-logarithmique ?

L'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture, exprimée en millions, a été mesurée expérimentalement en fonction du temps en heures.
Les résultats ont été reportés sur le graphique ci-contre réalisé sur du papier semi-logarithmique. L'axe des ordonnées a été gradué suivant une échelle logarithmique : la mesure de l'ordonnée n'est pas la valeur elle-même, mais son logarithme.

Exemple : au bout d'une heure, il y a 3 millions de bactéries ; la mesure de l'ordonnée sur le graphique est log 3, mais on indique 3 pour l'ordonnée du point C.



Le papier semi-logarithmique permet de représenter des valeurs qui ont une grande amplitude de variation, sans que les faibles valeurs soient « écrasées ».

a. Quel est le nombre de bactéries au début de l'expérience ?

Il y a 1 million de bactéries.

b. Au bout de combien de temps a-t-on 10 millions de bactéries ? 1,8 heure, soit 1 heure 48 minutes.

c. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide du graphique.

t (en heures)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Nombre de bactéries (en millions)	1	1,6	3	6	12	22	40

d. Montrer que les différences d'ordonnée $y_D - y_C$ et $y_E - y_D$ ont la même mesure sur le graphique.

$y_D - y_C = \log 6 - \log 3 = \log\left(\dfrac{6}{3}\right) = \log 2$

$y_E - y_D = \log 12 - \log 6 = \log\left(\dfrac{12}{6}\right) = \log 2$

e. Montrer que le point D est le milieu de $[CE]$.

On remarque que l'on a aussi $x_D - x_C = x_E - x_D = 0,5$.

RÉPONSES Exercices

1 $\log 5 \approx 0,70$; $\log 0,9 \approx -0,05$; $\log\left(\dfrac{3}{5}\right) \approx -0,22$; $\log 4\,100 \approx 3,61$.

2 $\log\left(10^4\right) = 4$; $\log\left(10^{-8}\right) = -8$; $\log 1\,000 = 3$; $\log 0,1 = -1$.

3 **a.** $\log 2 + \log 5 = \log(2 \times 5) = \log 10$; $\log 2 - \log 5 = \log\left(\dfrac{2}{5}\right) = \log 0,4$; $\log\left(2^5\right) = 5 \log 2$; $\log(5^2) = 2 \log 5$.

b. $\log(x^3) = 3 \log x$; $\log(5x^4) = \log 5 + 4 \log x$; $\log x + \log 8 = \log(8x)$.

(Livre élève pages 65 et 66)

15 J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Étudier le signe de la fonction ln
Dériver une fonction comportant un logarithme népérien

1. Signe de la fonction ln

Ouvrir le fichier « 05_ln.ggb ».
Le point M est le point d'abscisse x qui se déplace sur la courbe représentative de la fonction ln. Son ordonnée est donc égale à ln x.

a. Déplacer le point M avec la souris ou avec le pavé fléché.

Lire dans la partie gauche de l'écran l'ordonnée de M.

Noter quelques-unes de ces ordonnées. 0,916 ; – 0,693 ; – 4,605 ; 0 ; 1,609.

b. L'ordonnée de M garde-t-elle le même signe quelle que soit la valeur de x ? Non.

Pour quelles valeurs de x est-elle positive ? L'ordonnée de M est positive pour $x > 1$.

Pour quelles valeurs de x est-elle négative ? Elle est négative pour $0 < x < 1$.

c. Déduire des réponses précédentes le tableau de signe de la fonction ln pour x variant de 0 (exclu) à 6.

x	0		1		6
Signe de ln x		–	0	+	

Ne pas confondre tableau de signe et tableau de variation.

2. Dérivée d'une fonction comportant un logarithme népérien

Reprendre le fichier précédent. Le point M n'est pas utilisé dans cette partie et peut être rendu invisible en cliquant sur la puce devant M dans la fenêtre de gauche.

a. Dérivée de la fonction logarithme népérien

- Quelle est la fonction dérivée de la fonction ln ? La dérivée de la fonction ln est la fonction inverse pour $x > 0$.
- Vérifier la réponse donnée avec le logiciel : taper sur la ligne de saisie « $f'(x)$ » et valider.

  On obtient ainsi une fonction g telle que $g = f'$.

  Quelle est l'expression de $g(x)$ qui apparaît dans la partie gauche de l'écran ? $g(x) = \frac{1}{x}$.

b. Dérivée de fonctions comportant la fonction ln

- Calculer les dérivées des fonctions suivantes, définies pour $x > 0$, par $f_1(x) = \ln(3x)$; $f_2(x) = \ln(x^3)$; $f_3(x) = x + \ln x$; $f_4(x) = 4 \ln x$.

  $f_1(x) = \ln 3 + \ln x$; $f'_1(x) = \frac{1}{x}$; $f_2(x) = 3 \ln x$; $f'_2(x) = \frac{3}{x}$; $f'_3(x) = 1 + \frac{1}{x}$; $f'_4(x) = \frac{4}{x}$.

- Vérifier les réponses données avec le logiciel : modifier la fonction f en tapant sur la ligne de saisie $f(x) = \ln(3x)$ pour la première fonction. La fonction dérivée g est modifiée automatiquement.

  Faire de même pour les autres fonctions.

J'utilise un logiciel (tableur)

Utiliser un logarithme en statistique

Coût d'entretien d'un équipement

L'étude du coût annuel d'entretien et de réparation *C* d'un équipement d'âge *t* a conduit à établir le tableau suivant pour les cinq premières années :

Âge t_i (en années)	1	2	3	4	5
Coût C_i (en centaines d'euros)	13,3	14,2	16,1	18,9	23,6

L'objectif de l'activité est de donner une estimation du coût d'entretien et de réparation de cet équipement lorsqu'il aura 7 ans.
Voir fichier « 05_cout_corrige.xls » ou « 05_cout_corrige.ods ».

1. Premier nuage de points

Dans cette partie, travailler sur la feuille 1 du classeur.

a. Représenter par un nuage de points le tableau de cette feuille.

b. Un ajustement de ce nuage par une droite semble-t-il adapté ? Non.

c. ▪ Choisir une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnées : effectuer un clic droit sur cet axe. Dans *Format de l'axe*, ouvrir l'onglet *Échelle* et cocher *Échelle logarithmique*.

▪ Que devient le nuage de points ? Il prend une forme allongée.

2. Second nuage de points

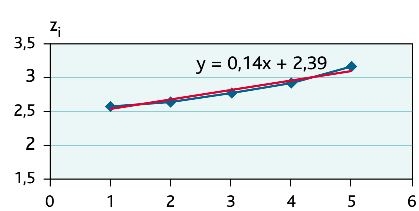
Dans cette partie, travailler sur la feuille 2 du classeur.

On va construire un nouveau nuage de points en portant en ordonnée, non plus C_i, mais ln (C_i).

On pose $z_i = \ln(C_i)$.

a. Pour compléter le tableau donnant les valeurs de z_i, entrer dans la cellule B3 la formule =ln(B2). La recopier jusqu'à la cellule F3.

b. Sélectionner les lignes 1 et 3 et les représenter par un nuage de points.



c. Un ajustement de ce nuage par une droite semble adapté.

▪ Effectuer un clic droit sur l'un des points du nuage et sélectionner *Ajouter une courbe de tendance*.

▪ Choisir le type *Linéaire*, puis dans Options *Afficher l'équation sur le graphique*.

d. En utilisant cette équation, calculer ln (C_7) en remplaçant x par 7. $\ln(C_7) = 0,14 \times 7 + 2,39 = 3,37$.

e. ▪ Trouver une valeur approchée à la centaine d'euros de C_7 grâce à l'extrait de la table de valeurs de la fonction ln donné sur la feuille 2 du classeur. $C_7 \approx 29$ (en centaine d'euros).

▪ Estimer le coût d'entretien et de réparation de cet équipement lorsqu'il aura 7 ans.

2 900 €.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 69 et 70

1. QCM

a. $-1{,}61$

b. $\ln e = 1$

c. $1 + \log a$

d. -6

2. Vrai – Faux

a. Vrai

b. Faux

c. Faux

d. Vrai

3. Phrases à compléter

a. $\ln 1{,}7$ est strictement positif.

b. $\ln 1$ est égal à 0.

c. $\log 7{,}2$ est strictement positif.

d. $\ln\left(\frac{2}{7}\right)$ est strictement négatif.

e. $\log 10$ est strictement positif.

f. $\ln(5^{-3} \times 5^3)$ est égal à 0.

g. 10^{-2} est strictement positif.

h. $\log(10^{-2})$ est strictement négatif.

i. $\ln 0{,}99$ est strictement négatif.

j. $\ln e$ est strictement positif.

4. Associer

$2\ln 9 \to 4\ln 3$

$\ln 3 + \ln 9 \to 3\ln 3$

$\ln(9^4) \to 8\ln 3$

$\ln 3 + \ln 3 \to 2\ln 3$

($\ln 18$; $\ln 6$: non associés)

› Calculer un logarithme

5. $\ln 18 \approx 2{,}89$; $\ln 2{,}5 \approx 0{,}92$; $\ln 0{,}2 \approx -1{,}61$; $\ln 0{,}58 \approx -0{,}55$; $\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}51$; $\ln\left(\frac{4}{7}\right) \approx -0{,}56$.

6. $\log 1\,000 = 3$; $\log 0{,}01 = -2$; $\log\left(10^{-5}\right) = -5$; $\log\left(10^6\right) = 6$; $\log 17{,}2 \approx 1{,}24$; $\log 0{,}99 \approx -0{,}00$.

7. $\ln 7 \approx 1{,}95$; $\log 3{,}2 \approx 0{,}51$; $\log\left(\frac{1}{5}\right) \approx -0{,}70$; $\ln 0{,}187 \approx -1{,}68$; $\ln\left(\frac{17}{3}\right) \approx 1{,}73$; $\log\left(6 \times 10^3\right) \approx 3{,}78$.

8. Les calculs impossibles sont : $\ln(-4)$ et $\log(-3^2)$.

9. Nombres positifs : $\log(10^3)$; $\log 8{,}2$; $\log(-5)^2$; $\log 1{,}05$.
Nombres négatifs : $\log \frac{2}{3}$; $\log(10^{-2})$; $\log 0{,}9$.

› Appliquer les propriétés opératoires

10. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$.

11. $\ln(3a) = \ln 3 + \ln a$; $\ln\left(\frac{5}{a}\right) = \ln 5 - \ln a$;
$\ln(a^7) = 7\ln a$; $\ln(6a^2) = \ln 6 + 2\ln a$;
$5\ln(a^2) + 3\ln(2a) = 10\ln a + 3\ln 2 + 3\ln a$
$= 13\ln a + 3\ln 2$.

12. $\log 16 = 4\log 2$; $\log 20 = 1 + \log 2$; $\log(2 \times 10^{-5}) = \log 2 - 5$; $3\log 8 - 7\log 4 = -5\log 2$; $\log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2$; $\log(2 \times 10^7) + \log 2 = 2\log 2 + 7$.

13. $\ln 27 = 3\ln 3$; $4\ln 3 - \ln 9 + 2\ln\left(\frac{1}{3}\right)$
$= 4\ln 3 - 2\ln 3 - 2\ln 3 = 0$; $\ln\left(\frac{e}{3}\right) = 1 - \ln 3$;
$5\ln 9 + \ln\left(e^3\right) = 10\ln 3 + 3$.

14. $\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0{,}778$; $\log 15 = \log 3 + \log 5 \approx 1{,}176$; $\log 50 = \log 5 + 1 \approx 1{,}699$; $\log 1{,}5 = \log 15 - 1 \approx 0{,}176$; $\log 2{,}5 = 2\log 5 - 1 \approx 0{,}398$; $\log 300 = \log 3 + 2 \approx 2{,}477$.

› Rechercher l'exposant d'une puissance à l'aide d'un logarithme

15. $4^n = 16\,384$; $n = \dfrac{\ln 16\,384}{\ln 4} = 7$.

$7^n = 5\,764\,801$; $n = \dfrac{\ln 5\,764\,801}{\ln 7} = 8$.

$10 \times 1{,}5^n = 75{,}937\,5$; $n = \dfrac{\ln 7{,}593\,75}{\ln 1{,}5} = 5.$

16. $5^n < 100$; $n < 2{,}86$ et n entier ; $n = 2$.
$2{,}8^n \geq 42{,}3$; $n \geq 3{,}03$ et n entier ; $n = 4$.
$0{,}4^n \leq 0{,}17$; $n \geq 1{,}93$ et n entier ; $n = 2$.
$10^{-3n} > 10^{-5}$; $n < \dfrac{5}{3}$ et n entier ; $n = 1$.

17. a. $C_5 = 20\,000 \times 1{,}035^5 \approx 23\,753{,}73$ €.
b. $20\,000 \times 1{,}035^n = 29\,200$; $1{,}035^n = 1{,}46$;
$n = \dfrac{\ln 1{,}46}{\ln 1{,}035} \approx 11.$
La valeur acquise est égale à 29 200 € au bout de 11 ans.
c. $1{,}035^n = 2$; $n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}035} \approx 20{,}16.$
Le capital a doublé à la fin de la 21e année.

18. a. $V_2 = 65\,049{,}60$ €.
b. $n > 2{,}63$.
La valeur de la machine est inférieure à 60 000 € au bout de la troisième année.
c. $n \approx 5{,}4$.
La machine a perdu la moitié de sa valeur au bout de la sixième année.

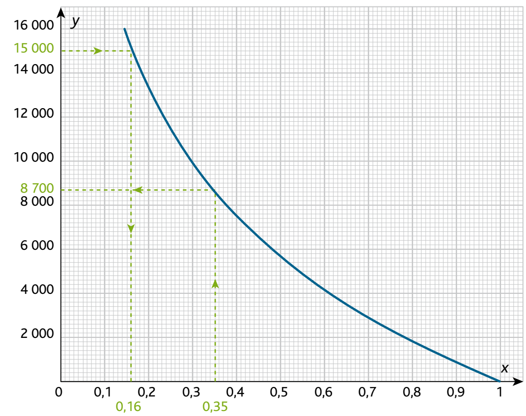
› Dériver une fonction comportant un logarithme népérien

19. a. $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$; $f'(x) < 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.
Donc f est décroissante sur cet intervalle.
b. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.
Donc f est croissante sur cet intervalle.
c. $f'(x) = \dfrac{2}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.
Donc f est croissante sur cet intervalle.
d. $f'(x) = \dfrac{4}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.
Donc f est croissante sur cet intervalle.

Problèmes p. 70 à 72

› Problème 1
Datation au carbone 14

1. a. $f'(x) = -\dfrac{8\,310}{x}$ sur l'intervalle $[0{,}2 ; 1]$.
b. $f'(x) < 0$. Donc f est décroissante sur $[0{,}2 ; 1]$.
c.

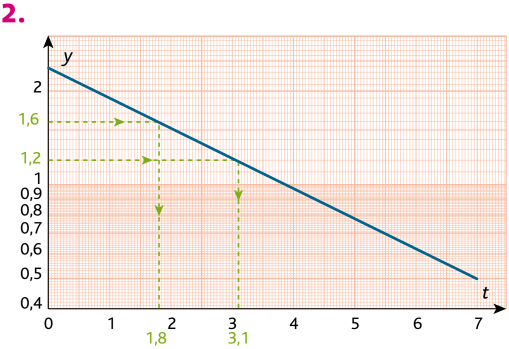


2. a. $f(0{,}35) = 8\,700$. L'âge du fossile est 8 700 ans.
b. Voir graphique.
c. Voir graphique. La fraction de carbone 14 restant est environ 16 %.

› Problème 2
Élimination d'un médicament

1. a. $Q_1 = 2{,}4 \times 0{,}8 = 1{,}92$ mg ;
$Q_2 = 1{,}92 \times 0{,}8 = 1{,}536$ mg.
b. $Q_{n+1} = 0{,}8Q_n$.
c. (Q_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $Q_0 = 2{,}4$.

2.



a. $Q_1 \approx 1{,}9$ mg ; $Q_2 \approx 1{,}5$ mg.
b. La quantité de médicament au bout de 7 heures est 0,5 mg.
c. La quantité de médicament est de 1,6 mg au bout de 1,8 h, soit 1 h 48 min.
d. La quantité de médicament est divisée par 2 au bout de 3,1 h, soit 3 h 6 min.

› Problème 3

Perte de puissance du signal sur les fibres optiques

1. a. $\dfrac{P_e - P_s}{P_e} = \dfrac{5 - 1{,}84}{5} = 0{,}632$, soit 63,2 %.

b. $A = \dfrac{1}{5} \times 10 \times \log\left(\dfrac{5}{1{,}84}\right) \approx 0{,}9$.

La référence de la fibre optique est FO2.

2. a. $0{,}9 = \dfrac{1}{L} \times 10 \times \log 2$.

En transformant, on obtient : $L = \dfrac{10 \log 2}{0{,}9} \approx 3{,}345$ km.

b. On a alors $\dfrac{P_e}{P_s} = \dfrac{100}{10} = 10$.

$0{,}9 = \dfrac{1}{L} \times 10 \times \log 10$. D'où $L = \dfrac{10}{0{,}9} \approx 11{,}111$ km.

› Problème 4

Découverte du système solaire

Voir fichier « 05_planete_corrige.xls » ou « 05_planete_corrige.ods ».

1. b. La forme du nuage ne justifie pas un ajustement par une droite.

2. a.

i	$d_i - d_0$	$\ln(d_i - d_0)$
0	0	
1	50	3,912
2	92	4,522
3	170	5,136
5	721	6,581
6	1 370	4 110
7	2 814	7,942

c. $\ln(d_4 - d_0) = 0{,}676 \times 4 + 3{,}181 \approx 5{,}885$;
$\ln(d_8 - d_0) = 0{,}676 \times 8 + 3{,}181 \approx 8{,}589$.

3. a. $d_4 = 24{,}071 \times 1{,}966^4 + 58 \approx 417$ millions de kilomètres.

b. $d_8 = 24{,}071 \times 1{,}966^8 + 58 \approx 5\,430$ millions de kilomètres.

4. a. $\dfrac{417 - 414}{414} \approx 0{,}007$, soit 0,7 % d'écart.

b. $\dfrac{5\,430 - 4\,500}{4\,500} \approx 0{,}206$, soit 21 % d'écart.

› Problème 5

Niveau sonore

1. a. $\dfrac{I}{I_0} = \dfrac{2 \times 10^{-4}}{10^{-12}} = 2 \times 10^8$.

$L = 10 \times \log(2 \times 10^8) = 10(\log 2 + 8) = 10 \log 2 + 80$.

b. $L \approx 83$ dB.

2. $L' = 10 \times \log(6 \times 10^8) \approx 87{,}8$ dB.
L'augmentation est de 4,8 dB, c'est-à-dire 10 log 3.

Je me teste

(Livre élève pages 73 et 74)

EXERCICE 1 pH d'une solution

Le pH d'une solution mesure son acidité. Par définition, pH = – log *x* où *x* désigne la concentration en ions H_3O^+ exprimée en mole par litre.

1 Calcul du pH

a. Calculer, avec la calculatrice, le pH d'une solution dont la concentration en ion H_3O^+ est 10^{-5} mol/L. pH = 5.

b. Quel est le sens de variation de la fonction logarithme décimal ?

La fonction logarithme décimal est croissante.

Lorsque la concentration en ions H_3O^+ augmente, le pH augmente-t-il ou diminue-t-il ?

Le pH diminue.

c. Utiliser un tableur pour traiter la suite de l'exercice.

Voir fichier « 05_pH_corrige.xls » ou « 05_pH_corrige.ods ».

• Porter dans la colonne A les concentrations. Elles varient de 10^{-1} à 10^{-14} et la concentration est divisée par 10 d'une ligne à l'autre.

Entrer en A2 la valeur 10^{-1}. Entrer en A3 la formule =A2/10 et la recopier vers le bas jusqu'à la cellule A15.

• Les pH sont dans la colonne B.

Entrer en B2 la formule =–LOG10(A2) et la recopier vers le bas jusqu'à la cellule B15.

	A	B
1	concentration	pH
2	0,1	1
3	0,01	2
4	0,001	3
5	0,0001	4

d. Comment varie le pH lorsque la concentration en ions H_3O^+ est divisée par 10 ?

Le pH augmente de 1.

Justifier par un calcul. $-\log\left(\frac{x}{10}\right) = -\log x - (-\log 10) = -\log x + 1.$

e. Comment varie la concentration en ions H_3O^+ lorsque le pH augmente de 3 unités ?

Elle est divisée par 1 000.

Justifier par un calcul. $\text{pH} + 3 = -\log x + \log(10^3) = -\log\left(\frac{x}{10^3}\right)$

2 Représentation graphique

a. Représenter ce tableau par un nuage de points à l'aide de l'Assistant graphique du tableur.

Vous semble-t-il utilisable pour une lecture graphique ?

La lecture graphique est peu précise.

b. Faire une copie du graphique précédent et choisir l'échelle logarithmique en abscisse : effectuer un clic droit sur cet axe. Dans *Format de l'axe*, ouvrir l'onglet *Échelle* et cocher *Échelle logarithmique*.

Expliquer pourquoi on obtient des points alignés.

Deux points consécutifs ont la même différence d'abscisses.

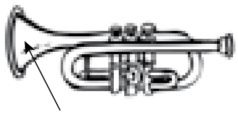
A

Appelez le professeur pour présenter votre argumentation.

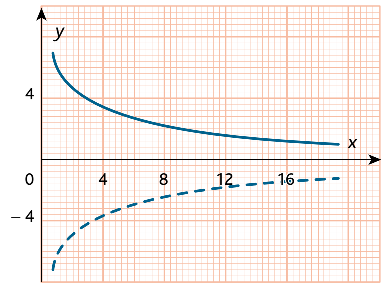
EXERCICE 2 La trompette

L'objet de cet exercice est d'étudier la courbure du pavillon d'une trompette.

Le schéma ci-contre en représente le profil.



La partie supérieure du profil du pavillon est modélisée par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 19]$ par : $f(x) = -1,42 \ln x + 5,31$.



1 Calculer $f(0,5)$ et $f(1)$. Arrondir au dixième.

$f(0,5) = -1,42 \times \ln 0,5 + 5,31 \approx 6,3$

$f(1) = -1,42 \times \ln 1 + 5,31 = 5,31$

2 En notant f' la dérivée de la fonction f, montrer que $f'(x) = -\dfrac{1,42}{x}$ pour tout x de l'intervalle $[0,5 ; 19]$.

On sait que $(u + v)' = u' + v'$ et $(a \times u)' = a \times u'$ (a constante).

$f'(x) = -1,42 \times \dfrac{1}{x} + 0 = -\dfrac{1,42}{x}$.

3 Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le sens de variation de f sur $[0,5 ; 19]$.

x est positif, donc $-\dfrac{1,42}{x}$ est négatif.

La fonction f est décroissante sur $[0,5 ; 19]$.

4 On note C la courbe représentative de la fonction f.

La sourdine est un instrument permettant de modifier le son d'une trompette et qui se place à l'entrée du pavillon. Un des points de contact de la sourdine avec le pavillon de la trompette est le point A de la courbe C d'ordonnée 3.

Déterminer graphiquement l'abscisse du point A (support au choix).

L'abscisse de A est proche de 5.

A

Appelez le professeur pour présenter votre démarche.

16 Probabilité d'un événement

Capacité
- Calculer la probabilité d'un événement par addition des probabilités d'issues

(Livre élève pages 75 et 76)

1 Utiliser le langage des ensembles

Les dés sont jetés !

1. Calcul en situation d'équiprobabilité

On joue avec un dé cubique possédant 6 faces numérotées de 1 à 6.
On lance le dé, supposé équilibré.
Chaque numéro de la face supérieure correspond à une issue.

L'**ensemble** des issues est appelé **univers** et désigné par la lettre **Ω** (lire « oméga »).

On note $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a. Le dé étant supposé équilibré, quelle probabilité attribue-t-on à chacune des issues ?

$\frac{1}{6}$.

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

b. On considère l'événement A : « Le numéro sorti est supérieur ou égal à 4 ». Écrire A sous forme d'ensemble.

$A = \{4, 5, 6\}$

Un ensemble se note entre accolades : $\{a, b, c, d\}$.

c. On désigne par **cas favorables** à A, les éléments de A.

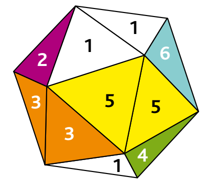
Combien y a-t-il de cas favorables à A ? Trois cas favorables à A.

d. En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A s'obtient par $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Calculer $P(A)$. $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$.

2. Calcul en situation de non-équiprobabilité

On joue avec un dé régulier possédant 20 faces numérotées de 1 à 6. Il y a :
5 faces n° 1 ; 5 faces n° 2 ; 4 faces n° 3 ; 3 faces n° 4 ; 2 faces n° 5 ; 1 face n° 6.
On lance le dé, supposé équilibré.



Une **issue** correspond au numéro de la face supérieure.

L'ensemble des issues est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a. Compléter le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,25	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05

A-t-on équiprobabilité des six cas possibles ?

Non.

b. On considère l'événement B : « Le numéro sorti est pair ». Écrire B sous forme d'ensemble.

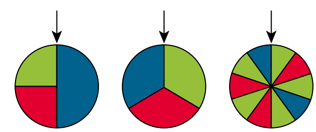
$B = \{2, 4, 6\}$

c. La probabilité d'un événement est donnée par la somme des probabilités des issues qui le composent. Calculer $P(B)$.

$P(B) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}45$

2 Déterminer un modèle de probabilité

Quelles chances à la roulette ?



Roulette 1 Roulette 2 Roulette 3

Pour chacune des roulettes, ci-contre, donner la probabilité de chacun des événements suivants :
B : « la roulette s'arrête dans le secteur bleu » ; R : « la roulette s'arrête dans le secteur rouge » ; V : « la roulette s'arrête dans le secteur vert ».

Roulette 1 : $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(R) = \frac{1}{4}$; $P(V) = \frac{1}{4}$.

Roulette 2 : $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(R) = \frac{1}{3}$; $P(V) = \frac{1}{3}$.

Roulette 3 : $P(B) = \frac{2}{10} = 0{,}2$; $P(R) = \frac{3}{10} = 0{,}3$; $P(V) = \frac{5}{10} = 0{,}5$.

Comment calculer une probabilité par addition de probabilités d'issues ?

Un dé cubique est truqué de telle sorte que la probabilité d'apparition du 6 est 0,4 et que les chances d'apparition des autres faces sont les mêmes.

a. Déterminer la probabilité de chaque issue.

- Penser que la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.

On a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ et, d'après l'énoncé, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ avec $p_6 = 0{,}4$. D'où :
$5p_1 + 0{,}4 = 1$, puis $p_1 = \frac{0{,}6}{5} = 0{,}12$.

- Résumer dans un tableau les probabilités de chaque issue :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,4

b. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Le dé tombe sur l'as (c'est-à-dire, le 1) » ; B : « Le dé tombe sur un nombre pair ».

- Calculer la probabilité d'un événement en ajoutant les probabilités des issues qu'il comporte.

On a $P(A) = P(\{1\}) = 0{,}12$ et

$P(B) = P(\{2, 4, 6\}) = 0{,}12 + 0{,}12 + 0{,}4 = 0{,}64$

RÉPONSES
Exercice

a. On a $5 \times p_1 + p_6 = 1$ d'où
$5 \times p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ donc
$p_1 = 0{,}04 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$.

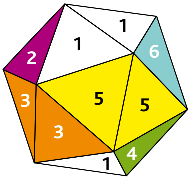
b. On a $A = \{2, 4, 6\}$ d'où
$P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}8 = 0{,}88$.

17 Opérations sur les événements

Capacités
- Calculer la probabilité d'un événement contraire, de la réunion ou de l'intersection d'événements
- Utiliser un arbre, un tableau, un diagramme

(Livre élève pages 77 et 78)

Faire des opérations avec les événements



On joue avec un dé régulier possédant 20 faces numérotées de 1 à 6.
Il y a : 5 faces n° 1 ; 5 faces n° 2 ; 4 faces n° 3 ; 3 faces n° 4 ; 2 faces n° 5 ; 1 face n° 6.
On lance le dé, supposé équilibré.
On modélise le lancer de ce dé avec le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,25	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05

1. Événement contraire

On considère l'événement A : « Le numéro sorti est pair ».
On désigne par $\overline{A}$ (lire « A barre ») l'événement contraire de A.

a. Écrire A sous forme d'ensemble et calculer $P(A)$.

$A = \{2, 4, 6\}$.

$P(A) = 0,25 + 0,15 + 0,05 = 0,45$.

b. Définir $\overline{A}$ par une phrase.

$\overline{A}$: « Le numéro sorti est impair ».

c. Écrire $\overline{A}$ sous forme d'ensemble et calculer $P(\overline{A})$.

$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

$P(\overline{A}) = 0,25 + 0,20 + 0,10 = 0,55$.

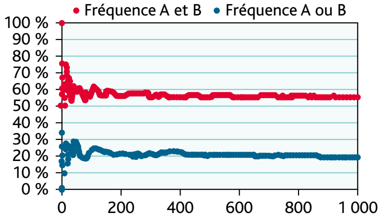
d. Quelle relation peut-on écrire entre $P(\overline{A})$ et $P(A)$?

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ ou $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Union et intersection

On considère les événements :
A : « Le numéro sorti est pair » et B : « Le numéro sorti est supérieur ou égal à 4 ».
On note $A \cap B$ l'événement : « Le numéro sorti est pair et il est supérieur ou égal à 4 ». C'est l'événement intersection de A et B.

$\cap$ se lit « inter ».
$\cup$ se lit « union ».



On note $A \cup B$ l'événement : « Le numéro sorti est pair ou il est supérieur ou égal à 4 ». C'est l'événement réunion de A et B.
On a simulé 1 000 lancers du dé et représenté l'évolution de la fréquence des événements $A \cap B$ et $A \cup B$ durant ces lancers (d'autres simulations sont disponibles sur le fichier « **06_de_icosaedrique.xls** » ou « **06_de_icosaedrique.ods** », en faisant F9).

a. Décrire l'aspect du graphique. Les fréquences se stabilisent.

b. Donner, d'après ce graphique, une estimation des probabilités $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

$P(A \cap B) \approx 0,20$; $P(A \cup B) \approx 0,55$.

c. Écrire l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **et** B. $A \cap B = \{4, 6\}$.

d. Utiliser le tableau de l'énoncé pour calculer $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = 0,15 + 0,05 = 0,20$.

Comparer avec l'estimation donnée à la question 2.b.

Cela confirme l'estimation.

e. Écrire l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B (A seul, B seul, ou les deux). $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

f. Calculer $P(A \cup B)$ et comparer avec l'estimation donnée à la question 1.b.

$P(A \cup B) = 0,25 + 0,15 + 0,10 + 0,05 = 0,55$.

g. Comparer $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,45 + 0,30 - 0,20 = 0,55 = P(A \cup B)$.

Comment utiliser un tableau pour calculer la probabilité d'une réunion d'événements ?

Pour 500 personnes respirant des poussières pendant leur activité professionnelle, on dispose des données ci-contre. On prélève au hasard le dossier d'une personne parmi les 500.
On note A l'événement « Le dossier est celui d'une personne atteinte de toux chronique » et F « Le dossier est celui d'un fumeur ».

	Atteints de toux chronique	Non atteints de toux chronique	Total
Fumeurs	60	140	200
Non-fumeurs	40	260	300
Total	100	400	500

a. Transformer le tableau d'effectifs en un tableau de probabilités.

- Le tirage de chaque dossier étant équiprobable, on utilise la formule (nombre de cas favorables) divisé par (nombre de cas possibles) pour compléter le tableau de probabilités.

	A	$\overline{A}$	Total
F	$\frac{60}{500} = 0,12$	$\frac{140}{500} = 0,28$	0,4
$\overline{F}$	$\frac{40}{500} = 0,08$	$\frac{260}{500} = 0,52$	0,6
Total	0,2	0,8	1

b. Calculer la probabilité de l'événement $A \cup F$.

- Pour $P(A \cup F)$, on fait la somme des cases centrales correspondant à A ou F (en bleu) :

$P(A \cup F) = 0,12 + 0,28 + 0,08$
$= 0,48$.

RÉPONSES

Exercice

a.

	Hommes : B	Femmes : $\overline{B}$	Total
Moins de 25 ans : A	0,121	0,079	0,2
Plus de 25 ans : $\overline{A}$	0,396	0,404	0,8
Total	0,517	0,483	1

b. $P(A \cup B) = 0,121 + 0,079 + 0,396 = 0,596$.

(Livre élève pages 79 et 80)

18

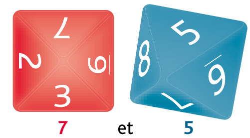
J'utilise un logiciel (tableur)

Expérimenter intersection et réunion

Dés octaédriques et fiabilité de composants électroniques

1. Simulation de lancers de dés octaédriques

On lance deux dés réguliers à huit faces (numérotées de 1 à 8), supposés équilibrés, un dé rouge et un dé bleu.
On note A l'événement : « le dé rouge tombe sur la face 8 », et B l'événement : « le dé bleu tombe sur la face 8 ».



a. À quel événement correspond « faire un double 8 » ?

A et B c'est-à-dire $A \cap B$.

b. Énoncer l'événement $A \cup B$ à l'aide de « au moins ».

$A \cup B$: « l'un au moins des deux dés tombe sur la face 8 ».

c. Quel est, des deux événements $A \cap B$ et $A \cup B$, celui dont la probabilité vous semble la plus faible ?

$A \cap B$.

Ouvrir le fichier « **06_des_octaedriques.xls** » ou « **06_des_octaedriques.ods** » qui simule 1 000 lancers.

d. Que simule l'instruction =ENT(8*ALEA()+1), entrée en B4 ?

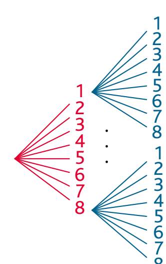
Le lancer du dé rouge.

e. La cellule E4 contient l'instruction =OU(B4=8;C4=8). Quand affiche-t-elle « VRAI » et quand affiche-t-elle « FAUX » ?

E4 affiche VRAI quand B4 vaut 8 ou C4 vaut 8.

f. En faisant plusieurs fois F9, donner, à l'aide du graphique, une estimation des probabilités des événements $A \cap B$ et $A \cup B$. $P(A \cap B) \approx 0{,}24$; $P(A \cup B) \approx 0{,}02$.

2. Calcul de probabilités



a. Montrer, à l'aide de l'arbre (incomplet) ci-contre, que l'on peut considérer 64 issues équiprobables. Il y a $8 \times 8 = 64$ chemins possibles.

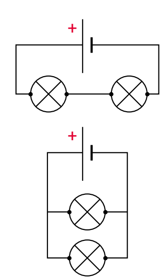
Quelle est la probabilité d'une issue ? $\frac{1}{64}$

b. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.

$P(A) = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{1}{8}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

c. En déduire $P(A \cup B)$. $P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} \approx 0{,}234$.

3. Application en électricité



On considère un certain type de composant électronique dont la probabilité de défaillance durant la période de garantie est $\frac{1}{8}$. Déduire de la partie précédente, la probabilité de défaillance, durant la période de garantie, d'un système composé de deux composants de ce type, montés, soit en série (l'un « ou » l'autre est défaillant), soit en parallèle (« et »).

Probabilité de défaillance en série : $\frac{15}{64} \approx 0{,}234$.

Probabilité de défaillance en parallèle : $\frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

J'utilise un logiciel (tableur)

Estimer puis calculer une probabilité

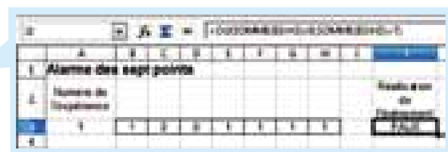
L'alarme des sept points

Une entreprise doit contrôler la qualité d'une eau minérale qu'elle produit, et dont la teneur en calcium est de 80 mg par litre. Un technicien prélève régulièrement des échantillons aléatoires en fin de fabrication dont il reporte la teneur moyenne en calcium sur un graphique. S'il constate une série de sept points consécutifs supérieurs à 80 ou inférieurs à 80, il considère ce résultat comme suspect et alerte la fabrication.

L'objectif de cette activité est de comprendre comment fonctionne cette alarme.

On considère qu'une teneur moyenne a une chance sur deux d'être supérieure ou inférieure à 80, ce qui nous place dans la situation de sept lancers consécutifs à pile ou face d'une pièce supposée équilibrée.

1. Simulation à l'aide d'un tableur



Préparer une feuille de calcul comme ci-contre.

- En B3 entrer la formule =ENT(ALEA()+0,5) puis recopier jusqu'en H3.
- En J3 entrer la formule =OU(SOMME(B3:H3)=0;SOMME(B3:H3)=7) .

a. Que simule la formule entrée en B3 ? Un lancer de pile ou face : 1 ou 0.

b. Quand la cellule J3 affiche-t-elle « FAUX » ? et « VRAI » ? J3 affiche VRAI lorsqu'il y a sept « 0 » ou sept « 1 » et FAUX sinon.

c. Faire plusieurs fois F9. Observe-t-on souvent l'affichage « VRAI » ? C'est rare.

- Sélectionner la ligne 3 et la recopier jusqu'à la ligne 10 002 pour effectuer 10 000 simulations.
- Calculer la fréquence d'apparition de « VRAI », à l'aide de l'instruction =NB.SI(J3:J10002;"VRAI")/10000 .

d. En faisant plusieurs fois F9, estimer la probabilité d'avoir sept « pile » ou sept « face » après sept lancers d'une pièce supposée équilibrée. La probabilité d'avoir sept « pile » ou sept « face » vaut environ 0,016.

A

Appelez le professeur pour argumenter votre réponse à la question précédente.

2. Calcul à l'aide d'un arbre

Ne cherchez pas à faire un arbre complet mais à comprendre quelle opération conduit à 128.

a. Montrer, à l'aide d'un arbre, que l'on peut considérer 128 issues équiprobables.

Il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$ chemins.

b. Calculer la probabilité d'avoir sept « pile » ou sept « face » après sept lancers d'une pièce supposée équilibrée et comparer avec l'estimation de la question 1.d.

Il y a 2 issues favorables sur 128 possibles (équiprobables) d'où la probabilité $\frac{2}{2^7} = \frac{1}{2^6} \approx 0{,}0156$.

c. Justifier l'utilisation de la méthode des sept points. Lorsqu'une alerte est donnée, la probabilité que ce soit une fausse alerte est faible.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 83 à 85

1. QCM

a. $P(B \cap C) = 0{,}2$.

b. $P(B \cup C) = 0{,}8$.

c. $\frac{4}{30}$.

d. $\frac{7}{12}$.

e. $P(A \cap C) = 0{,}14$.

f. $P(C) = 0{,}22$.

g. $P(A) = 1 - P(B)$;

h. $P(A \cup B) = 0{,}5$.

i. $P(A \cap B) = 0{,}1$.

j. $P(A \cap B) = 0$.

› Déterminer un modèle de probabilité

2. a. Méthode 2.

b. Méthode 1.

c. Méthode 2.

d. Méthode 1.

› Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité

3. On peut dresser le tableau suivant.

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Atelier 1	6	194	200
Atelier 2	4	96	100
Total	10	290	300

a. Il y a 200 pièces produites par l'atelier 1.
La probabilité que la pièce tirée provienne de l'atelier 1 est $\frac{200}{300} = \frac{2}{3}$.

b. Il y a 10 pièces défectueuses. La probabilité que la pièce tirée soit défectueuse est $\frac{10}{300} = \frac{1}{30}$.

c. Il y a 6 pièces défectueuses dans la production de l'atelier 1.

d. La probabilité que la pièce tirée soit défectueuse et provienne de l'atelier 1 est $\frac{6}{300} = \frac{1}{50}$.

4. a.

Salaires mensuels	Effectifs
[1 000 ; 1 400[	80
[1 400 ; 1 800[	40
[1 800 ; 2 200[	40
[2 200 ; 2 600[	30
[2 600 ; 3 000]	10
Total	200

b. $P(A) = \frac{80}{200} = 0{,}4$.

$P(B) = \frac{40}{200} = 0{,}2$.

c. $A \cup B$: « Le salarié a un salaire compris entre 1 000 et 1 800 euros (1 800 exclus) ».
$\bar{A}$: « Le salarié a un salaire supérieur ou égal à 1 400 euros ».

d. $P(A \cup B) = \frac{100}{200} = 0{,}5$ et $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

› Passer du langage des probabilités au langage courant et réciproquement

5. a. $\bar{A}$: « la carte tirée n'est pas un cœur ».

b. $A \cap B$: « la carte tirée est une figure de cœur ».

c. Il y a 3 figures de cœur donc
$P(A \cap B) = \frac{3}{32} = 0{,}9375$.

d. $A \cup B$: « la carte tirée est un cœur ou une figure ».

e. Il y a 8 cartes de cœur et 9 figures qui ne sont pas de cœur, donc 17 cartes pouvant conduire à $A \cup B$.
Donc $P(A \cup B) = \frac{17}{32} = 0{,}53125$.

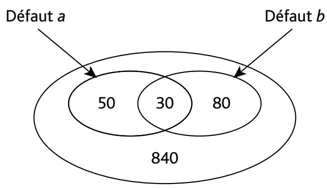
Remarque : on constate que
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{32} + \frac{12}{32} - \frac{3}{32}$.

6. Figure 1 : jaune A ; bleu $\bar{A}$.
Figure 2 : jaune $A \cup B$; bleu $\bar{A} \cap \bar{B}$.
Figure 3 : jaune $A \cup \bar{B}$; bleu $\bar{A} \cap B$.

› Utiliser un tableau, un arbre, un diagramme

7. a. Le nombre d'appareils ne présentant aucun défaut est $1\,000 - 50 - 30 - 80 = 840$.

b.



c.

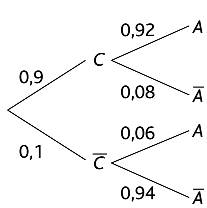
	Défaut *a*	Non défaut *a*	Total
Défaut *b*	30	80	110
Non défaut *b*	50	840	890
Total	80	920	1 000

d.

	A	$\overline{A}$	Total
B	$\frac{30}{1000} = 0{,}03$	$\frac{80}{1000} = 0{,}08$	$\frac{110}{1000} = 0{,}11$
$\overline{B}$	$\frac{50}{1000} = 0{,}05$	$\frac{840}{1000} = 0{,}84$	$\frac{890}{1000} = 0{,}89$
Total	$\frac{80}{1000} = 0{,}08$	$\frac{920}{1000} = 0{,}92$	1

e. $\overline{A}$: « L'appareil ne présente pas le défaut *a* ».
$P(\overline{A}) = 0{,}92$.
$A \cup B$: « L'appareil présente au moins le défaut *a* ou le défaut *b* ».
$P(A \cup B) = 0{,}03 + 0{,}08 + 0{,}05 = 0{,}16$.
$\overline{A} \cap \overline{B}$: « L'appareil ne présente ni le défaut *a* ni le défaut *b* ». $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}84$.

8. a.



b. La probabilité pour que la pièce tirée soit :
– conforme et acceptée par le contrôle est $P(C \cap A) = 0{,}9 \times 0{,}92 = 0{,}828$;
– conforme et rejetée par le contrôle est $P(C \cap \overline{A}) = 0{,}9 \times 0{,}08 = 0{,}072$;
– défectueuse et acceptée par le contrôle est $P(\overline{C} \cap A) = 0{,}1 \times 0{,}06 = 0{,}006$;
– défectueuse et rejetée par le contrôle est $P(\overline{C} \cap \overline{A}) = 0{,}21 \times 0{,}94 = 0{,}094$.

› Calculer la probabilité de la réunion ou de l'intersection d'événements

9. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}6$.

10. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}6 + 0{,}2 - P(A \cap B)$.

a. Si $P(A \cap B) = 0{,}1$ alors
$P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}7$.

b. Si A et B sont disjoints, $P(A \cap B) = 0$ alors
$P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}2 - 0 = 0{,}8$.

11. a. $\overline{A}$: « Alex donne un avis défavorable ».
$\overline{B}$: « Ben donne un avis défavorable ».
$A \cap B$: « Alex et Ben donnent un avis favorable ».
$A \cup B$: « Alex ou Ben, au moins, donne un avis favorable ».

b. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}6 = 0{,}9$.

Problèmes p. 85 et 86

› Problème 1

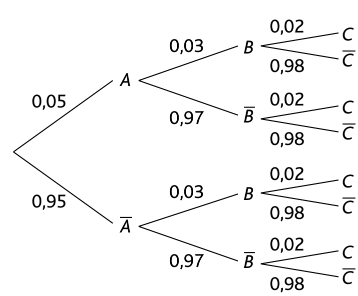
Jackpot !

1. D'après les instructions du tableur, $P(A) = 0{,}05$; $P(B) = 0{,}03$ et $P(C) = 0{,}02$.

2. La cellule D2 affiche $1 \times 1 \times 1 = 1$ (sinon elle affiche 0).

3. L'événement $A \cap B \cap C$ s'est réalisé 4 fois.

4. On peut réaliser l'arbre suivant.

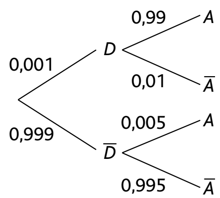


La probabilité de toucher le jackpot est $0{,}05 \times 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}00003$.

› Problème 2

Vraie ou fausse alerte ?

1.



2. La probabilité qu'un jour donné le système de contrôle déclenche une fausse alerte est :
$P(\overline{D} \cap A) = 0{,}999 \times 0{,}005 = 0{,}004\,995$ soit environ 0,5 % des jours où se déclenche une fausse alerte.

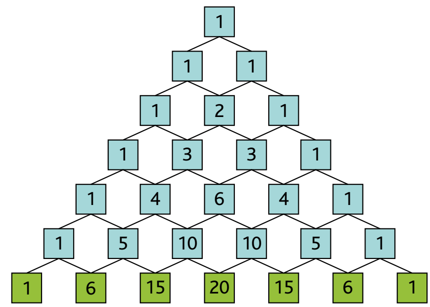
3. $P(A) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}005 = 0{,}005\,985$.
La probabilité qu'un jour donné se déclenche une alerte est 0,005 985 (environ 0,6 % des jours).
Remarque : on constate que le rapport entre les fausses alertes et les alertes est $\dfrac{0{,}004\,995}{0{,}005\,985}$ c'est-à-dire qu'environ 83 % des alertes sont de fausses alertes.

› Problème 3

La planche de Galton

1. On peut estimer p_3 à environ 0,32 et p_6 à environ 0,02.

2. a.



b. Au total, il y a $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$ chemins.

c. En supposant que les 64 chemins sont équiprobables, on en déduit que :

$p_0 = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}016$;

$p_1 = \dfrac{6}{64} \approx 0{,}094$;

$p_2 = \dfrac{15}{64} \approx 0{,}234$;

$p_3 = \dfrac{20}{64} \approx 0{,}312\,5$;

$p_4 = \dfrac{15}{64} \approx 0{,}234$;

$p_5 = \dfrac{6}{64} \approx 0{,}094$;

$p_6 = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}016$.

Je me teste

(Livre élève pages 87 et 88)

EXERCICE

Un couple désire deux enfants et, si possible, « au moins une fille ». On suppose qu'à chaque naissance, un enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille.

Partie A. Simulations

On a simulé la situation sur un tableur.

On a entré en B4 et en C4 la formule =ENT(ALEA()+0,5) puis en D4 la formule =OU(B4=1;C4=1) .

La ligne 4 a ensuite été recopiée vers le bas pour obtenir 10 000 simulations.

C1 fx =NB.SI(D4:D10003;"VRAI")

	A	B	C	D	E
1	Au moins une fille :		7495	fois sur 10 000 simulations	
2					
3	Simulation n°	Enfant 1	Enfant 2	Au moins une fille	
4	1	0	1	VRAI	
5	2	1	1	VRAI	
6	3	0	0	FAUX	
7	4	0	0	FAUX	
8	5	0	0	FAUX	
9	6	1	1	VRAI	

1 À quoi correspondent les valeurs 0 et 1 affichées en colonnes B et C ?

0 correspond à « garçon ».

1 correspond à « fille ».

2 À quoi correspond l'affichage VRAI ou FAUX en colonne D ?

VRAI correspond à « au moins une fille », FAUX sinon.

3 La cellule C1 contient la formule =NB.SI(D4:D10003;"VRAI") .
Interpréter le nombre 7 495 affiché sur l'image d'écran.

Il y a eu 7 495 cas sur 10 000 avec « au moins une fille » sur les deux enfants.

4 En faisant F9, la cellule C1 affiche successivement : 7 495, 7 536, 7 521, 7 435, 7 445.
Proposer une estimation de la probabilité d'avoir au moins une fille lorsque l'on a deux enfants.

La probabilité d'avoir au moins une fille est environ 0,75.

A

Appelez le professeur pour présenter votre proposition.

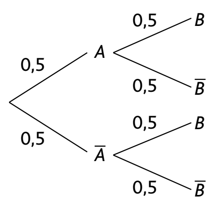
Partie B. Calcul des probabilités

On note *A* l'événement : « Le premier enfant est une fille » et *B* l'événement : « Le second enfant est une fille ».

1 Écrire à l'aide de A et B l'événement : « L'un des deux enfants, au moins, est une fille ».

C'est l'événement $A \cup B$.

2 Compléter l'arbre suivant, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



3 Calculer $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

4 Calculer $P(A \cup B)$, puis comparer avec les simulations.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,5 + 0,5 - 0,25$

$= 0,75$

L'estimation de la question A.4 est correcte.

19 Fonction exponentielle de base e

(Livre élève pages 89 et 90)

Capacités
- Interpréter e^b comme la solution de l'équation $\ln x = b$
- Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction $x \mapsto e^x$ sur un intervalle donné

1 Découvrir la fonction exponentielle de base e

1. Résolution graphique de l'équation $\ln x = 2$ pour $x > 0$

a. Tracer, sur la calculatrice, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

Fenêtre graphique : x Min : 0, x Max : 20, pas : 2, y Min : – 4, y Max : 4, pas : 1.

b. Dans la même fenêtre, tracer la droite d'équation $y = 2$.

c. Donner, à l'aide des fonctionnalités graphiques de la calculatrice, une valeur approchée au centième de la solution de l'équation $\ln x = 2$: $x \approx 7{,}39$

Il a été vu au chapitre 5 qu'on appelle e le nombre tel que **$\ln e = 1$** ($e \approx 2{,}718$).

On note e^2 la solution de l'équation $\ln x = 2$. On a donc $\ln (e^2) = 2$.

2. Résolution graphique de l'équation $\ln x = b$ pour $x > 0$ (b constante donnée)

a. Compléter, par la même méthode graphique qu'au 1b. et c., le tableau suivant :

b	– 3	– 2	– 1	0	0,5	1	2	3
Valeur approchée au centième de e^b	0,05	0,14	0,36	1	1,65	2,72	7,39	20,09

Sur la calculatrice, remplacez $y = 2$ par $y = -3$, puis par $y = -2$, etc.

On admet que, pour $x > 0$, l'équation $\ln x = b$ admet une solution et une seule, notée e^b.

La fonction qui, à tout nombre b, associe e^b est appelée fonction exponentielle de base e.

En notant comme d'habitude la variable par x, on note cette fonction : $x \mapsto e^x$.

b. Donner une valeur approchée de e^3 en appuyant successivement sur les touches : 2nde ln 3 EXE.

$e^3 \approx 20{,}09$

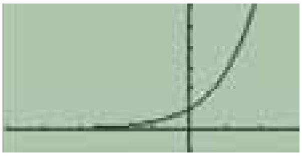
Comparer avec la valeur trouvée graphiquement en *a*. C'est la même valeur approchée.

Répondre aux mêmes questions pour les autres valeurs du nombre b données dans le tableau.

La méthode graphique et la calculatrice donnent les mêmes valeurs pour e^b.

3. Sens de variation de la fonction exponentielle de base e

Voici la courbe représentative de la fonction f définie, quel que soit x, par $f(x) = e^x$.



a. D'après ce graphique, quel est le sens de variation de la fonction f ?

La fonction f est croissante.

b. D'après ce graphique, de quel signe est e^x ? e^x est positif quel que soit x.

c. On admet que la fonction dérivée de f est la fonction f' telle que, pour tout x, $f'(x) = e^x$.

On a donc $f = f'$. Vérifier, à l'aide du signe de la dérivée, le sens de variation de la fonction f.

e^x étant positif, la fonction dérivée f' est positive. Donc la fonction f est croissante.

2 Vérifier les propriétés opératoires de la fonction exponentielle

Pour chaque question 1., 2. et 3., une des deux propositions est correcte. Laquelle ?
Répondre en utilisant les valeurs approchées données par la calculatrice.

1. $e^5 \times e^3 = ?$ ☒ e^{5+3} ❐ $e^{5\times 3}$

Plus généralement, si x et y sont deux nombres quelconques, on a $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

2. $\dfrac{e^5}{e^3} = ?$ ❐ $e^{5 \div 3}$ ☒ e^{5-3}

Plus généralement, si x et y sont deux nombres quelconques, on a $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

3. $(e^5)^3 = ?$ ❐ $e^{(5^3)}$ ☒ $e^{5\times 3}$

Plus généralement, si x est un nombre quelconque et n est un entier positif ou négatif, on a $\left(e^x\right)^n = e^{x \times n}$.

Comment dériver une fonction obtenue simplement à partir de $x \mapsto e^x$?

a. Déterminer la dérivée de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 5e^x$.

- Identifier la forme de la fonction.

  $f(x)$ est de la forme : $a \times u(x)$, donc $f'(x)$ est de la forme : $a \times u'(x)$.

- Appliquer la formule précédente avec $a = 5$ et $u(x) = e^x$.

  $f'(x) = 5e^x$.

b. Déterminer la dérivée de la fonction g définie pour tout x par $g(x) = 5 + e^x$.

- Identifier la forme de la fonction.

  $g(x)$ est de la forme : $u(x) + v(x)$, donc $g'(x)$ est de la forme : $u'(x) + v'(x)$.

- Appliquer la formule précédente avec $u(x) = 5$ et $v(x) = e^x$.

  $g'(x) = 0 + e^x = e^x$.

RÉPONSES

Exercices

1 $e^4 \approx 54,60$; $e^{0,5} \approx 1,65$; $e^{-2} \approx 0,14$; $e^{-0,5} \approx 0,61$.

2 **a.** $e^2 \times e^{-3} = e^{-1}$; $(e^{-1})^{-4} = e^4$; $\dfrac{e^2}{e^{-2}} = e^4$.

b. $e^{x+1} = e \times e^x$; $e^{10x} = \left(e^x\right)^{10}$; $e^{x-2} = e^{-2} \times e^x$.

3 **a.** $f'(x) = 0,7\ e^x$.
b. $f'(x) = e^x$.
c. $f'(x) = -6\ e^x$.
d. $f'(x) = e^3 \times e^x$.

20 Autres fonctions exponentielles

(Livre élève pages 91 et 92)

Capacités
- Étudier les variations des fonctions $x \mapsto e^{ax}$ (a réel non nul)
- Résoudre des équations du type $e^{ax} = b$ et des inéquations du type $e^{ax} \geq b$ (ou $\leq$)
- Résoudre des équations du type $\ln(ax) = b$ (avec $a > 0$) et des inéquations du type $\ln(ax) \geq b$ (ou $\leq$) avec $a > 0$

1 Croissance exponentielle

Des bactéries gloutonnes

Une population de 12 000 bactéries est placée en milieu renouvelé (accès non limité à la nourriture, à l'oxygène) au temps $t = 0$. Le nombre de bactéries, en fonction du temps t exprimé en minutes, est donné par : $f(t) = 12\,000 \times e^{0,01t}$ pour t variant de 0 à 60.

1. Calculer le nombre de bactéries après 20 minutes.

Pour cela, taper sur la calculatrice : $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{\text{2nde}}\ \boxed{\ln}\ \boxed{(}\ \boxed{,}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{EXE}}$.
Arrondir le résultat à l'unité.

14 657 bactéries.

2. Calculer, de même, le nombre de bactéries après 40 minutes, puis après 60 minutes.

Après 40 minutes : 17 902 ; après 60 minutes : 21 865 bactéries.

Le nombre de bactéries augmente-t-il ou diminue-t-il ? Il augmente.

3. Calculer le pourcentage d'évolution du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 20$ ①, puis entre $t = 20$ et $t = 40$ ②, et finalement entre $t = 40$ et $t = 60$ ③. ① $\dfrac{14\,657 - 12\,000}{12\,000} \approx 0,221$, soit 22,1 % ; ② $\dfrac{17\,902 - 14\,657}{14\,657} \approx 0,221$, soit 22,1 % ;
③ $\dfrac{21865 - 17\,902}{17\,902} \approx 0,221$, soit 22,1 %.

Que remarque-t-on ? Le pourcentage d'augmentation est le même.

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice.

5. Donner, à partir de ce graphique, le sens de variation de la fonction f.

La fonction f est croissante.

2 Décroissance exponentielle

Antiseptique contre bactéries

Une population de 12 000 bactéries est soumise à un agent antiseptique au temps $t = 0$. Le nombre de bactéries, en fonction du temps t exprimé en minutes, est donné par : $g(t) = 12\,000 \times e^{-0,3t}$ pour t variant de 0 à 15.

1. Calculer le nombre de bactéries après 5 minutes. 2 678 bactéries.

Même question après 10 minutes, puis après 15 minutes. 597 bactéries ; 133 bactéries.

Le nombre de bactéries augmente-t-il ou diminue-t-il ? Il diminue.

2. Calculer le pourcentage d'évolution du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 5$, puis entre $t = 5$ et $t = 10$, et finalement entre $t = 10$ et $t = 15$.

① $\frac{12\,000 - 2\,678}{12\,000} \approx 0{,}777$, soit 77,7 % ; ② $\frac{2\,678 - 597}{2\,678} \approx 0{,}777$, soit 77,7 % ;

③ $\frac{597 - 133}{597} \approx 0{,}777$, soit 77,7 %.

Que remarque-t-on ? Le pourcentage de diminution est le même.

3. Tracer la courbe représentative de la fonction g sur la calculatrice.

4. Donner, à partir de ce graphique, le sens de variation de la fonction g.

La fonction g est décroissante.

Les fonctions f et g sont des fonctions exponentielles du type $x \mapsto e^{ax}$ où a est une constante non nulle. La fonction dérivée est de la forme $x \mapsto a \times e^{ax}$.

Comment résoudre des équations du type $e^{ax} = b$ et des inéquations du type $e^{ax} \geq b$?

a. Résoudre l'équation $e^{4x} = 3$.

- Utiliser la propriété suivante : si $e^a = b$ $(b > 0)$, alors $a = \ln b$.

$4x = \ln 3$

- Terminer la résolution de l'équation.

$x = \frac{\ln 3}{4}$ La solution de l'équation est : $\frac{\ln 3}{4}$

b. Résoudre l'inéquation $e^{-0{,}5x} \geq 6$.

- Utiliser la propriété suivante : si $e^a \geq b$, alors $a \geq \ln b$.

$-0{,}5x \geq \ln 6$

- Terminer la résolution de l'inéquation. Changer le sens de l'inéquation lorsqu'on divise ses deux membres par un nombre négatif.

$x \leq -2 \ln 6$ Les solutions de l'inéquation sont les nombres inférieurs ou égal à $-2 \ln 6$.

Diviser par – 0,5, c'est multiplier par – 2.

Comment résoudre des équations du type $\ln(ax) = b$ (avec $a > 0$) ?

Résoudre l'équation $\ln(4x) = 3$.

- Utiliser la propriété suivante du cours : si $\ln b = a$, alors $b = e^a$ $(b > 0)$.

$4x = e^3$.

- Terminer la résolution de l'équation.

$x = \frac{e^3}{4}$. La solution de l'équation est : $\frac{e^3}{4}$.

RÉPONSES

Exercices

1 a. $e^{8x} = 6$; $8x = \ln 6$; $x = \frac{\ln 6}{8}$.

$e^{-2x} = 7$; $-2x = \ln 7$; $x = \frac{\ln 7}{-2}$.

b. $e^{2x} \geq 10$; $2x \geq \ln 10$; $x \geq 0{,}5 \ln 10$.

$e^{-x} \leq 0{,}5$; $-x \leq \ln 0{,}5$; $x \geq \ln 0{,}5$.

c. $\ln(5x) = 9$; $5x = e^9$; $x = 0{,}2e^9$.

$\ln(0{,}4x) \leq 2$; $0{,}4x \leq e^2$; $x \leq 2{,}5e^2$.

2 a. $f'(x) = 4\,e^{4x}$.

b. $f'(x) = -2\,e^{-2x}$.

c. $f'(x) = 10\,e^{2x}$.

21

(Livre élève pages 93 et 94)

J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Donner l'équation réduite d'une tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle de base e

Ouvrir le fichier « **07_tangentes.ggb** ».
On a tracé la courbe représentative C de la fonction $f : x \mapsto e^x$ dans un repère orthogonal.
Le point M est un point quelconque de C.

Le logiciel a été paramétré pour donner des résultats arrondis au centième.

1. Tangente à la courbe C au point d'abscisse 3

a. Tracé de la tangente avec le logiciel

- Choisir 3 pour l'abscisse de M.
- Sélectionner l'outil *Tangente*.
- Cliquer successivement sur la courbe C et sur le point M.
- On obtient la droite tangente en M à la courbe C. La renommer et l'appeler T.

b. Équation de la tangente

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point A d'abscisse x_A est donnée par la relation : $y = f'(x_A)\,(x - x_A) + f(x_A)$.

- Donner la fonction dérivée f' de la fonction $f : x \mapsto e^x$: $f'(x) = e^x$.
- Calculer $f'(3)$: $f'(3) = e^3$.
- Donner l'équation de T sous la forme $y = ax + b$. Arrondir a et b au centième.

  $y = e^3(x - 3) + e^3$; $y = e^3x - 2e^3$; $y = 20{,}09x - 40{,}17$.
- Comparer avec l'équation donnée par le logiciel dans la fenêtre de gauche :

  C'est la même équation que celle donnée par le logiciel.

2. Autres tangentes

Déplacer le point M après avoir cliqué sur l'outil *Sélection*.

a. Tangente au point d'abscisse 1

- Choisir 1 pour l'abscisse de M.
- Quelle particularité présente la tangente T ? Elle passe par l'origine.
- Justifier en utilisant l'équation de T fournie par le logiciel : $y = 2{,}72x$ est l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

b. Tangente au point d'abscisse 2

- Choisir 2 pour l'abscisse de M.
- Écrire l'équation de T donnée par le logiciel : $y = 7{,}39x - 7{,}39$.
- Quelle particularité présente cette équation ? Les coefficients a et b sont opposés.
- Justifier par un calcul : $y = e^2(x - 2) + e^2$; $y = e^2x - e^2$.

J'utilise un logiciel (tableur)

Ajuster un nuage de points

Étude de la demande et de l'offre pour un produit

L'objectif de l'activité est l'étude de la demande et de l'offre pour un nouveau produit de grande consommation.
On désigne par x le prix unitaire du produit en euros, par d la demande en milliers d'unités et par r l'offre en milliers d'unités. Une étude statistique a donné les résultats suivants :

x_i en euros	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
d_i en milliers	7,8	6,1	4,7	3,7	3	2,5	2,2	2
r_i en milliers	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6

Ouvrir le fichier « 07_ajustement.xls » ou « 07_ajustement.ods ».

1. Étude de la demande (graphique 1)

On pose $y = \ln d$.

a. Compléter la ligne de y dans le tableau 1 à l'aide de la fonction LN du tableur.

b. Sélectionner les lignes de x et y. Représenter le nuage de points correspondant.

c. Ajuster ce nuage par une droite dont on affichera l'équation.

d. Montrer, à l'aide de cette équation, que $d = 8,79\ \mathrm{e}^{-0,40x}$ (coefficients arrondis au centième).

$y = -0,3983x + 2,1731$; $\ln d = -0,3983x + 2,1731$; $d = e^{-0,3983x} \times e^{2,1731}$; $d = 8,79e^{-0,40x}$

e. Utiliser la relation donnée au d. pour calculer la demande si le prix unitaire est de 5 euros.

$d = (8,79 \times e^{-0,4 \times 5}) \times 1\,000 \approx 1\,190.$

2. Étude de l'offre (graphique 2)

On pose $z = \mathrm{e}^r$.

a. Compléter la ligne de z dans le tableau 2 à l'aide de la fonction EXP du tableur.

b. Sélectionner les lignes de x et z. Représenter le nuage de points correspondant.

c. Ajuster ce nuage par une droite dont on affichera l'équation.

d. Montrer, à l'aide de cette équation, que $r = \ln(3,02x + 0,87)$.

$y = 3,0202x + 0,8672$; $e^r = 3,0202x + 0,8672$; $r = \ln(3,02x + 0,87).$

e. Utiliser la relation donnée au d. pour calculer l'offre si le prix unitaire est de 5 euros.

$r = \ln(3,02 \times 5 + 0,87) \times 1\,000 \approx 2\,771.$

3. Prix d'équilibre

Déterminer graphiquement (calculatrice ou tableur) une valeur arrondie à 10 centimes du prix de vente pour lequel la demande est égale à l'offre : 3,30 €.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 97 et 98

1. QCM

a. 0,135.
b. ln e = 1.
c. 15 e^{3x}.
d. décroissante.

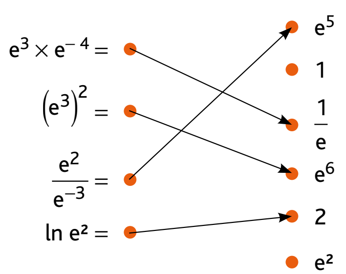
2. Vrai – Faux

a. Faux.
b. Vrai.
c. Faux.
d. Vrai.

3. Textes à barrer

a. $\boxed{\text{toujours positif}}$.
b. $\boxed{\text{n'a pas de solution}}$.
c. $\boxed{\text{a pour solution } e^{-3}}$.
d. $\boxed{f'(x) = e^x}$.

4. Associer



› Calculer une exponentielle

5. $e^5 \approx 148{,}41$; $e^{-1} \approx 0{,}37$; $e^{0{,}1} \approx 1{,}11$; $e^{-0{,}02} \approx 0{,}98$; $e^0 = 1$; $e^1 \approx 2{,}72$; $e^{4{,}5} \approx 90{,}02$.

6. $f(-2) \approx 2{,}44$; $f(-1) \approx 2{,}21$; $f(0) = 2$; $f(1) \approx 1{,}81$; $f(2) \approx 1{,}64$.

› Appliquer les propriétés opératoires

7. $e^3 \times e^{2{,}5} = e^{5{,}5}$; $\dfrac{e^{1{,}3}}{e^{-2}} = e^{3{,}3}$; $e^{-4} \times e = e^{-3}$; $\left(e^{-5}\right)^2 = e^{-10}$.

8. $e^{x-4} = e^{-4} \times e^x$; $e^{3-x} = \dfrac{e^3}{e^x}$; $e^{2x-1} = e^{-1} \times \left(e^x\right)^2$

› Résoudre des équations et des inéquations

9. $\ln x = 2{,}5$; $x = e^{2{,}5}$.
$\ln x = -4$; $x = e^{-4}$.
$2 \ln x = 10$; $\ln x = 5$; $x = e^5$.
$4 \ln x - 1 = -11$; $\ln x = -2{,}5$; $x = e^{-2{,}5}$.

10. $e^x = 12$; $x = \ln 12$.
$e^x = 0{,}5$; $x = \ln 0{,}5$.
$e^x = 1$; $x = 0$.
$e^x = 0$; cette équation n'a pas de solution.
$e^x = -3$; cette équation n'a pas de solution.

11. $e^{2x} = 3{,}2$; $2x = \ln 3{,}2$; $x = 0{,}5 \ln 3{,}2$.
$e^{-5x} = 14$; $-5x = \ln 14$; $x = -0{,}2 \ln 14$.
$4\,e^{0{,}1x} = 12$; $e^{0{,}1x} = 3$; $0{,}1x = \ln 3$; $x = 10 \ln 3$.
$-5e^{-0{,}8x} = 10$; $e^{-0{,}8x} = -2$; cette équation n'a pas de solution.

12. $\ln x > 2$; $x > e^2$.
$\ln x \leq 8$; $x \leq e^8$.
$2 \ln x + 3 < 13$; $\ln x < 5$; $x < e^5$.
$4 - \ln x \geq 12$; $\ln x \leq -8$; $x \leq e^{-8}$.

13. $e^x < 1{,}5$; $x < \ln 1{,}5$.
$e^{2x} \geq 1$; $2x \geq \ln 1$; $x \geq 0$.
$e^{-0{,}2x} < 0$; cette inéquation n'a pas de solution.
$e^{0{,}5x} - 1 > 2$; $e^{0{,}5x} > 3$; $0{,}5x > \ln 3$; $x > 2 \ln 3$.
$3\,e^{4x} \geq 6$; $e^{4x} > 2$; $4x > \ln 2$; $x > 0{,}25 \ln 2$.

› Étudier une fonction comportant une exponentielle

14. a. La fonction exponentielle de base e, notée f, est croissante.
b. f_1 est croissante car on multiplie f par une constante positive.
f_2 est décroissante car on multiplie f par une constante négative.
f_3 est croissante car on ajoute une constante à f.
f_4 est décroissante car on multiplie f par une constante négative.

15. a. $f'(x) = 3{,}5\,e^{3{,}5x}$; f est croissante.
b. $f'(x) = -0{,}2\,e^{-0{,}2x}$; f est décroissante.

c. $f'(x) = -\,20\ \mathrm{e}^{5x}$; f est décroissante.

d. $f'(x) = 3\ \mathrm{e}^{-\,10x}$; f est croissante.

16. $f(x) = \mathrm{e}^{0,3x\,-\,2}$.

a. $f(x) = \mathrm{e}^{-\,2}\mathrm{e}^{0,3x}$. On a donc $k = \mathrm{e}^{-\,2}$.

b. $f'(x) = 0,3\mathrm{e}^{-\,2}\mathrm{e}^{0,3x}$

c. $f'(x) > 0$ car c'est le produit de trois nombres positifs.

d. La fonction f est donc croissante.

17. Fonctions croissantes : f ; i ; j ; k.
Fonctions décroissantes : g ; h ; l.

Problèmes p. 98 à 100

› Problème 1

Système de régulation de température d'un moteur thermique d'un groupe d'irrigation

1. a. $200 = K\ \mathrm{e}^{-\,0,02\,\times\,20}$; $200 = K\ \mathrm{e}^{-\,0,4}$; $K = \dfrac{200}{\mathrm{e}^{-\,0,4}}$.

b. $K \approx 298,4$.

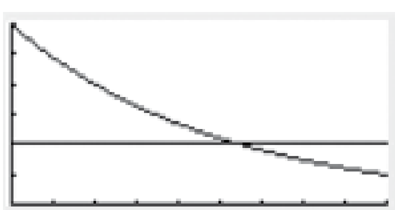
2. a. $f'(x) = -\,5,96\ \mathrm{e}^{-\,0,02x}$.

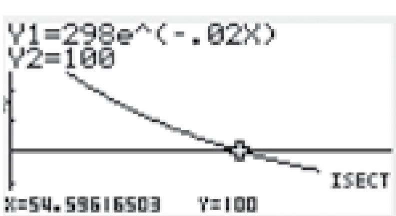
b. Cette dérivée est négative.

c.

x	0	90
$f(x)$	298 ↘	49,3

d.





Coordonnées du point d'intersection :
$x \approx 54,6$; $y = 100$

e. $298\ \mathrm{e}^{-\,0,02x} = 100$; $\mathrm{e}^{-\,0,02x} = \dfrac{100}{298}$;

$-\,0,02x = \ln\left(\dfrac{100}{298}\right)$; $x = -\,50\ \ln\left(\dfrac{100}{298}\right) \approx 54,6$.

3. La durée d'arrêt du moteur est 55 secondes.

› Problème 2

Refroidisseur de boissons

1. a. $1 - 0,045 = 0,955$. D'où $\theta_1 = 0,955\theta_0$.

b. $\theta_2 = 0,955^2 \times \theta_0$; $\theta_3 = 0,955^3 \times \theta_0$.

c. $\theta_n = 0,955^n \times \theta_0$.

d. La suite (θ_n) est une suite géométrique de raison 0,955.

e. $\theta_{25} = 22 \times 0,955^{25}$; $\theta_{25} \approx 7°$.

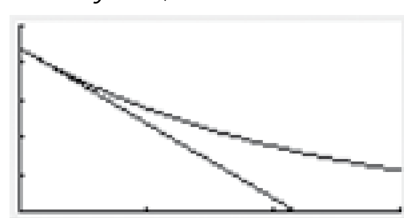
2. a. $\mathrm{e}^{-\,0,046} \approx 0,955$.

b. $f'(x) = 22 \times (-\,0,0046)\ \mathrm{e}^{-\,0,046x} = -\,1,012\ \mathrm{e}^{-\,0,046x}$.
Cette dérivée est négative pour tout x de l'intervalle $[0\ ;30]$.

c.

x	0	30
$f(x)$	22 ↘	5,5

d. $A(0\ ;22)$
Coefficient directeur de $T = f'(0) \approx -\,1,012$.
Équation de T : $y = -\,1,022x + 22$.



3. a. Temps ≈ 25 secondes.

b. $7,2 \div 25 = 0,288$
La vitesse est 0,288 m/s.

› Problème 3

Évolution de la population d'une grande ville

1. a.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln p_i$	1,609	1,723	1,808	1,917	2,028	2,128

c. $y = 0{,}021t + 1{,}61$.

d. $\ln p = 0{,}021t + 1{,}61$; $p = e^{0{,}021t + 1{,}61}$;
$p = e^{1{,}61} \times e^{0{,}02t}$; $p = 5\ e^{0{,}02t}$.

e. $p_{35} = 5 \times e^{0{,}02 \times 35} \approx 178{,}535$ millions d'habitants.

2. a. $f'(t) = 0{,}02 \times 5\ e^{0{,}02t} = 0{,}1\ e^{0{,}02t}$.

b. Cette dérivée est positive.

c.

t	-25		35
$f(t)$	$3{,}03$	↗	$10{,}07$

e. $5\ e^{0{,}02t} = 9$; $e^{0{,}02t} = 1{,}8$; $0{,}02t = \ln 1{,}8$;
$t = \dfrac{\ln 1{,}8}{0{,}02} = 50 \ln 1{,}8$.

3. a. $f(28) = 5 \times e^{0{,}02 \times 28} \approx 8{,}8$ millions d'habitants.

b. $t > 50 \ln 1{,}8$; $t > 29{,}39$.
La population dépassera 9 millions d'habitants au cours de l'année de rang 30.

› Problème 4

La radioactivité du césium 137

1. a. $A(100) = 3 \times 10^5\ e^{-0{,}023 \times 100} = 30\ 078$ Bq $= 3{,}01 \times 10^4$ Bq.

b. $1{,}5 \times 10^5 = 3 \times 10^5\ e^{-0{,}023t}$; $e^{-0{,}023t} = 0{,}5$;
$-0{,}023t = \ln 0{,}5$; $t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}023}$.
$t \approx 30$ années.

2. a.

t	0	40	80	100	140	180
$f(t)$	1	0,40	0,16	0,10	0,04	0,02

b. $f'(t) = -0{,}023 \times e^{-0{,}023t}$.

c. La dérivée est négative.

d.

t	0		180
$f(t)$	1	↘	0,02

e. $e^{-0{,}023t} = 0{,}2$; $-0{,}023t = \ln 0{,}2$; $t = \dfrac{\ln 0{,}2}{-0{,}023}$

g. $t \approx 70$.

3. L'activité radioactive est de 20 % de sa valeur initiale au bout de 70 ans.

› Problème 5

Charge d'un condensateur

1. a. $i = 30$ mA.

b. $30 \times e^{-0{,}05t} = 3$; $e^{-0{,}05t} = 0{,}1$; $-0{,}05t = \ln 0{,}1$;
$t = \dfrac{\ln 0{,}1}{-0{,}05} \approx 46$ ms.

2. a.

t	0	10	20	30	40	50	68
$f(t)$	30	18,2	11,0	6,7	4,1	2,5	1

b. $f'(t) = 30 \times (-0{,}05) \times e^{-0{,}05t} = -1{,}5\ e^{-0{,}05t}$.

c. $f'(t)$ est négatif quel que soit t.

d. La fonction f est donc décroissante sur $[0 ; 68]$.

3. a. $\Delta i_1 = 11 - 18{,}2 = -7{,}2$ mA.

b. $\Delta i_2 = 6{,}7 - 11 = -4{,}3$ mA.

c. Pour une même variation Δt, la variation Δi n'est pas la même. Il n'y a donc pas proportionnalité.

Je me teste

(*Livre élève pages 101 et 102*)

EXERCICE Pas de panne !

Une entreprise a mis au point un circuit électronique formé essentiellement de deux composants distincts C_1 et C_2. Le service qualité de l'entreprise, chargé de tester le temps de fonctionnement de ce circuit électronique, vérifie d'abord le nombre d'heures de fonctionnement de chacun des composants C_1 et C_2.

Les probabilités pour que des composants du type C_1 et C_2 fonctionnent sans panne au bout de *t* milliers d'heures d'utilisation, sont données, respectivement, par :

$f_1(t) = \mathrm{e}^{-0,25t}$ et $f_2(t) = \mathrm{e}^{-0,5t}$

où f_1 et f_2 sont des fonctions définies sur $[0\ ;+\infty[$.

On prélève au hasard un composant C_1 et un composant C_2.

1 Étude des fonctions

a. Calculer la probabilité pour que le composant C_1 fonctionne sans panne au bout de 1 000 heures, puis au bout de 3 000 heures.

$f_1(1) \approx 0,7788$; $f_1(3) \approx 0,4723$

b. Même question pour le composant C_2.

$f_2(1) \approx 0,6065$; $f_2(3) \approx 0,2231$

c. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f_1 et f_2.

$f'_1(t) = -0,25\,\mathrm{e}^{-0,25t}$. Cette dérivée est négative quel que soit t.

La fonction f_1 est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

$f'_2(t) = -0,5\,\mathrm{e}^{-0,5t}$. Cette dérivée est négative quel que soit t.

La fonction f_2 est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

d. Comment peut-on interpréter ces résultats pour les composants C_1 et C_2 ?

Plus le nombre d'heures d'utilisation des composants est grand, plus la probabilité de ne pas avoir de panne diminue.

A

Appelez le professeur pour expliquer votre interprétation.

e. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{-0,25t} = 0,4$ et l'inéquation $\mathrm{e}^{-0,5t} \geq 0,3$.

$-0,25t = \ln 0,4$	$-0,5t \geq \ln 0,3$
$t = \dfrac{\ln 0,4}{-0,25}$	$t \leq \dfrac{\ln 0,3}{-0,5}$
$t \approx 3,665$	$t \leq 2,408$

f. Traduire ces résultats par deux phrases relatives aux composants C_1 et C_2.

La probabilité de ne pas avoir de panne avec C_1 est égale à 0,4 après 3 665 heures d'utilisation. La probabilité de ne pas avoir de panne avec C_2 est supérieure ou égale à 0,3 tant qu'on ne dépasse pas 2 408 heures d'utilisation.

2 Représentation graphique

a. On demande de tracer sur la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 pour t variant de 0 à 10.

– Puisque $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont des probabilités, quelles valeurs faut-il donner au minimum et au maximum de y dans la fenêtre graphique ?

y est compris entre 0 et 1.

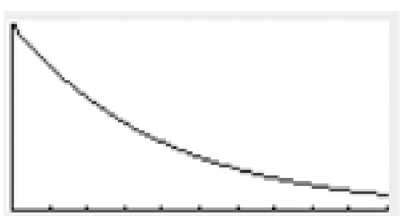
– Relever le paramétrage de la fenêtre graphique utilisée.

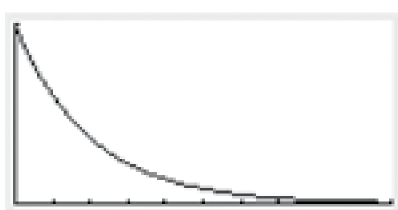
x_{min} : 0 ; x_{max} : 10 ; pas : 1.

y_{min} : 0 ; y_{max} : 1 ; pas : 0,1.

– Tracer, sur la calculatrice, les courbes demandées.

– Esquisser ci-dessous l'allure des courbes obtenues.





b. Vérifier graphiquement la réponse donnée en 1. c.

Les courbes représentatives de f et g sont bien celles de fonctions décroissantes.

c. Vérifier graphiquement les résultats de la question 1. e.

On trace la droite d'équation $y = 0,4$. L'abscisse du point d'intersection avec Cf_1 est 3,665.

On trace la droite d'équation $y = 0,3$. L'abscisse du point d'intersection avec Cf_2 est 2,408.

d. Par lecture graphique, dire lequel des deux composants a la plus grande probabilité de fonctionner sans panne au bout de 6 000 heures.

$f_1(6\,000) > f_2(6\,000)$ d'après le graphique.

Le composant C_1 a la plus grande probabilité de fonctionner sans panne après 6 000 heures d'utilisation.

A

Appelez le professeur pour présenter votre argumentation.

22 Formules des angles associés

(Livre élève pages 103 et 104)

Capacités
- Placer sur le cercle trigonométrique les points « images » des réels $-x$, $\pi - x$, $\frac{\pi}{2} - x$ et $\pi + x$, connaissant l'« image » du réel x
- Puis écrire les cosinus et sinus des réels $-x$, $\pi - x$, $\frac{\pi}{2} - x$ et $\pi + x$ en fonction des cosinus et sinus du réel x

Établir les formules des angles associés

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique tel que le nombre x soit une mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
Ouvrir le fichier « **08_angles_associes.ggb** ».

1. Angles opposés

Soit M' le point du cercle trigonométrique tel que le nombre $-x$ soit une mesure de l'angle $\widehat{AOM'}$.

a. ▪ Faire apparaître le point M' à l'écran en cochant la case $-x$.

Comment se situe le point M' par rapport au point M ? Symétriques par rapport à l'axe (O_x).

Pensez à utiliser les symétries.

▪ Déplacer le point M. Observer les valeurs de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(-x)$ et $\sin(-x)$.

b. En déduire, pour tout réel x, les valeurs de $\cos(-x)$ et $\sin(-x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

$\cos(-x) =$ $\cos(x)$ et $\sin(-x) =$ $-\sin(x)$.

2. Angles supplémentaires

Soit M'_1 le point du cercle trigonométrique tel que le nombre $\pi - x$ soit une mesure de $\widehat{AOM_1'}$.

a. ▪ Faire apparaître le point M'_1 à l'écran en cochant la case $\pi - x$.

Comment se situe le point M'_1 par rapport au point M ? Symétriques par rapport à l'axe (O_y).

▪ Déplacer le point M. Observer les valeurs de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi - x)$.

b. En déduire, pour tout réel x, les valeurs de $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi - x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

$\cos(\pi - x) =$ $-\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) =$ $\sin(x)$.

3. Angles dont la différence des mesures est π

Soit M'_2 le point du cercle trigonométrique tel que le nombre $x + \pi$ soit une mesure de $\widehat{AOM_2'}$.

a. ▪ Faire apparaître le point M'_2 à l'écran en cochant la case $x + \pi$.

Comment se situe le point M'_2 par rapport au point M ? M'_2 est symétrique à M par rapport au point O.

▪ Déplacer le point M. Observer les valeurs de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x + \pi)$ et $\sin(x + \pi)$.

b. En déduire, pour tout réel x, les valeurs de $\cos(x + \pi)$ et $\sin(x + \pi)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

$\cos(x + \pi) =$ $-\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) =$ $-\sin(x)$.

4. Angles complémentaires

Soit M'_3 le point du cercle trigonométrique tel que le nombre $\frac{\pi}{2} - x$ soit une mesure de $\widehat{AOM_3'}$.

a. ▪ Faire apparaître le point M'_3 à l'écran en cochant la case $\frac{\pi}{2} - x$.

Comment se situe le point M'_3 par rapport au point M ? M'_3 et M sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

▪ Déplacer le point M. Observer les valeurs de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

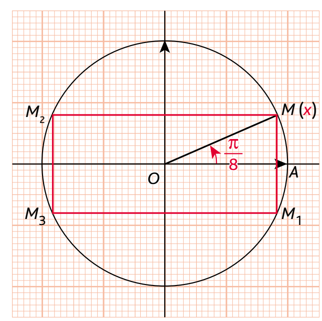
b. En déduire, pour tout réel x, les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ .... et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ ....

Comment placer sur le cercle trigonométrique les points images des réels $-x$, $\pi - x$, $\frac{\pi}{2} - x$ et $\pi + x$?

Soit M le point image du nombre $x = \frac{\pi}{8}$ tel que $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{8}$ rad.

a. Placer sur le cercle trigonométrique les points M_1, M_2, M_3 images des nombres $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$.



▪ Pour les nombres $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, utiliser la configuration du rectangle.

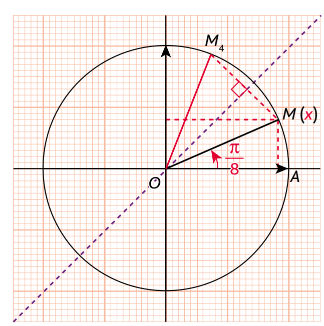
Pour cela, tracer le rectangle $MM_2M_3M_1$ ayant pour axes de symétrie l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

– Pour $-x$, M et M_1 sont symétriques par rapport à (O_x) ....

– Pour $\pi - x$, M et M_2 sont symétriques par rapport à (O_y) ....

– Pour $\pi + x$, M et M_3 sont symétriques par rapport à O ....

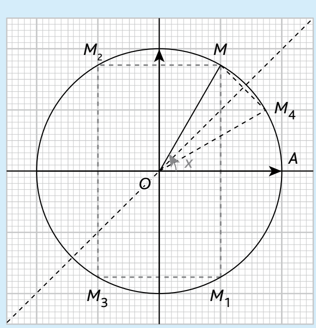
b. Placer sur le cercle trigonométrique le point M_4 image du nombre $\frac{\pi}{2} - x$.



▪ Pour le nombre $\frac{\pi}{2} - x$, utiliser la configuration des « angles complémentaires ».

– M et M_4 sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite en pointillés violets).

RÉPONSE



Exercices

23 Formules d'addition – Fonction cosinus

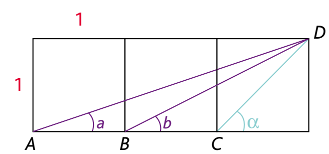
(Livre élève pages 105 et 106)

Capacités
- Mettre en œuvre les formules exprimant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$
- Obtenir la courbe représentative de la fonction cosinus à partir de la relation $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

1 Utiliser les formules d'addition

Les trois carrés

On considère trois carrés de côté 1 disposés comme dans la figure ci-contre.
L'objectif est de comparer $a + b$ et α.



1. Donner sans calcul la valeur de α : 45°.

2. Déterminer, à l'aide de rapports trigonométriques dans un triangle rectangle, les valeurs de : $\cos\alpha$; $\cos a$; $\cos b$; $\sin\alpha$; $\sin a$; $\sin b$.

Pensez à utiliser le théorème de Pythagore.

$AD = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$; $BD = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

$CD = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{CD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos a = \dfrac{3}{AD} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos b = \dfrac{2}{BD} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin a = \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $\sin b = \dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos a = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos b = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin a = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $\sin b = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

3. Sachant que $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$, vérifier que $\cos(a+b) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\cos(a+b) = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{10}} \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{50}} - \dfrac{1}{\sqrt{50}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}}$

$\sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$ d'où $\cos(a+b) = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4. En déduire la valeur de $a + b$, puis la comparer avec la réponse du 1. $\text{Arcos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45° = \alpha$.

On a montré que $\alpha = a + b$.

5. Connaissant maintenant $a + b$, vérifier que $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b \cos a$.

$\sin(a+b) = \sin(45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(a+b) = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{50}} + \dfrac{3}{\sqrt{50}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}}$

$\sin(a+b) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

On admettra que, pour tous les réels a et b, les formules $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ sont vraies.

2 Découvrir la fonction cosinus

On a vu dans la fiche 22 page 104, que pour tout x, $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

1. À l'aide de GeoGebra ou de la calculatrice, représenter dans un même repère les fonctions sinus et cosinus.

2. Comparer la courbe de la fonction cosinus à la courbe de la fonction sinus.

Elle est décalée de $\frac{\pi}{2}$ radians par rapport à l'axe (*Ox*).

La période de la fonction cosinus vaut 2π.

3. Quel nom peut-on donner à la courbe représentative de la fonction cosinus ?

Une sinusoïde.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

Comment représenter la fonction cosinus sur un intervalle donné ?

Si nécessaire, se servir du cercle trigonométrique.

a. Étudier le sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}\right]$.

- Déterminer, sur l'intervalle donné $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}\right]$, les valeurs pour lesquelles $\cos x$ vaut -1, 0 et 1.

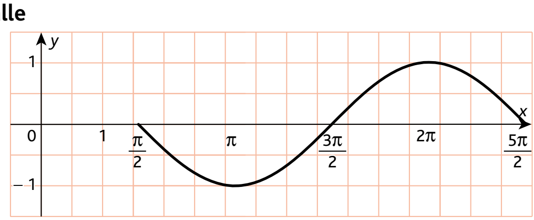
Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}\right]$, les valeurs pour lesquelles $\cos x$ vaut -1, 0 et 1 sont $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$; 2π et $\frac{5\pi}{2}$.

- Mettre ces valeurs dans la première ligne du tableau de variation ci-dessous.
- Construire le tableau de variation.

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$\frac{5\pi}{2}$
$\cos(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

b. Représenter graphiquement la fonction sur cet intervalle

- Placer les points caractéristiques du tableau de variation.
- Tracer la courbe sur l'intervalle donné.



Vous pouvez placer d'autres points en vous aidant des valeurs particulières de cos *x*.

RÉPONSES

Exercices

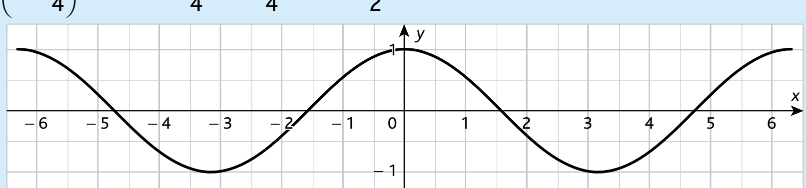
1 $\cos\frac{13\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\sin\frac{13\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$.

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$.

3



4

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

24 Vecteur de Fresnel

Capacités

- Établir des liens entre le vecteur de Fresnel d'une tension ou d'une intensité sinusoïdale de la forme $a \sin(\omega t + \varphi)$ et la courbe représentative de la fonction qui à t associe $a \sin(\omega t + \varphi)$

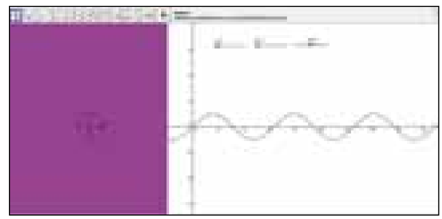
(Livre élève pages 107 et 108)

1 Établir des liens entre le vecteur de Fresnel et une grandeur sinusoïdale

Soit une tension U d'expression $u(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$.

Ouvrir le fichier « **08_fresnel.ggb** ».

Le vecteur de Fresnel est représenté à gauche de l'écran et la représentation graphique de la tension est à droite de l'écran.



1. ▪ Déplacer le curseur « a ».

Indiquer l'influence du paramètre a sur la représentation graphique de la tension et sur le vecteur de Fresnel.

Le paramètre a modifie l'amplitude.

Vous pouvez tracer la courbe de la fonction sinus pour avoir un élément de comparaison.

2. ▪ Déplacer le curseur « ω ».

Indiquer l'influence du paramètre ω sur la représentation graphique de la tension et sur le vecteur de Fresnel.

Le paramètre ω modifie la période du graphique mais pas le vecteur.

3. ▪ Déplacer le curseur « φ ».

Indiquer l'influence du paramètre φ sur la représentation graphique de la tension et sur le vecteur de Fresnel.

Le paramètre décale la courbe et fait tourner le vecteur.

La représentation de Fresnel de la tension U est une « photographie instantanée » du vecteur $\overrightarrow{OM}$, prise à l'instant $t = 0$ lorsque $\overrightarrow{OM}$ fait avec l'origine des phases un angle de φ rad. La norme de $\|\overrightarrow{OM}\|$ est proportionnelle à l'amplitude de U.

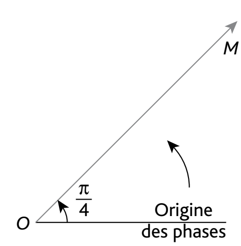
2 Représenter une tension par un vecteur de Fresnel

On veut représenter la tension U aux bornes d'un moteur par un vecteur de Fresnel.

Elle a pour expression $u(t) = 64\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

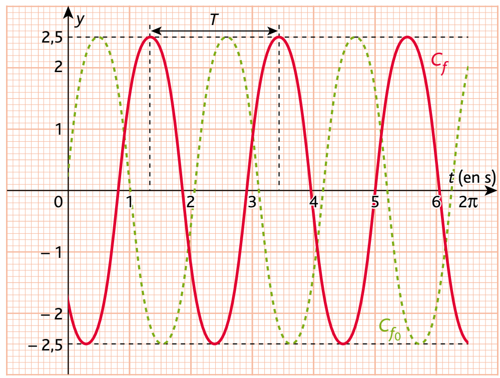
- L'amplitude a du signal vaut 64 ,

  et la phase à l'origine φ vaut $+\frac{\pi}{4}$ rad.
- On choisit une échelle de 1 cm pour 10 volts.
- Tracer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $\|\overrightarrow{OM}\| = a$ et la phase à l'origine égale φ.



Comment construire la représentation de Fresnel à partir de la représentation graphique d'une fonction sinusoïdale f définie pour tout t par $f(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$?

Construire la représentation de Fresnel de la fonction f définie pour tout t à partir de sa courbe représentative C_f donnée sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ ci-dessous.



On peut vérifier l'ordre de grandeur de la pulsation en comptant le nombre de périodes sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

a. Détermination des paramètres a, ω et φ

- Déterminer graphiquement a et T : $a =$ 2,5 et $T =$ 2,1 s.
- Calculer la pulsation ω : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \approx \dfrac{2\pi}{2,1} \approx$ 2,99 rad/s. Arrondie à l'unité, $\omega =$ 3 rad/s.

  Pour déterminer la phase à l'origine, on trace en pointillés verts la représentation graphique de la fonction $f_0(t) = 2,5\sin(3t)$.

- Déterminer graphiquement la valeur Δt du décalage entre les deux courbes. Si $f(0) > 0$ alors $\Delta t > 0$, sinon $\Delta t < 0$. Donc, $\Delta t =$ – 0,8 s.
- Calculer la phase φ à l'aide de la relation :

  $\varphi = \Delta t \times \omega$: – 0,8 × 3 $\varphi =$ – 2,4 rad.

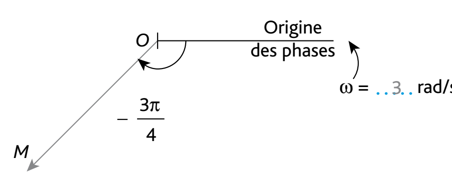
On peut remarquer que $-2,4 \text{ rad} \approx -\dfrac{3\pi}{4}$ rad.

b. Représentation du signal par un vecteur de Fresnel

- Choisir une échelle.

  Comme $a = 2,5$, on choisit 1 cm pour une unité.

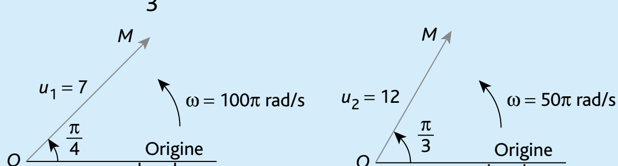
- Tracer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $\|\overrightarrow{OM}\| = 2,5$ et la phase à l'origine égale $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$.



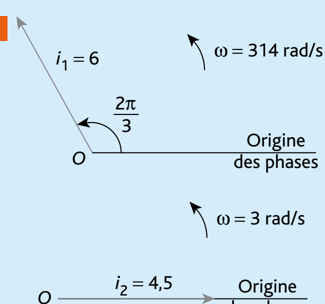
RÉPONSES

1 **a.** u_1 : a = 7 ; $\omega = 100\pi$ rad/s ; $T = 0,02$ s ;
$f = 50$ Hz ; $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.
u_2 : a = 12 ; $\omega = 50\pi$ rad/s ; $T = 0,04$ s ;
$f = 25$ Hz ; $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$.

b.



2



Exercices

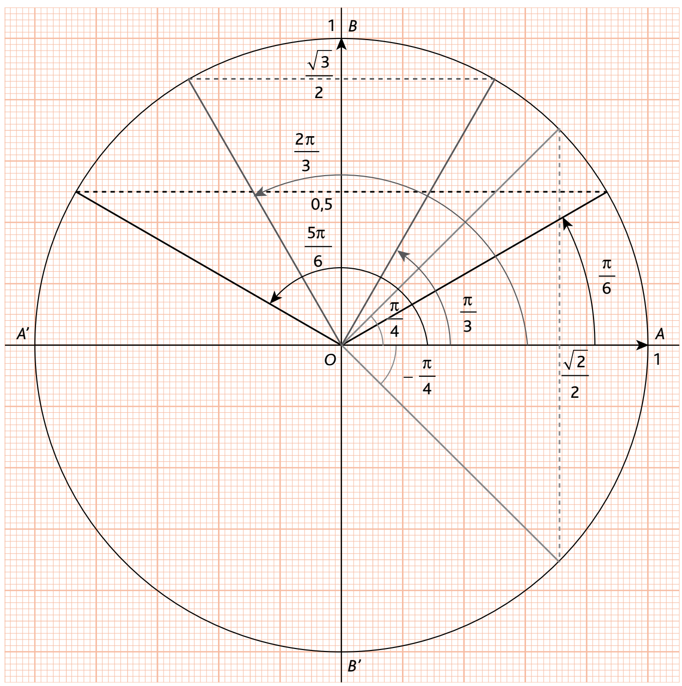
25 Équations trigonométriques

(Livre élève pages 109 et 110)

Capacité

- Résoudre les équations de la forme $\cos x = a$, $\sin x = b$ et $\sin(\omega t + \varphi) = c$.

Soit le cercle trigonométrique et le repère d'axes (OA), (OB). L'unité est le radian.



1 Résoudre l'équation $\cos x = a$ $(-1 \leq a \leq 1)$

On se propose de déterminer x sachant que $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Au nombre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ correspond un unique réel α de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet une deuxième solution sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$. La déterminer à l'aide du cercle trigonométrique : $-\frac{\pi}{4}$. Donner son expression à l'aide de α : $-\alpha$.

Comme la fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π, les solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les réels x tels que $x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $x = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ (k entier relatif).

Soit pour $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$: $x = \frac{\pi}{4} - 1 \times 2\pi$; $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{4} + 1 \times 2\pi$;

$x = -\frac{\pi}{4} - 1 \times 2\pi$; $x = -\frac{\pi}{4}$; $x = -\frac{\pi}{4} + 1 \times 2\pi$, etc.

Le terme $k \times 2\pi$ indique que l'on passe d'un terme à un autre en ajoutant un multiple de 2π.

2 Résoudre l'équation $\sin x = b$ $(-1 \leq b \leq 1)$

On se propose de déterminer x sachant que $\sin x = 0,5$.

1. Au nombre 0,5 correspond un unique réel α de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \alpha = 0,5$: $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

2. L'équation $\sin x = 0,5$ admet une deuxième solution sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$. La déterminer à l'aide du cercle trigonométrique : $\frac{5\pi}{6}$. Donner son expression à l'aide de α : $\pi - \alpha$.

3. La fonction sinus est une fonction périodique de période 2π. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = 0,5$. Ce sont les réels tels que $x = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ et $x = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$ (k entier relatif).

3 Résoudre l'équation $\sin(\omega t + \varphi) = c$ $(-1 \leq c \leq 1)$

On se propose de déterminer t sachant que $\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer, sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, les valeurs α_1 et α_2 tels que $\sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ et $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$.

2. On a $4t + \frac{\pi}{6} = \alpha_1$ et $4t + \frac{\pi}{6} = \alpha_2$. Résoudre ces deux équations.

$4t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$; $4t = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$; $t = \frac{\pi}{6 \times 4} = \frac{\pi}{24}$

$4t + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$; $4t = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$; $t = \frac{\pi}{2 \times 4} = \frac{\pi}{8}$

3. La fonction f tel que $f(t) = \sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$ est périodique de période T.

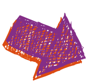
Donner la pulsation ω et en déduire la période T.

$\omega = 4$ et $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

On rappelle que $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

4. En déduire, sur le même modèle que 1. et 2., l'ensemble des solutions de l'équation $\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ce sont les réels t tels que $t = \frac{\pi}{24} + k \times \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{\pi}{8} + k \times \frac{\pi}{2}$ (k entier relatif).



Comment résoudre une équation du type $\cos x = a$?

Résoudre sur $[0\,;4\pi]$ l'équation $\cos x = 0,250$.

- Déterminer, à l'aide de la calculatrice la solution unique α de l'intervalle $[0\,;\pi]$: $\alpha \approx 1,32$.
- Écrire les solutions de l'équation.

  Les solutions sont les réels définis par $x \approx 1,32 + k \times 2\pi$ et $x \approx -1,32 + k \times 2\pi$.
- Donner différentes valeurs à k afin d'obtenir toutes les solutions dans l'intervalle $[0\,;4\pi]$.

  Pour $k = 0$: $x \approx 1,32 + 0 \times 2\pi \approx 1,32$ et $x \approx -1,32 + 0 \times 2\pi \approx -1,32$;

  pour $k = 1$: $x \approx 1,32 + 1 \times 2\pi \approx 7,60$ et $x \approx -1,32 + 1 \times 2\pi \approx 4,96$;

  pour $k = 2$: $x \approx 1,32 + 2 \times 2\pi \approx 13,89$ et $x \approx -1,32 + 2 \times 2\pi \approx 11,25$.
- Ordonner les solutions appartenant à l'intervalle $[0\,;4\pi]$: 1,32 ; 4,96 ; 7,60 ; 1 1,25.

RÉPONSES

Exercice

a. Sur $[0\,;4\pi]$, $\cos x = 0,412$ pour les valeurs 1,146 ; 5,137 ; 7,429 ; 11,420.

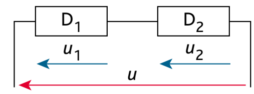
b. Sur $[0\,;4\pi]$, $\cos x = -0,729$ pour les valeurs 2,388 ; 5,529 ; 8,671 ; 11,812.

(Livre élève pages 111 et 112)

26

J'utilise un logiciel (GeoGebra ou calculatrice)

Déterminer la somme de deux fonctions sinusoïdales de même fréquence



Soient D_1 et D_2 deux dipôles montés en séries.

Dans ce circuit la loi d'additivité des tensions est vérifiée à chaque instant.

Pour tout t, $u_1(t) = 48\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $u_2(t) = 30\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$.

Déterminons les caractéristiques de la tension u aux bornes de cette association sachant que $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.

1. Détermination à l'aide des représentations graphiques

a. Calculer la période T des deux tensions et leur tension maximale.

$T_1 =$ 0,02 ; $a_1 =$ 48 ; $T_2 =$ 0,02 ; $a_2 =$ 30 .

b. ▪ Régler l'affichage de la calculatrice ou de GeoGebra afin de pouvoir afficher en abscisses environ trois périodes et en ordonnées un peu plus que la somme des tensions maximales pour les ordonnées positives et négatives.

- Tracer les courbes représentatives de chacune des tensions.
- Tracer la courbe représentative de la tension somme u.

c. Pour la tension somme, déterminer graphiquement : $T =$ 0,02, $a =$ 62 et $\varphi = \frac{\pi}{10}$ rad .

d. Donner l'expression de $u(t)$: $u(t) =$ $62\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{10}\right)$.

e. Les caractéristiques de la tension somme u sont-elles les sommes des caractéristiques des tensions u_1 et u_2 ? Non car $62 \neq 48 + 30$ et $\frac{\pi}{10} \neq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

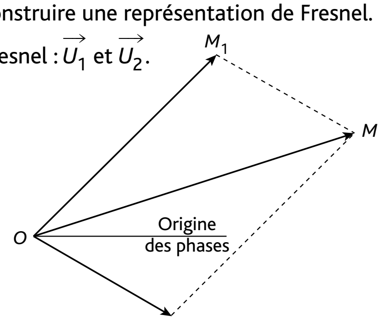
f. Que peut-on dire de la pulsation de la tension somme ? Elle reste la même.

2. Détermination à l'aide des vecteurs de Fresnel

Les deux tensions ont la même pulsation, donc il est possible de construire une représentation de Fresnel.

À chaque tension précédente u_1 et u_2, correspond un vecteur de Fresnel : $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$.

La grandeur somme : $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ correspond à $\vec{U} = \vec{U_1} + \vec{U_2}$.



a. ▪ Tracer les vecteurs de Fresnel $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$.

Échelle : 1 cm pour 10 V.

- Construire le vecteur $\vec{U}$ tel que $\vec{U} = \vec{U_1} + \vec{U_2}$.

b. Déterminer graphiquement l'amplitude et la phase de la tension u : $a =$ 62 ; $\varphi = \frac{\pi}{10}$ rad.

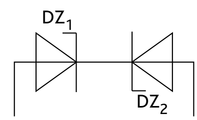
c. Comparer avec la réponse obtenue en 1.d. On obtient les mêmes résultats.

La même étude pour les intensités donnerait les mêmes résultats.

J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Déterminer l'allure d'un signal de sortie

Écrêtage d'un signal



On veut écrêter en double polarité un signal d'entrée (en tension) sans modifier les autres caractéristiques du signal afin d'obtenir une tension de sortie comprise entre – 5 V et 5 V.

Pour cela, on met deux diodes Zener identiques en série, tête-bêche de 4,3 V (+ 0,6 V de tension de Zener). On n'oubliera pas de mettre également un résistor en série pour limiter le courant.

1. Étude du signal d'entrée

Soit une tension d'entrée U_e ayant pour expression $u_e(t) = 8\sin(100\pi t)$. Nous allons chercher l'allure de la tension de sortie U_s et déterminer quel pourcentage du signal d'entrée est écrêté.

a. Donner la pulsation du signal d'entrée et en déduire sa période T : $u = 100\pi$ d'où $T = 0,02$ s.

b. Donner l'amplitude du signal d'entrée : 8.

c. ▪ Régler les axes, sous GeoGebra, pour permettre de visualiser environ deux périodes.

d. ▪ Tracer la représentation graphique du signal d'entrée.

e. On souhaite modéliser l'écrêtage de la tension à + 5 V et à – 5 V.

Quelles sont les équations de droites à éditer ? $y = 5$ et $y = -5$.

▪ Les tracer dans la même fenêtre sous GeoGebra.

2. Allure du signal de sortie

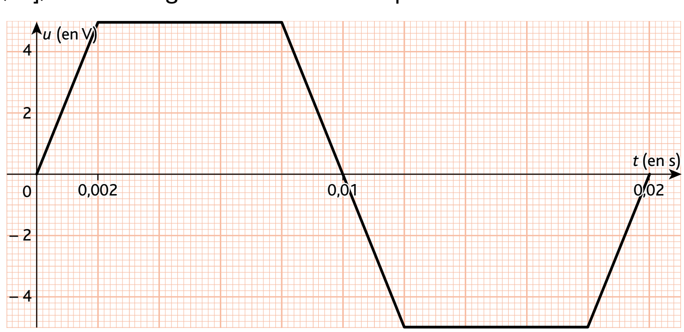
Pour déterminer l'allure du signal de sortie, il faut connaître les abscisses des points d'intersection.

a. ▪ Déterminer, sur deux périodes, les intersections entre le signal et chacune des droites. Pour cela, il est possible d'utiliser le bouton .

Lire graphiquement les abscisses des points d'intersection. Avec $y = 5$: 0,0021 ; 0,0079 ; 0,0221 ; 0,0279.

Avec $y = -5$: 0,0121 ; 0,0179 ; 0,0321 ; 0,0379.

b. Tracer, sur [0 ; 0,02], l'allure du signal de sortie dans le repère suivant :



Exercices & Problèmes

Exercices p. 116 à 119

1. QCM

a. $\dfrac{\pi}{6}$

b. $\dfrac{\pi}{8}$

c. $-\dfrac{2\pi}{3}$

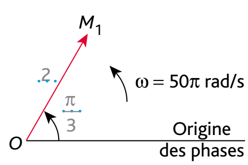
d. $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

e. $\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}$

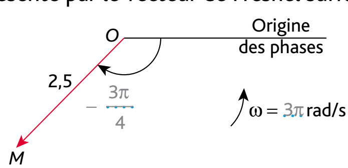
2. Phrases et schémas à compléter

a.

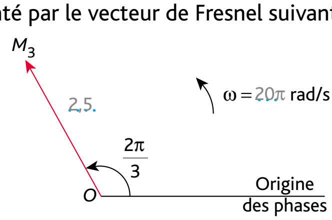


b. Le signal $u(t) = 2{,}5\sin\left(3\pi t - \dfrac{3\pi}{4}\right)$

est représenté par le vecteur de Fresnel suivant :



c. Le signal $u(t) = 2{,}5\sin\left(20\pi t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ est représenté par le vecteur de Fresnel suivant :



3. Associer

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = 0{,}5$

$\sin\left(4t + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $\dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$ (k entier relatif)

$0 + k \times \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{12} + k \times \dfrac{\pi}{2}$ (k entier relatif)

$\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ (k entier relatif)

$\dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ (k entier relatif)

4. QCM

a. 230

b. $-\dfrac{\pi}{3}$

c. 100π

d. $230\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)$

› Angles associés

5. a.

Angles (°)	30	45	60	120	135	150
Sinus	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5
Cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	– 0,5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b.

Angles (°)	– 30	– 45	– 60	– 120	– 135	– 150
Sinus	– 0,5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	– 0,5
Cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	– 0,5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. a. $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos\frac{9\pi}{6}=0$; $\sin\frac{\pi}{6}=0{,}5$; $\sin\frac{5\pi}{6}=0{,}5$; $\sin\frac{7\pi}{6}=-0{,}5$;

$\sin\frac{9\pi}{6}=-1$.

b. $\cos\frac{\pi}{3}=0{,}5$; $\cos\frac{4\pi}{3}=-0{,}5$; $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-0{,}5$;

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0{,}5$; $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

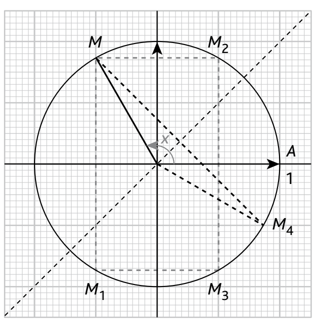
$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. a.



b. $\cos(-x)=-0{,}5$; $\cos(\pi-x)=0{,}5$; $\cos(\pi+x)=0{,}5$;

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin(-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(\pi-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(\pi+x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

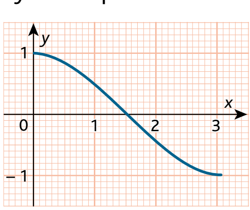
$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=-0{,}5$.

› Fonction cosinus

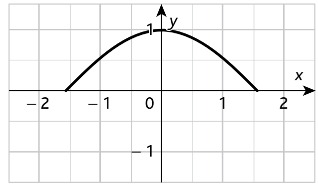
8. a. Une sinusoïde.

b. Il y a deux périodes.

9.



10.



11.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1

12.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	0	↗	1	↘	0

› Formules d'addition

13. $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

14. a. $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x.$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x$

$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x.$

b. $\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin x\sin\frac{2\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x.$

$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos x$

$=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x.$

15. a. $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\cos x+\cos x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin x\sin\frac{2\pi}{3}+\cos x\cos\frac{4\pi}{3}-$

$\sin x\sin\frac{4\pi}{3}=\cos x+(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)$

$+(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=0.$

b. $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin x$

$+ \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \cos x + \sin x \cos \frac{4\pi}{3}$

$+ \sin \frac{4\pi}{3} \cos x = \sin x + (-\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$

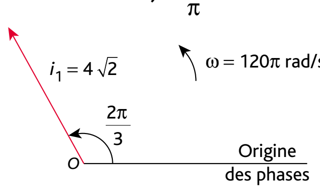
$+ (-\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = 0.$

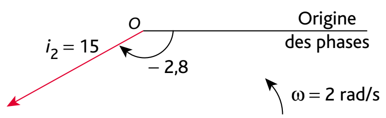
16. $\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x$
$= 2\sin x \cos x.$

› Vecteur de Fresnel

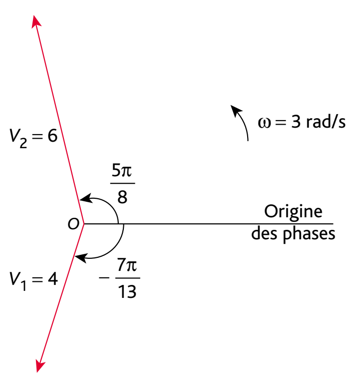
17. a. $i_1 : A = 4\sqrt{2}$; $\omega = 120\pi$; $f = 60$ Hz ; $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
$i_2 : A = 15$; $\omega = 2$; $f = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$ Hz ; $\varphi = -2{,}8$.

b.





18. a. et **b.**



19. $f(t) = 2{,}8\sin(50t)$ et $g(t) = 3{,}7\sin(50t + \frac{\pi}{9})$.

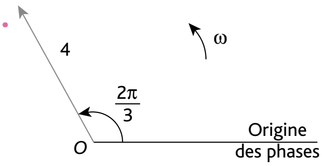
20. $V_1(t) = 1{,}5\sin(20t)$; $V_2(t) = 1{,}5\sin(20t + \frac{2\pi}{3})$;
$V_3(t) = 1{,}5\sin(20t - \frac{2\pi}{3})$.

21. $V_1(t) = 2\sin(8t)$; $V_2(t) = 2\sin(8t - 0{,}64)$ ou
$V_2(t) = 2\sin(8t - \frac{\pi}{5})$; $V_3(t) = 3\sin(8t + 1{,}44)$.

22. a. $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\frac{\pi}{2} - \omega t - \frac{\pi}{6} = -\omega t + \frac{\pi}{3}$

et $\sin(\pi - x) = \sin x$. Soit $x = \pi - (-\omega t + \frac{\pi}{3}) = \omega t + \frac{2\pi}{3}$.

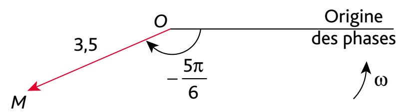
b.

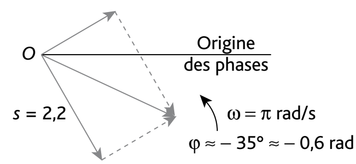


23. a. $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\frac{\pi}{2} - \omega t - \frac{2\pi}{3} = -\omega t - \frac{\pi}{6}$

et $\sin(\pi - x) = \sin x$. Soit $x = \pi - (-\omega t - \frac{\pi}{6})$
$= \omega t + \frac{7\pi}{6}$; et $x = \omega t - \frac{5\pi}{6}$.

b.

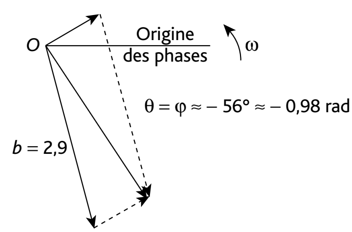




24. $s(t) = 2{,}2\sin(\pi t - 0{,}6)$.

25. $s(t) = 3\sin(\omega t)$.

26.



Graphiquement on trouve $b = 2{,}9$ et $\theta = -0{,}98$.

› Équations trigonométriques

27. a. $0{,}911 + k \times 2\pi$; $2{,}231 + k \times 2\pi$.
b. $0{,}201 + k \times 2\pi$; $-2{,}940 + k \times 2\pi$.

28. a. – 5,925 ; – 3,499 ; 0,358 ; 2,784.
b. – 6,792 ; – 2,633 ; – 0,509 ; 3,650.

29. a. – 2,862 ; – 0,280 ; 3,421 ; 6,003.
b. – 5,444 ; – 3,980 ; 0,839 ; 2,303 ; 7,122 ; 8,586.

30. a. $-2{,}106 + k \times 2\pi$; $2{,}106 + k \times 2\pi$.
b. $-1{,}000 + k \times 2\pi$; $1{,}000 + k \times 2\pi$.

31. a. – 7,996 ; – 4,570 ; – 1,713 ; 1,713 ; 4,570 ;
7,996.
b. – 9,347 ; – 3,219 ; – 3,064 ; 3,064 ; 3,219 ; 9,347.

32. a. $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$.

b. $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$.

c. $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.

33. a. $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$.

b. $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$.

c. $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$.

34. a. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{12}$.

b. $\frac{31\pi}{96}$; $\frac{47\pi}{96}$; $\frac{79\pi}{96}$; $\frac{95\pi}{96}$; $\frac{127\pi}{96}$; $\frac{143\pi}{96}$; $\frac{175\pi}{96}$; $\frac{191\pi}{96}$.

c. $\frac{\pi}{24}$; $\frac{5\pi}{24}$; $\frac{25\pi}{24}$; $\frac{29\pi}{24}$.

35. a. $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{18}$.

b. $-\frac{27\pi}{32}$; $-\frac{11\pi}{32}$; $\frac{5\pi}{32}$; $\frac{21\pi}{32}$.

c. $-\frac{9\pi}{12}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$.

Problèmes p. 119 et 120

› Problème 1

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1. D'après le tableau de variation sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$, la fonction cosinus présente un maximum pour $\theta = 0$ rad. Donc, l'éclairement est maximal pour $\theta = 0$ rad.

2. Le personnage doit se situer au-dessous du projecteur.

› Problème 2

Natures des triangles

1. $\cos \widehat{B} \sin \widehat{C} + \cos \widehat{B} \sin \widehat{C} = \sin(\widehat{B} + \widehat{C}) = \sin(\frac{\pi}{2})$.

D'où $\widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$. Donc, $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$. Le triangle ABC est rectangle en A.

2. $\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} - \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} = \cos(\widehat{B} + \widehat{C}) = \cos(0)$.
D'où $\widehat{B} + \widehat{C} = 0$. Donc, $\widehat{A} = \pi$. Le triangle ABC est plat.

3. $\cos \widehat{B} \sin \widehat{C} + \sin \widehat{B} \cos \widehat{C} = \sin(\widehat{B} + \widehat{C}) = \sin(\frac{\pi}{3})$.

D'où $\widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\pi}{3}$. Donc, $\widehat{A} = \frac{2\pi}{3}$. Le triangle ABC est obtus.

› Problème 3

$\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12})$

$= \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

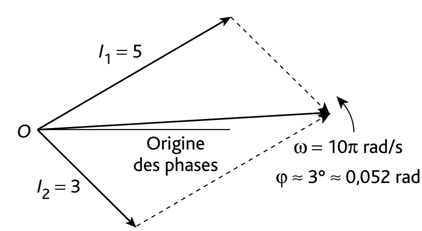
› Problème 4

$u_1 : a = 30$; $\varphi = 0$ rad. $u_2 : a = 50$; $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ rad.

À l'aide d'un diagramme de Fresnel, on lit :
$u : a = 77{,}5$; $\varphi = -19° = -0{,}332$ rad.
Donc, la tension somme a pour valeur efficace $U = 77{,}5$ V et est en retard sur u_1 de 0,332 rad.

› Problème 5

1. Échelle 1/2.



2. Graphiquement on lit : $a = 6{,}5$; $\varphi = 3° = 0{,}052$ rad.

3. $i(t) = 6{,}5\sqrt{2} \sin(100\,\pi t + 0{,}052)$.

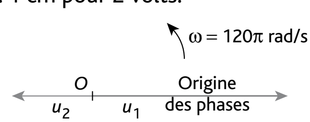
› Problème 6

Le transformateur

1. $T = \frac{1}{60} \approx 0{,}017$ s. $\omega = 120\,\pi$ rad/s.

2. a. $u_1(t) = 10 \sin(120\,\pi t)$
et $u_2(t) = 2 \sin(120\,\pi t - \pi)$.

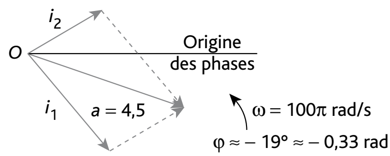
b. Unité : 1 cm pour 2 volts.



› Problème 7

Association de dipôles

L'intensité du courant du dipôle 3 est obtenue par : $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.



on lit : $a = 0{,}45$; $\varphi = -19° = -0{,}33$ rad.
$i_3(t) = 0{,}45\sqrt{2}\ \sin(100\ \pi t - 0{,}33)$.

› Problème 8

D'après l'énoncé A = 20, $\omega = 2\ \pi \times 50 = 100\ \pi$ et $u(0) = 20$.

$u(0) = 20 \sin(\varphi) = 20$. D'où $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

L'expression de la tension est $u(t) = 20\sin(100\pi t + \dfrac{\pi}{2})$.

› Problème 9

1. La pulsation vaut 100 π. Donc, la période vaut 0,02 s.
D'où $T = 0{,}02$.

2. L'équation $u(t) = 220\sqrt{2}$ lorsque $\sin(100\ \pi t - \dfrac{\pi}{3}) = 1$.

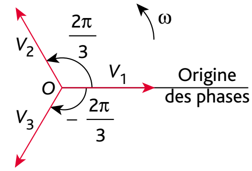
Donc, lorsque $100\ \pi t - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$.

Soit lorsque $t = \dfrac{1}{120} + k \times 0{,}02$.

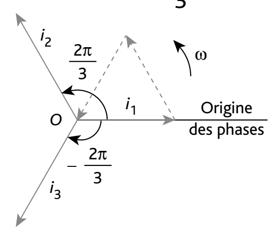
› Problème 10

A. 1. $v_1(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t)$; $v_2(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \dfrac{2\pi}{3})$;
$v_3(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t - \dfrac{2\pi}{3})$.

2.



B. 1. $i_1(t) = 0{,}45\ \sin(\omega t)$; $i_2(t) = 0{,}45\ \sin(\omega t + \dfrac{2\pi}{3})$;
$i_3(t) = 0{,}45\ \sin(\omega t - \dfrac{2\pi}{3})$.



2. L'intensité du courant dans la ligne de neutre est nulle.

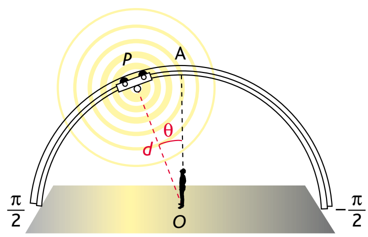
Je me teste

(*Livre élève pages 121 et 122*)

EXERCICE 1 Le spot sur rail

Une source lumineuse se déplace le long d'un rail semi-circulaire comme sur la figure ci-dessous. L'intensité d'éclairement E sur la surface éclairée du centre de la scène est donnée par la relation $E(\theta) = \dfrac{I}{d^2}\cos\theta$ où I est l'intensité lumineuse, d la distance OP et θ l'angle indiqué sur la figure. I et d sont constants.

À chaque réel θ compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ correspond un point P du rail semi-circulaire tel que $\widehat{AOP} = \theta$ rad.



1 À partir du tableau de variation de la fonction cosinus pour x compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$, dresser le tableau de variation de $E(\theta)$ pour θ compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.

θ	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$
$E(\theta)$	0 ↗	$\dfrac{I}{d^2}$	↘ 0

2 Pour quelle valeur de θ l'éclairement théorique E est-il maximal ? Pour $\theta = 0$ rad.

Est-il nul ? Pour $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ rad et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

3 Comment est l'éclairement E lorsque $\widehat{AOP} = -\theta$? L'éclairement E est identique à celui où $\widehat{AOP} = \theta$.

A

Appelez le professeur pour expliquer votre proposition.

EXERCICE 2 Nature d'un triangle

Que peut-on dire d'un triangle ABC tel que $\cos\widehat{B}\cos\widehat{C} - \sin\widehat{B}\sin\widehat{C} = 0$?

$\cos\widehat{B}\cos\widehat{C} - \sin\widehat{B}\sin\widehat{C} = \cos(\widehat{B}+\widehat{C}) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

D'où $\widehat{B}+\widehat{C} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $A = \dfrac{\pi}{2}$.

On conclut que le triangle ABC est rectangle en A.

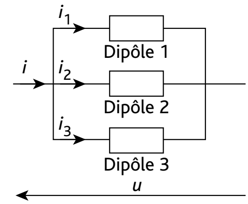
VERS LE CCF

EXERCICE 3 Association de dipôles

Soit l'association de trois dipôles comme ci-contre.

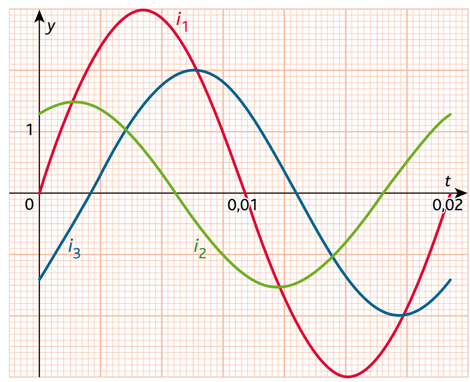
Les intensités, exprimées en ampères, et la tension sont sinusoïdales. La tension u est prise comme origine des phases.

Un oscilloscope a permis de relever le graphique ci-dessous.



1 Exploitation de l'oscillogramme

a. Donner les caractéristiques (amplitude, pulsation, phase à l'origine) de chaque intensité.



I_1 : $A_1 = 3$; $u = \dfrac{2\pi}{0{,}02} = 100\pi$ rad/s

$\varphi_1 = 0$ rad

I_2 : $A_2 = 1{,}5$; $u = 100\pi$ rad/s

$\varphi_2 = 0{,}0033 \times 100\pi = \dfrac{\pi}{3}$ rad

I_3 : $A_3 = 2$; $u = 100\pi$ rad/s

$\varphi_3 = -\,0{,}0025 \times 100\pi = -\dfrac{\pi}{4}$

b. Donner en fonction du temps, l'expression de chaque intensité.

$i_1(t) = 3 \sin(100\pi t)$; $i_2(t) = 1{,}5 \sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$; $i_3(t) = 2 \sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

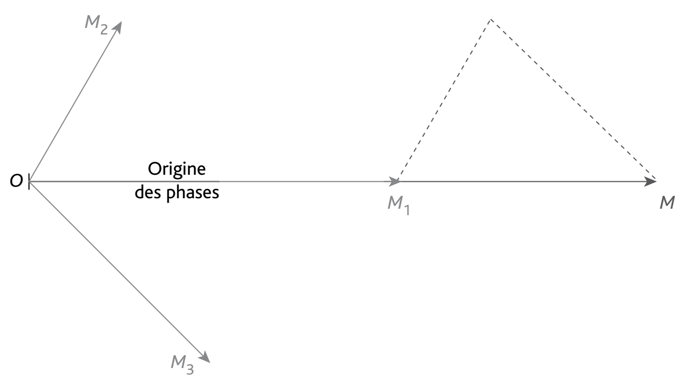
A

Appelez le professeur pour expliquer vos résultats.

2 Représentation de Fresnel

a. Construire la représentation de Fresnel de chacune de ces intensités sur l'origine des phases ci-dessous.

Échelle : 1 cm ≡ 0,5 V



b. En déduire la représentation de Fresnel du courant principal $i = i_1 + i_2 + i_3$.

c. Donner en fonction du temps, l'expression du courant principal i :

$i(t) = 5{,}15 \sin(100\pi t)$.

A

Appelez le professeur pour présenter votre résultat.

27 Expressions du produit scalaire

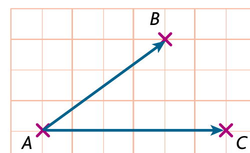
Capacité
- Utiliser les trois expressions du produit scalaire de deux vecteurs pour déterminer des longueurs et des angles

(Livre élève pages 123 et 124)

1 Première approche du produit scalaire

1. Définition

On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $||\overrightarrow{AB}|| = 5$; $||\overrightarrow{AC}|| = 6$ et $\cos \widehat{BAC} = 0{,}8$.



a. Calculer le produit $||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos \widehat{BAC}$. $5 \times 6 \times 0{,}8 = 24$.

b. Le résultat est-il un nombre ou un vecteur ? C'est un nombre.

Le produit $||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos \widehat{BAC}$ est le nombre appelé **produit scalaire des** vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On le note $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ et on lit « vecteur AB scalaire vecteur AC ».

2. Signe du produit scalaire

Ouvrir le fichier « **09_scalaire1.ggb** ».

a. Déplacer successivement le point B sur la demi-droite bleue et le point C sur la demi-droite verte. Faire varier la mesure de l'angle α à l'aide du curseur rouge.

b. Relever une dizaine de valeurs du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ calculées par le logiciel.

17,89 ; 9,84 ; – 4,64 ; – 14,27 ; – 15 ; 23,84 ; 8,31 ; 10,7 ; 0, – 0,93 ; ...

Le signe du produit scalaire est-il toujours le même ? Non.

c. De quelle(s) variable(s) semble dépendre le signe du produit scalaire : la longueur AB, la longueur AC ou la mesure α de l'angle $\widehat{BAC}$? Le signe du produit scalaire dépend de la mesure α de l'angle $\widehat{BAC}$.

d. Faire une conjecture sur le signe de $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ et la vérifier en utilisant la définition du produit scalaire.

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} > 0$ si α est compris entre 0° et 90° ; $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} < 0$ si α est compris entre 90° et 180°.

Le cosinus d'un angle aigu est positif ; celui d'un angle obtu est négatif. On en déduit le signe du produit scalaire.

e. Que se passe-t-il si les points A et B, ou A et C, sont confondus ? $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$.

2 Expression analytique du produit scalaire (avec les coordonnées)

On admet la propriété suivante : dans un repère orthonormal, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;x')$ et $(y\,;y')$, alors on a : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$.

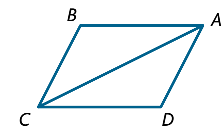
Dans un repère orthonormal, soient les vecteurs $\vec{u}(-2\,;3)$ et $\vec{v}(1\,;5)$.

- Calculer leur produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ à l'aide de la relation précédente.

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = -2 \times 1 + 3 \times 5 = 13$.

3 Troisième expression du produit scalaire

On admet la propriété suivante : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.

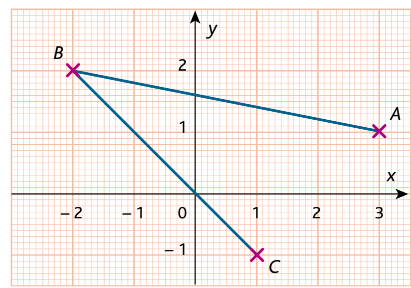


Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $AD = 3$. On se propose de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ à l'aide de la relation précédente.

- Déterminer le vecteur égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
- Donner $\|\overrightarrow{AB}\|$; $\|\overrightarrow{AD}\|$; $\|\overrightarrow{AC}\|$. $\|\overrightarrow{AB}\|=4$; $\|\overrightarrow{AD}\|=3$; $\|\overrightarrow{AC}\|=6$.
  Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ à l'aide de la relation donnée. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(6^2-4^2-3^2)=\frac{1}{2}\times 11=5{,}5$.

Comment calculer un angle à l'aide du produit scalaire ?

Dans un repère orthonormal, on donne les points $A(3\ ;1)$, $B(-2\ ;2)$ et $C(1\ ;-1)$.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ en radians.
Arrondir au millième.



- Calculer les coordonnées des vecteurs correspondant aux côtés de l'angle cherché. Prendre pour origine le sommet de l'angle.
  $\overrightarrow{BA}(5\ ;-1)$; $\overrightarrow{BC}(3\ ;-3)$
- Calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs en utilisant l'expression analytique.
  $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=5\times 3+(-1)\times(-3)=18$
- Calculer la norme de chacun des deux vecteurs
  $\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$; $\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$
- Écrire le produit scalaire de ces deux vecteurs en utilisant la définition.
  $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{26}\times\sqrt{18}\times\cos\widehat{ABC}$
- Écrire que les deux résultats obtenus pour le produit scalaire sont égaux.
  $18=\sqrt{26}\times\sqrt{18}\times\cos\widehat{ABC}$
- Calculer $\cos\widehat{ABC}$: $\cos\widehat{ABC}=\frac{18}{\sqrt{26}\times\sqrt{18}}\approx 0{,}832$.
- Donner la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$: $\widehat{ABC}\approx 34°$.

RÉPONSES

Exercices

1 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\approx 20{,}7$.

2 $\overrightarrow{LP}\cdot\overrightarrow{LM}\approx 83{,}56$.

3 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-8$; $\vec{u}\cdot\vec{w}=22$; $\vec{v}\cdot\vec{w}=-1$.
b. $\vec{u}\cdot\vec{u}=10$; $\vec{v}\cdot\vec{v}=2$; $\vec{w}^2=25$.

28 Vecteurs orthogonaux

Capacité
- Reconnaître des vecteurs orthogonaux, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal

(Livre élève pages 125 et 126)

1 Vérifier deux propriétés du produit scalaire

1. Vérification sur un exemple d'une propriété du produit scalaire

$k(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = (k\vec{u})\,.\,\vec{v}$ où k est une constante et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

On donne, dans un repère orthonormal, $\vec{u}(-2\,;5)$ et $\vec{v}(3\,;4)$. On prend $k = 3$.

- Calculer le nombre $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ en utilisant l'expression analytique du produit scalaire.
  $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -2 \times 3 + 5 \times 4 = 14.$
- Calculer le nombre $3(\vec{u}\,.\,\vec{v})$: $3(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = 3 \times 14 = 42.$
  Calculer les coordonnées du vecteur $3\vec{u}$: $3\vec{u}\,(-6\,;15).$
- Calculer le nombre $(3\vec{u})\,.\,\vec{v}$: $(3\vec{u})\,.\,\vec{v} = -6 \times 3 + 15 \times 4 = 42.$
- Vérifier que $3(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = (3\vec{u})\,.\,\vec{v}$: On a bien $3(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = (3\vec{u})\,.\,\vec{v}.$

2. Vérification sur un exemple d'une autre propriété du produit scalaire

On remarque une ressemblance avec la multiplication des nombres.

$\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$ où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs non nuls.

On donne, dans un repère orthonormal, $\vec{u}(2\,;3)$, $\vec{v}(-1\,;5)$ et $\vec{w}(4\,;-2)$.

- Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{v}+\vec{w}$: $\vec{v}+\vec{w}(3\,;3).$
- Calculer le nombre $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w})$: $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = 2 \times 3 + 3 \times 3 = 15.$
- Calculer le nombre $\vec{u}\,.\,\vec{v}$: $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 2 \times (-1) + 3 \times 5 = 13.$
- Calculer le nombre $\vec{u}\,.\,\vec{w}$: $\vec{u}\,.\,\vec{w} = 2 \times 4 + 3 \times (-2) = 2.$
- Calculer le nombre $\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$: $\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w} = 13 + 2 = 15.$
- Vérifier que $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$: On a bien $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}.$

2 Reconnaître des vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs **orthogonaux** sont deux vecteurs dont les directions sont **perpendiculaires**.

1. Quand le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est-il égal à 0 ?

Ouvrir le fichier « **09_scalaire2.ggb** ».

Placer les points A, B et C pour qu'ils soient distincts.

- Déplacer les points jusqu'à obtenir $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

  Quelle est alors la valeur de α ? $\alpha = 90°$.

- Faire d'autres essais. Trouve-t-on toujours la même valeur pour α ? Oui.
- Que peut-on dire de la direction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$?

  Les vecteurs sont orthogonaux.

2. Produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux

Ouvrir le fichier « 09_scalaire3.ggb ».
Le point *C* se déplace sur la droite *D* perpendiculaire en *A* à la droite (*AB*).

- Comment sont les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Ils sont orthogonaux.
- Déplacer les différents points. Lire la ou les valeurs obtenues pour $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

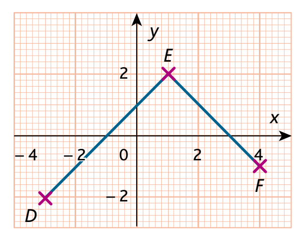
- Justifier ce résultat en utilisant la première expression du produit scalaire.

  Si $\alpha = 90°$, alors $\cos \alpha = 0$.

  On a donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times 0 = 0$.

Comment montrer que deux vecteurs sont orthogonaux ?

Dans un repère orthonormal, on donne les points $D(-3\,;-2)$, $E(1\,;2)$ et $F(4\,;-1)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils orthogonaux ?



- Calculer les coordonnées des vecteurs.

  $\overrightarrow{ED}(-4\,;-4)$ $\overrightarrow{EF}(3\,;-3)$.

- Calculer le produit scalaire des deux vecteurs en utilisant l'expression analytique.

  $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = -4 \times 3 + (-4) \times (-3) = -12 + 12 = 0$.

- Conclure si les vecteurs sont orthogonaux ou non :

  Les vecteurs sont orthogonaux.

On choisit cette expression du produit scalaire car on connaît les coordonnées des vecteurs.

Exercices

RÉPONSES

1 $(2\vec{u}) \cdot (-4\vec{v}) = -8 \times 8 = -64$;
$2\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 2 \times 16 - 2 \times 8 = 16$;
$(\vec{u} + \vec{v})^2 = 16 + 36 + 2 \times 8 = 68$.

2 **a.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \times 4 + 2 \times (-10) = -40$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0{,}5 \times 6 + (-3) \times 1 = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3 **a.** $\overrightarrow{BA}(-3\,;-1)$; $\overrightarrow{BC}(2\,;-6)$
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -6 + 6 = 0$. Donc le triangle *ABC* est rectangle en *B*.
b. Puisque le triangle est rectangle en *B*, s'il est isocèle, c'est en *B* aussi.
$BA = \sqrt{10}$; $BC = \sqrt{40}$.
$BA \neq BC$. Donc le triangle *ABC* n'est pas isocèle.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 129 à 131

1. QCM

a. un nombre

b. $-6\vec{u}\,.\,\vec{v}$

c. 0

d. $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA}$ est négatif.

2. Vrai – Faux

a. Faux

b. Vrai

c. Vrai

d. Faux

3. Phrases à compléter

a. $2\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur.

b. $\vec{u}-0{,}5$ est une écriture incorrecte.

c. $\vec{u}\,.(-0{,}5\vec{v})$ est un nombre.

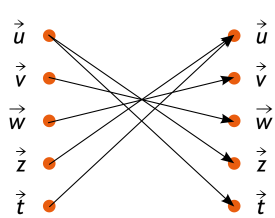
d. $2\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est un nombre.

e. $2\vec{u}\,.\,\vec{v}+3\vec{u}$ est une écriture incorrecte.

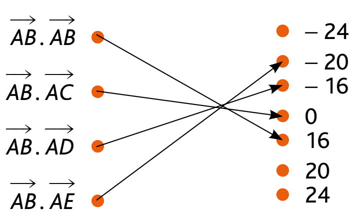
f. $\vec{u}-0{,}5\vec{v}$ est un vecteur.

g. $(-\vec{u})\,.(4\vec{u})$ est un nombre.

4. Associer



5. Associer



› Appliquer la définition du produit scalaire

6. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=12\times 8\times\cos 60°=48.$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=9\times 6\times\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-27.$

7. a. $\widehat{BAC}=45°.$

b. $AC=3\sqrt{2}$ (en cm).

c. $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AB}=3\times 3\times\cos 90°=0$;

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=3\times 3\sqrt{2}\times\cos 45°=9$;

$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD}=3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}\times\cos 90°=0.$

8. a. $AH=\dfrac{8\sqrt{3}}{2}$ cm ; $BH=4$ cm.

b. $\widehat{BAH}=30°.$

c. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=8\times 8\times\cos 60°=32$;

$\overrightarrow{AB}^2=8\times 8\times\cos 0°=64$;

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}=8\times 4\sqrt{3}\times\cos 30°=48$;

$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BH}=8\times 4\times\cos 60°=16$;

$\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{BC}=8\times 4\sqrt{3}\times\cos 90°=0.$

9. a. Le triangle DEF est rectangle en D car $EF^2=DE^2+DF^2$.

b. $\cos\widehat{DFE}=0{,}8$; $\cos\widehat{DEF}=0{,}6.$

c. $\overrightarrow{DE}\,.\,\overrightarrow{DF}=3\times 4\times\cos 90°=0$;

$\overrightarrow{FE}\,.\,\overrightarrow{FD}=4\times 5\times\cos\widehat{DFE}=16$; $\overrightarrow{ED}\,.\,\overrightarrow{EF}=9.$

10. a. $\cos 0°=1$ et $\cos 180°=-1.$

b. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=2\times 5\times 1=10$;

$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}=2\times 3\times(-1)=-6$; $\overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{DB}=1\times 4\times 1=4$;

$\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{CD}=2\times 1\times(-1)=-2.$

11. a. $\widehat{MPN}=45°$; $\widehat{MPR}=135°$; $MP=3\sqrt{2}$ cm.

b. $\overrightarrow{NM}\,.\,\overrightarrow{NR}=3\times 6\times\cos 90°=0$;

$\overrightarrow{PN}\,.\,\overrightarrow{PR}=3\times 3\times(-1)=-9$;

$\overrightarrow{NP}\,.\,\overrightarrow{NR}=3\times 6\times 1=18.$

c. $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{MP}=3\times 3\sqrt{2}\times\cos 45°=9$;

$\overrightarrow{PM}\,.\,\overrightarrow{PR}=3\times 3\sqrt{2}\times\cos 135°=-9.$

› Utiliser l'expression analytique du produit scalaire

12. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 18$; $\vec{u}^2 = 53$; $||\vec{v}||^2 = 41$.

13. a. $\overrightarrow{AB}(-4 ; -4)$; $\overrightarrow{BA}(4 ; 4)$; $\overrightarrow{CB}(-7 ; 7)$; $\overrightarrow{CA}(-3 ; 11)$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-4)\times 3 + (-4)\times(-11) = 32$.

c. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 4\times 7 + 4\times(-7) = 0$. Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

d. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = (-7)\times(-3) + 7\times 11 = 98$.
Donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = 98$.

e. $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$; $BC = \sqrt{49+49} = \sqrt{98}$.

14. a. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -29$

b. $||\vec{u}|| = 5$; $||\vec{v}|| = \sqrt{34}$

c. $\cos\widehat{AOB} \approx -0{,}99469$; $\widehat{AOB} \approx 3{,}04$ rad

15. a. $\overrightarrow{AB}(4 ; 10)$; $\overrightarrow{AC}(-3 ; 2)$.

b. $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{16+100} = \sqrt{116}$; $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times(-3) + 10\times 2 = 8$.

d. $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{8}{\sqrt{116}\times\sqrt{13}} \approx 0{,}206$; $\widehat{BAC} \approx 78°$.

› Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes

16. a. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = 8\times 12\times\cos 70° \approx 32{,}83$.

b. $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{DB}$.

c. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}(DB^2 - 8^2 - 12^2)$

d. $32{,}83 = \dfrac{1}{2}(DB^2 - 8^2 - 12^2)$; $DB^2 \approx 273{,}66$;
$DB \approx 16{,}54$ cm.

e. $AC \approx 11{,}93$ cm.

› Appliquer les propriétés du produit scalaire

17. a. $(2\vec{u})\cdot\vec{v} = 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 2\times(-8) = -16$;
$(-\vec{u})\cdot(5\vec{v}) = -5(\vec{u}\cdot\vec{v}) = -5\times(-8) = 40$.

b. $\vec{u}\cdot(2\vec{u} + \vec{v}) = 2||\vec{u}||^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} = 20 - 8 = 12$;
$(4\vec{u} + 3\vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v}) = 4||\vec{u}||^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v} + 3\vec{u}\cdot\vec{v} - 3||\vec{v}||^2$
$= 40 + 8 - 48 = 0$.

18. a. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$
$= ||\vec{u}||^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

b. $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v})$
$+ ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)$.

› Reconnaître des vecteurs orthogonaux

19. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times(-1) + 2\times 2{,}5 = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

20. $\overrightarrow{AB}(1 ; 2)$; $\overrightarrow{AC}(2 ; -1)$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times 2 + 2\times(-1) = 2 - 2 = 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

21. Vecteurs orthogonaux : $\vec{u}$ et $\vec{w}$; $\vec{u}$ et $\vec{y}$; $\vec{v}$ et $\vec{t}$; $\vec{t}$ et $\vec{z}$.

22. La phrase qui devient fausse en la transposant aux vecteurs est la phrase ④ : le produit scalaire de deux vecteurs peut être nul sans que les vecteurs soient nuls (vecteurs orthogonaux).

› Utiliser le produit scalaire en physique

23. a. $\vec{F}\cdot\vec{F}' = 30\times 10\times\cos 35° \approx 246$ (arrondi à l'unité).

b. $\vec{R}^2 = (\vec{F} + \vec{F}')(\vec{F} + \vec{F}') = \vec{F}^2 + \vec{F}\cdot\vec{F}' + \vec{F}\cdot\vec{F}' + \vec{F}'^2$
$= \vec{F}^2 + \vec{F}'^2 + 2\vec{F}\cdot\vec{F}'$.

c. $||\vec{R}||^2 = 30^2 + 10^2 + 2\times 246 = 1\,492$.
D'où $R = \sqrt{1492} \approx 38{,}6$ N.

24. a. Travail du poids à la descente :
$25\times 10\times\cos 70° \approx 85{,}5$ joules. C'est un travail moteur.

b. Travail du poids à la montée : $25\times 10\times\cos 110° \approx -85{,}5$ joules. C'est un travail résistant.

Problèmes

› Problème 1
Au théâtre ce soir

1. $M(24 ; 8)$; $N(12 ; 16)$.
$\overrightarrow{OM}(24 ; 8)$; $\overrightarrow{ON}(12 ; 16)$

2. $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = 24\times 12 + 8\times 16 = 416$.

3. $||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{24^2 + 8^2} \approx 25{,}3$.

4. $||\overrightarrow{ON}|| = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.

5. $416 = 25{,}3 \times 20 \times \cos \widehat{MON}$; $\cos \widehat{MON} \approx 0{,}8221$; $\widehat{MON} \approx 35°$.

› Problème 2

Glissement interdit en tracteur

1. a.

b. $\overrightarrow{BA}(-8 ; 1)$; $\overrightarrow{BC}(7 ; -4)$.

c. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -56 - 4 = -60$.

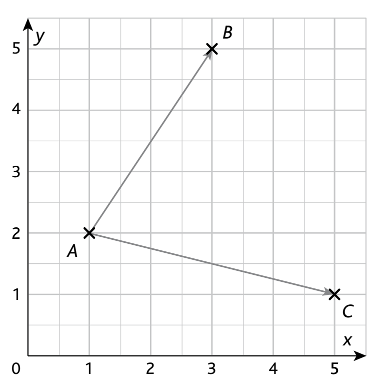
d. $BA = \sqrt{65} \approx 8{,}06$; $BC = \sqrt{65} \approx 8{,}06$.

e. $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{-60}{\left(\sqrt{65}\right)^2} \approx -0{,}923$; $\widehat{ABC} \approx 157°$.

2. La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ est comprise entre 154° et 158°. L'angle correspond donc à la condition d'un glissement minimum.

› Problème 3

1.



2. $\overrightarrow{AB}(2 ; 3)$; $\overrightarrow{AC}(4 ; -1)$; $\overrightarrow{BC}(2 ; -4)$.

3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 - 3 = 5$.

4. $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{13}$; $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{17}$; $||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{20}$.

5. $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{5}{AB \times AC} \approx 0{,}336$; $\widehat{BAC} \approx 70°$.

6. $AB \approx 1{,}8$ m ; $AC \approx 2{,}06$ m ; $BC \approx 2{,}24$ m.

› Problème 4

Découpe d'une pièce

1. a. et **b.** Voir question **2. e.**

2. a. $f'(x) = -0{,}5x + 4$.

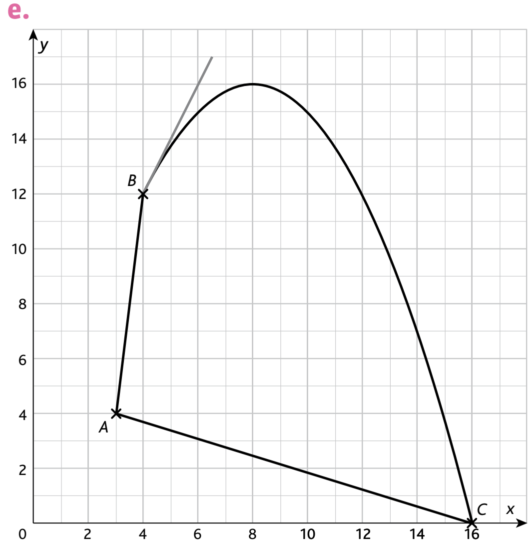
b. $-0{,}5x + 4 > 0$ pour $x < 8$; $-0{,}5x + 4 < 0$ pour $x > 8$.
$f'(x)$ est positif pour x variant de 4 à 8 et négatif pour x variant de 8 à 16.

c.

x	4	8	16
$f(x)$	12 ↗	16	↘ 0

d. $f'(4) = 2$. C'est le coefficient directeur de la tangente T.

e.



3. a. $\overrightarrow{AB}(1 ; 8)$; $\overrightarrow{AC}(13 ; -4)$

b. $AB = \sqrt{65} \approx 8{,}1$; $AC = \sqrt{185} \approx 13{,}6$.

c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 13 - 32 = -19$.

d. $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{-19}{8{,}1 \times 13{,}6} = -0{,}172$; $\widehat{BAC} \approx 100°$.

› Problème 5

Théorème d'Al-Kashi (ou théorème de Pythagore généralisé)

1. $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
$= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}^2$
$= \overrightarrow{BA}^2 + 2(\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}^2$.

2. On sait que $\overrightarrow{BA} = -\,\overrightarrow{AB}$.
$2(\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AC}) = 2(-\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}) = -\,2(\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC})$.
Donc $BC^2 = BA^2 - 2(\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}) + AC^2$ (relation (2)).

3. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos \widehat{BAC}$.

4. On remplace dans la relation (2) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ par l'expression écrite au c.
On obtient la relation (1) :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

5. Si le triangle ABC est rectangle en A, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Donc $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$ et on a bien : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

6. $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos \hat{A}$
$= 144 + 64 - 2 \times 12 \times 8 \times \cos 130° \approx 273{,}68$.
Donc $BD \approx 16{,}54$ cm.
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \times \cos \hat{D}$
$= 64 + 144 - 2 \times 8 \times 12 \times \cos 70° \approx 142{,}33$.
Donc $AC \approx 11{,}9$ cm.

› Problème 6

Tracer sa « route »… en avion

1. La vitesse $\vec{v}$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

2. a. $\widehat{AOC} = 120° - 65° = 55°$.

b. $\widehat{OAB} = 180° - 55° = 125°$.

3. a. $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = 80 \times 20 \times \cos 55° \approx 917{,}72$.

b. $OB^2 = 80^2 + 20^2 + 2 \times 917{,}22 = 8\,635{,}44$;
$OB \approx 93$.

4. $20^2 = 80^2 + 8\,635 - 2 \times 80 \times 93 \times \cos \widehat{AOB}$.
D'où $\cos \widehat{AOB} \approx 0{,}983\,5$ et $\widehat{AOB} \approx 10°$.

5. a. La vitesse de l'avion est environ 93 m/s.

b. La route de l'avion est : 65° + 10° = 75°.

› Problème 7

Au ski

1. L'angle est égal à : 180° – (90° – 35°) = 125°.

2. $W_{\vec{F}} = 400 \times 500 \times \cos 20° = 187\,939$ joules. Le résultat est positif ; c'est un travail moteur.
$W_{\vec{P}} = 750 \times 500 \times \cos 125° = -\,215\,091$ joules. Le résultat est négatif ; c'est un travail résistant.

› Problème 8

Entretien des talus

$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \times OA \times AB \times \cos \widehat{OAB}$.
$OB^2 = 2{,}5^2 + 2{,}2^2 - 2 \times 2{,}5 \times 2{,}2 \times \cos 100° \approx 13$.
$OB \approx 3{,}6$ m.

› Problème 9

Un joli sac

1. a. $A(3\,;7)\,;B(5\,;4{,}5)\,;E(1\,;4{,}5)$.

b. $\overrightarrow{AE}(-\,2\,;-\,2{,}5)\,;\overrightarrow{AB}(2\,;-\,2{,}5)$.

c. $||\overrightarrow{AE}|| = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{10{,}25} \approx 3{,}2$.

2. $\overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{AB} = -\,4 + 6{,}25 = 2{,}25$.
$\cos \widehat{EAB} = \dfrac{2{,}25}{10{,}25} \approx 0{,}2195\,;\widehat{EAB} \approx 77°$.

3. Aire de la pièce : $\dfrac{4 \times 2{,}5}{2} + \dfrac{(4+2) \times 3{,}5}{2}$
$= 15{,}5$ cm^2, soit 16 cm^2 en arrondissant à l'unité.

29 Représentation d'un nombre complexe et calcul sous la forme $a + bj$

(Livre élève pages 135 et 136)

Capacités
- Représenter un nombre complexe par un point
- Calculer avec des nombres complexes

1 Écrire et représenter un nombre complexe

Représentation d'un courant sinusoïdal

En électricité, dans le cas d'un courant sinusoïdal, on note l'intensité i du courant en fonction du temps, sous la forme :
$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$;
et la tension u sous la forme :
$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$.

1. a. On considère l'intensité $i(t) = 4\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Que vaut I ? $I =$ 4 . Que vaut φ ? $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

b. On considère la tension $u(t) = 6\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$.

Que vaut U ? $U =$ 6 . Que vaut φ ? $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

On représente $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, par le **nombre complexe** $z = I(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ où **j** est un nombre imaginaire ayant la propriété de calcul $\mathbf{j^2 = -1}$.
De même, on représente $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ par le nombre complexe :
$z' = U(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$.

2. a. Écrire z et z' pour les deux exemples de la question 1.

$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z' = 6\left(\cos -\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin -\frac{\pi}{4}\right)$.

b. On rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vérifier que $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{j}$ et $z' = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\mathrm{j}$.

$z = 4\left(\frac{1}{2} + \mathrm{j}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\times\frac{1}{2} + 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\mathrm{j} = 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{j}$

$z' = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\times\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 6\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 6\times\frac{-\sqrt{2}}{2}\times\mathrm{j} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,\mathrm{j}$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, le nombre complexe $a + bj$ est **représenté par le point** de coordonnées $(a\,;b)$.

3. Placer, dans un tel repère, les points de coordonnées $(2\,;2\sqrt{3})$ et $(3\sqrt{2}\,;-3\sqrt{2})$, représentant les deux nombres complexes précédents.

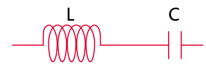
2 Calculer avec les nombres complexes

Impédance d'un circuit LC

Les lois de la physique permettent de calculer l'« impédance complexe » d'un circuit composé.
On considère deux circuits contenant une bobine et un condensateur. L'impédance complexe de la bobine est $z_1 = 2\mathrm{j}$; celle du condensateur est $z_2 = -3\mathrm{j}$.

1. Circuit LC en série

L'impédance complexe z du circuit en série ci-contre est donnée par $z = z_1 + z_2$.

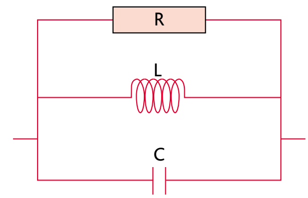


On calcule avec les nombres complexes comme avec les nombres réels, en remplaçant j^2 par -1.

Calculer le nombre complexe z sous la forme $z = a + bj$.

$z = zj + (-3j) = 2j - 3j = -j$.

2. Circuit RLC en parallèle



L'impédance complexe z' du circuit en parallèle ci-contre est donnée par $\frac{1}{z'} = \frac{1}{6} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

a. Montrer que $\frac{1}{2j} = \frac{j}{-2}$ et $\frac{1}{-3j} = \frac{j}{3}$, puis en déduire que $\frac{1}{z'} = \frac{1-j}{6}$.

$\frac{1}{2j} = \frac{1 \times j}{2j \times j} = \frac{j}{2j^2} = \frac{j'}{-2}$ et $\frac{1}{-3j} = \frac{1 \times j}{-3j \times j} = \frac{j}{-3j^2} = \frac{j}{3}$.

D'où $\frac{1}{z'} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2j} + \frac{1}{-3j} = \frac{1}{6} + \frac{j}{-2} + \frac{j}{3} = \frac{1}{6} - \frac{3j}{6} + \frac{2j}{6} = \frac{1-j}{6}$.

b. En multipliant $\frac{6}{1-j}$ au numérateur et au dénominateur par $1 + j$ (que l'on nomme **complexe conjugué** de $1 - j$), montrer que $z' = 3 + 3j$.

$z' = \frac{6}{1-j} = \frac{6 \times (1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{6+6j}{1-j^2} = \frac{6+6j}{1+1} = 3 + 3j$.

Comment calculer avec les nombres complexes ?

Effectuer les calculs suivants en donnant le résultat sous forme algébrique.

a. $(3 + 2j) + (-1 - 4j)$. **b.** $(3 + 2j) \times (-1 - 4j)$. **c.** $(3 + 2j)^2$. **d.** $\frac{1+j}{1-j}$.

- Calculer comme avec les réels, en remplaçant j^2 par -1.

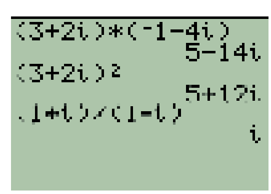
a. $(3 + 2j) + (-1 - 4j) = 3 - 1 + 2j - 4j = 2 - 2j$.

b. $(3 + 2j) \times (-1 - 4j) = -3 - 12j - 2j - 8j^2 = -3 + 8 - 12j - 2j = 5 - 14j$.

c. $(3 + 2j)^2 = 9 + 2 \times 3 \times 2j + (2j)^2 = 9 + 12j - 4 = 5 + 12j$.

- Pour un quotient, multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

d. $\frac{1+j}{1-j} = \frac{1+j}{1-j} \times \frac{1+j}{1+j} = \frac{(1+j)^2}{1-j^2} = \frac{1+2j+j^2}{1+1} = \frac{2j}{2} = j$.



- On peut vérifier les calculs à l'aide de la calculatrice où j est noté i (on obtient éventuellement des valeurs approchées).

RÉPONSES

Exercice

a. $z + z' = -2 - 2j$.
b. $3z - 2z' = 6 - 3j + 8 - 2j = 14 - 5j$.
c. $z \times z' = (2 - 3j)(-4 + j)$
$= -8 + 2j + 12j + 3 = -5 + 14j$.
d. $z^2 = (2 - 3j)^2 = 4 - 12j + 9j^2 = -5 - 12j$.

30 Forme algébrique et forme trigonométrique d'un nombre complexe

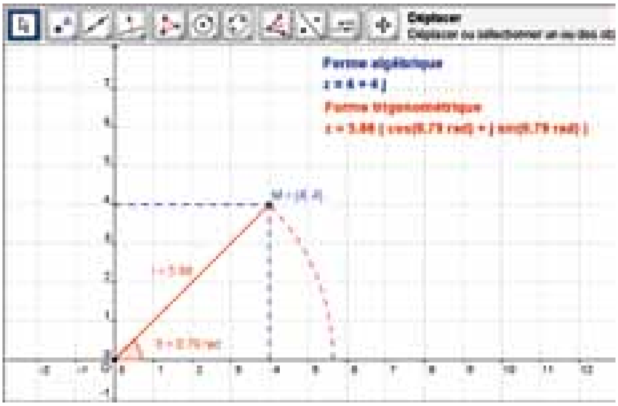
(Livre élève pages 137 et 138)

Capacité
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement

Formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe

Ouvrir le fichier « **10_formes_complexe.ggb** ».

Le point M de coordonnées (4 ; 4) représente le nombre complexe $z = 4 + 4\text{j}$.



L'écriture $a + b\text{j}$ est la **forme algébrique** d'un nombre complexe z.
a est la **partie réelle** de z, et b est la **partie imaginaire** de z.

Le point M peut aussi être repéré par la distance r et l'angle θ. On a alors une écriture de z sous la forme :

$z = r(\cos\theta + \text{j}\sin\theta) \approx 5{,}66(\cos 0{,}79 + \text{j}\sin 0{,}79)$.

L'écriture $r(\cos\theta + \text{j}\sin\theta)$ est la **forme trigonométrique** de z.
r est le **module** de z, et θ est un **argument** de z.

En déplaçant le point M, donner (avec la précision d'affichage du fichier)

1. sous forme trigonométrique :

$z_1 = -3 + 2\text{j} =$ 3,6(cos 2,55 + j sin 2,55) ; $z_2 = 2 - 5\text{j} =$ 5,37(cos 5,09 + j sin 5,09) ;

$z_3 = 7 =$ 7(cos 0 + j sin 0) ; $z_4 = \text{j} =$ 1(cos 1,55 + j sin 1,55) ;

$z_5 = -3 =$ 3(cos 4,7 + j sin 4,7).

2. sous forme algébrique :

$z_6 = 5(\cos 0{,}5 + \text{j}\sin 0{,}5) =$ 4,38 + 2,4j ;

$z_7 = 4{,}47(\cos 5{,}18 + \text{j}\sin 5{,}18) =$ 2 − 4j.

Comment passer d'une forme d'écriture à une autre ?

a. Écrire sous forme algébrique : $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{j}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; $z_2 = 7(\cos\pi + \sin\pi)$; $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + \text{j}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

- Calculer $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$. La forme algébrique est : $z = a + b\text{j}$.

– Forme algébrique de $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{j}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$:

$a = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$b = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$.

Donc la forme algébrique de z_1 est : $z_1 = \sqrt{3} + \text{j}$.

Contrôler les résultats obtenus à l'aide d'une figure dans le plan complexe !

– Forme algébrique de $z_2 = 7(\cos\pi + \sin\pi)$:

$a = 7\cos(\pi) = 7\times(-1) = -7$. $b = 7\sin(\pi) = 7\times 0 = 0$.

Donc la forme algébrique de z_2 est : $z_2 = -7$.

– Forme algébrique de $z_3 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{-\pi}{2}\right)$:

$a = 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\times 0 = 0$. $b = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\times(-1) = -2$.

Donc la forme algébrique de z_3 est : $z_3 = -2\mathrm{j}$.

- Vérification à l'aide d'une calculatrice :

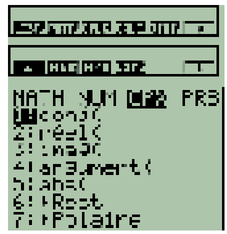
  Sur CASIO, on accède à CPLX par la touche OPTN.

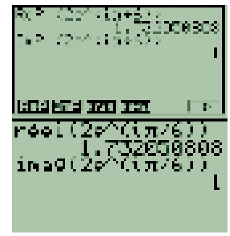
  Sur TI, on accède à CPX par la touche MATH.

  Sur la calculatrice, la forme trigonométrique $r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$ est traduite par re^(i θ).

  Les images ci-contre montrent la vérification pour z_1.

  Vérifiez de même, avec votre calculatrice, les résultats pour z_2 et z_3.





b. Déterminer le module et un argument de : $z_4 = -1 + \mathrm{j}$; $z_5 = 2\mathrm{j}$.

- Pour calculer le module r d'un nombre complexe, on utilise la formule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

  – Module de $z_4 = -1 + \mathrm{j}$: $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

  – Module de $z_5 = 2\mathrm{j}$: $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$.

- Pour déterminer un argument θ d'un nombre complexe, on utilise : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$.

  θ est déterminé à 2π près par une valeur exacte si c'est un « angle usuel » ou sinon par une valeur approchée.

Pour trouver θ, tracer un cercle trigonométrique au brouillon.

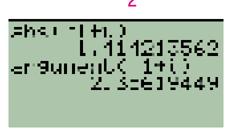
  – Argument de $z_4 = -1 + \mathrm{j}$:

  $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D'où $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

  – Argument de $z_5 = 2\mathrm{j}$:

  $\cos\theta = \frac{0}{2} = 0$ et $\sin\theta = \frac{2}{2} = 1$. D'où $\theta = \frac{\pi}{2}$.

- Vérification à l'aide d'une calculatrice :



Exercice

RÉPONSES

$|z_1| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Donc $z_1 = [3\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}]$.

$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\theta = \frac{\pi}{4}$. Donc $z_2 = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]$.

$|z_3| = 7$; $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = -1$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Donc $z_3 = [7, -\frac{\pi}{2}]$.

$|z_4| = 5$; $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$ d'où $\theta = 0$.

Donc $z_4 = [5, 0]$.

$z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$. $|z_5| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Donc $z_5 = [1, -\frac{\pi}{3}]$.

(Livre élève pages 139 et 140)

31 J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Analyser un ensemble de points

Fonction de transfert d'un montage électronique

Signal d'entrée → Montage électrique → Signal de sortie

En électronique, pour certains circuits électriques parcourus par un courant sinusoïdal, on est amené à s'intéresser au quotient $H(\omega)$ de l'impédance complexe de sortie par l'impédance complexe d'entrée, en fonction de la pulsation ω du courant. La fonction $\omega \mapsto H(\omega)$ se nomme « fonction de transfert ».

On considère un montage pour lequel la fonction de transfert est donnée, pour tout nombre réel ω de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, par :

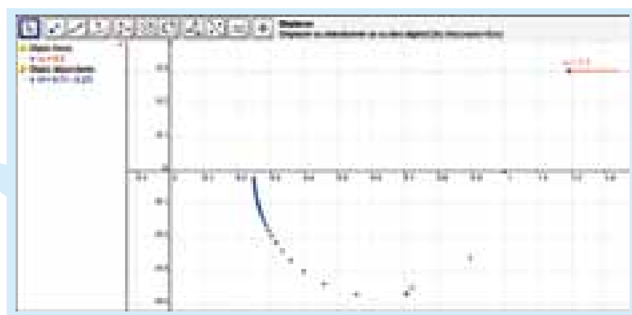
$$H(\omega) = \frac{1 + \mathrm{j}\omega}{1 + 4\mathrm{j}\omega}.$$

Sur GeoGebra, on note i le nombre complexe noté j en électricité.

1. Lieu de transfert

Avec GeoGebra, créer un curseur ω allant de 0 à 10 avec un incrément de 0,05, puis créer le point H en entrant dans la barre de saisie : H = (1 + i * ω) / (1 + 4 * i * ω).

(On peut aussi utiliser le fichier « **10_tranfert.ggb** » du CD-Rom.)



a. Calculer $H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \frac{1}{2}\mathrm{j}}{1 + 2\mathrm{j}}$.

$H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{j}\right)(1 - 2\mathrm{j})}{(1 + 2\mathrm{j})(1 - 2\mathrm{j})} = \frac{1 - 2\mathrm{j} + \frac{1}{2}\mathrm{j} + 1}{1 + 4} = \frac{2}{5} - \frac{3}{10}\mathrm{j} = 0{,}4 - 0{,}3\mathrm{j}.$

Vérifier la réponse à l'aide de GeoGebra.

b. À l'aide de la trace du point H, vérifier que l'ensemble des points H, nommé lieu de transfert, se situe sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Centre $A(0{,}625\,;0)$. Rayon $r = 0{,}375$.

2. Argument minimal de $H(\omega)$

a. On note θ la mesure, exprimée en radians, d'un argument du nombre complexe $H(\omega)$, comprise dans l'intervalle $\left]\frac{3\pi}{2}\,; 2\pi\right[$. Faire afficher la valeur de θ sur la figure GeoGebra.

b. Rechercher une valeur approchée, à 0,01 radian près, de la valeur minimale de θ.

$\theta \approx 5{,}64$ rad.

J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Algorithme de calcul avec des nombres complexes

Ensemble de Mandelbrot

Dans cette activité, on note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Soit c un nombre complexe, on considère les nombres complexes z_n définis par $z_0 = 0$ et, pour tout entier n, $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

On dit que le point C, représentant le nombre complexe c, est dans l'ensemble de Mandelbrot, lorsque tous les nombres complexes z_n ont un module inférieur ou égal à 2.

Ouvrir le fichier « **10_Mandelbrot.ggb** », qui calcule et représente les dix premiers nombres z_n.

1. Étude pour $c = -1$

On a $z_0 = 0$; $z_1 = -1$; $z_2 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$.

a. Calculer z_3 puis z_4.

$z_3 = z_2^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$; $z_4 = z_3^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$.

b. Que valent les prochains nombres z_n ?

-1 et 0.

c. Le point correspondant à $c = -1$ est-il dans l'ensemble de Mandelbrot ?

Oui car le module de z_n vaut 0 ou 1.

2. Étude pour $c = \mathrm{i}$

Modifier la valeur de c par la ligne de saisie. On a $z_0 = 0$; $z_1 = \mathrm{i}$; $z_2 = (\mathrm{i})^2 + \mathrm{i} = -1 + \mathrm{i}$.

a. Montrer que $z_3 = -\mathrm{i}$ puis calculer z_4.

$z_3 = (-1 + \mathrm{i})^2 + \mathrm{i} = +1 - 2\mathrm{i} - 1 + \mathrm{i} = -\mathrm{i}$; $z_4 = (-\mathrm{i})^2 + \mathrm{i} = -1 + \mathrm{i}$.

b. Que valent les prochains nombres z_n ?

$-\mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$.

c. Calculer les modules de $-\mathrm{i}$ et de $-1 + \mathrm{i}$.

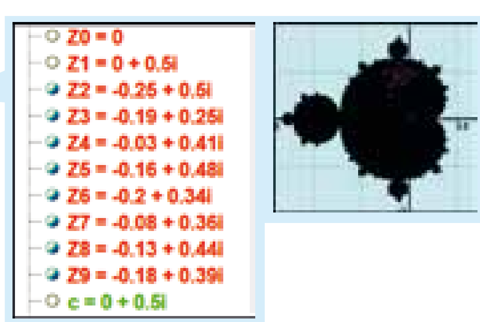
$|-\mathrm{i}| = 1$ et $|-1 + \mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

d. Le point correspondant à $c = \mathrm{i}$ est-il dans l'ensemble de Mandelbrot ? Oui.

3. Étude pour $c = 0{,}5\mathrm{i}$

GeoGebra affiche les dix premiers points correspondant aux nombres z_n dans le disque de centre O et de rayon 2. Que peut-on en déduire pour les modules des nombres complexes z_n calculés ?

Ils sont inférieurs à 2.



4. Étude pour $c = 0{,}5 + 0{,}5\mathrm{i}$

a. Calculer le module de $z_5 = 3{,}29 + 1{,}34\mathrm{i}$.

$|z_5| = \sqrt{3{,}29^2 + 1{,}34^2} \approx 3{,}55$.

b. Le point correspondant à $c = 0{,}5 + 0{,}5\mathrm{i}$ est-il dans l'ensemble de Mandelbrot ?

Non car $|z_5| > 2$.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 143 à 145

1. QCM

a. $1 + 5j$.

b. $-\dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}j$.

c. 2.

d. $-\dfrac{2\pi}{3}$.

e. 2.

f. $-\dfrac{\pi}{6}$.

g. $\sqrt{2}$.

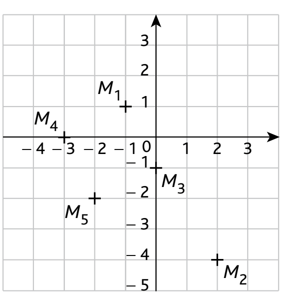
h. $\dfrac{3\pi}{4}$.

i. 2.

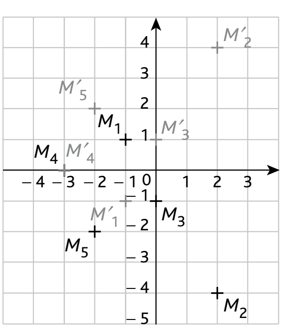
j. $-\dfrac{\pi}{2}$.

› Représenter un nombre complexe

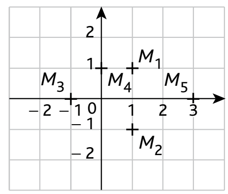
2.



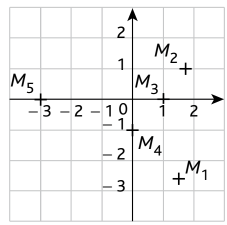
3.



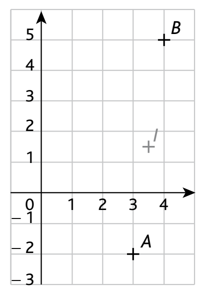
4.



5.

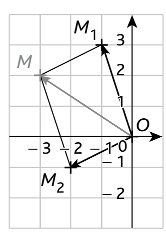


6. a. et c.

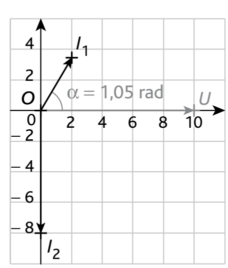


b. $z = \dfrac{3 - 2j + 4 + 5j}{2} = \dfrac{7 + 3j}{2} = 3{,}5 + 1{,}5j$.

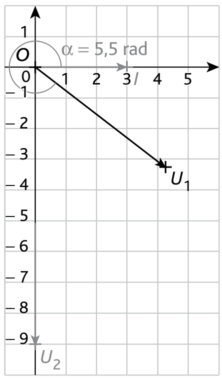
7.



8. a.



b.



› Calculer avec les nombres complexes

9. a. $z + z' = 2 + 0j = 2.$

b. $3z - 2z' = 9 + 6j + 2 + 4j = 11 + 10j.$

c. $z \times z' = (3 + 2j)(-1 - 2j) = -3 - 6j - 2 - 4j$
$= -5 - 10j.$

d. $z^2 = 9 + 12j + 4j^2 = 5 + 12j.$

10. a. $(1 + j)^2 = 1 + 2j + j^2 = 1 + 2j - 1 = 2j.$

b. $(2 - j)^2 = 4 - 4j + j^2 = 4 - 4j - 1 = 3 - 4j.$
$(3 - j)(3 + j) = 9 - j^2 = 9 + 1 = 10.$

11. a. $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j.$

b. $\frac{1}{z'} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j.$

c. $\frac{z}{z'} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}j.$

d. $\frac{1+z}{1-z'} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}j.$

12. a. $\frac{1}{z} = \frac{1}{3-2j} = \frac{3+2j}{9+4} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}j.$

b. $\frac{1}{z'} = \frac{1}{1-j} = \frac{1+j}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j.$

c. $\frac{z}{z'} = \frac{3-2j}{1-j} = \frac{(3-2j)(1+j)}{1+1} = \frac{3+3j-2j+2}{2}$
$= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}j.$

d. $\frac{1+z}{1-z'} = \frac{-2-2j}{2-j} = \frac{(-2-2j)(2+j)}{4+1}$
$= \frac{-4-2j+4j-2}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{2}{5}j.$

13. a. $z = \frac{(3-2j)(5-j)}{25+1} = \frac{15-3j-10j-2}{26}$
$= \frac{13}{26} - \frac{13}{26}j.$
$z' = \frac{(3+2j)(5+j)}{25+1} = \frac{15+3j+10j-2}{26} = \frac{13}{26} + \frac{13}{26}j.$

b. On constate que $\bar{z} = z'.$

14. a. $\underline{Z} = 10 - 50j.$

b. $\frac{1}{\underline{Z'}} = \frac{1}{10} + \frac{j}{-150} + \frac{j}{200} = \frac{1}{10} + \frac{-4j}{600} + \frac{3j}{600} = \frac{60-j}{600}.$

$\underline{Z'} = \frac{600}{60-j} = \frac{600(60+j)}{3600+1} = \frac{36\,000}{3601} + \frac{600}{3\,601}j.$

15. a. $T = \frac{12}{25} - \frac{16}{25}j.$

b. $|T| = \frac{\sqrt{400}}{25} = \frac{20}{25} = 0{,}8.$

16. L'équation équivaut à $(1 + 3j)z = -2 + 4j$ c'est-à-dire $z = \frac{-2+4j}{1+3j}.$

$z = \frac{(-2+4j)(1-3j)}{1+9} = \frac{-2+6j+4j+12}{10} = 1 + j.$

17. a. $(z - j)(z + j) = z^2 - j^2 = z^2 + 1.$

b. On a $(z - j).(z + j) = 0$ lorsque $z - j = 0$ ou $z + j = 0.$
Les solutions sont j et – j.

› Passer d'une forme à une autre

18. $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6})$
$= 3(\frac{\sqrt{3}}{6} + j \times \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}j.$

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \times \frac{\sqrt{2}}{2})$
$= \sqrt{2} + \sqrt{2}j.$

$z_3 = \frac{1}{2}(\cos\frac{-\pi}{3} + j\sin\frac{-\pi}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + j \times \frac{-\sqrt{3}}{2})$
$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j.$

$z_4 = 1(\cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j.$

19. $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + j \times \frac{\sqrt{3}}{2})$
$= 1 + \sqrt{3}j.$

$z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) = 3j.$

$z_3 = \frac{1}{4}(\cos 4\pi + j\sin 4\pi) = \frac{1}{4}.$

$z_4 = \frac{1}{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j) = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}j.$

20. $z_1 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$; $z_2 = \left[5, -\frac{\pi}{2}\right]$; $z_3 = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$;

$z_4 = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$; $z_5 = \left[1, -\frac{\pi}{4}\right].$

21. $|z_1| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16.$

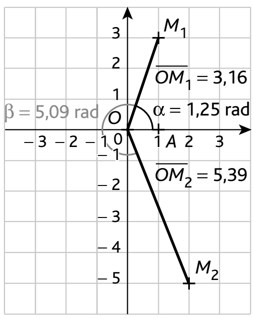
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

En utilisant la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\theta \approx 1{,}25$ rad.

$|z_2| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \approx 5{,}39.$

$\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$ et $\sin\theta = \dfrac{-5}{\sqrt{29}}$.

En utilisant la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\theta \approx -1{,}19$ rad.



22. $|z_1| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

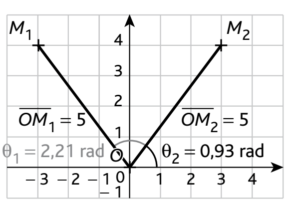
$\cos\theta = \dfrac{-3}{5}$ et $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$.

En utilisant la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\theta \approx 2{,}21$ rad.

$|z_2| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$.

En utilisant la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\theta \approx 0{,}93$ rad.



Problèmes p. 145 et 146

› Problème 1
Complexes en vrac

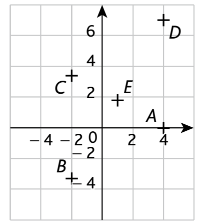
1. a. $z_3 = -2 + 2j\sqrt{3}.$

$z_4 = 8(\cos\dfrac{\pi}{3} + j\sin\dfrac{\pi}{3}) = 8(\dfrac{1}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 4 + 4\sqrt{3}j.$

$z_5 = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + j\sin\dfrac{\pi}{3}) = 2(\dfrac{1}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \sqrt{3}j.$

b. $z_1 = [4\,;0]\,;\, z_2 = 4(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}j) = [4\,; -\dfrac{2\pi}{3}].$

2.



3. a. $z_2^2 = 16(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}j)^2 = 16(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}j - \dfrac{3}{4})$
$= -8 + 8\sqrt{3}j.$

b. $z_2^2 + 4z_2 + 16 = -8 + 8\sqrt{3}j + 4(-2 - 2\sqrt{3}j) + 16$
$= -8 + 8\sqrt{3}j - 8 - 8\sqrt{3}j + 16 = 0.$

› Problème 2
Impédance d'un circuit RLC

1. $\underline{Z}_1 = 10\,;\, \underline{Z}_2 = 200j\,;\, \underline{Z}_3 = -120j.$

2. $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{200j} + \dfrac{1}{-120j}$

$= \dfrac{60}{600} + \dfrac{-3j}{600} + \dfrac{5j}{600} = \dfrac{60+2j}{600}.$

$\underline{Z} = \dfrac{600}{60+2j} = \dfrac{600(60-2j)}{3\,600+4} = \dfrac{36\,000}{3\,604} - \dfrac{1200}{3\,604}j.$

3. a. $\dfrac{1}{\underline{Z}'} = \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} = \dfrac{1}{200j} + \dfrac{1}{-120j} = \dfrac{j}{-200} + \dfrac{j}{120}$

$= \dfrac{-3j}{600} + \dfrac{5j}{600} = \dfrac{j}{300}.$

$\underline{Z}' = \dfrac{300}{j} = \dfrac{300j}{-1} = -300j.$

b. $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}' = 10 - 300j.$

4. a. $\dfrac{1}{\underline{Z}''} = \dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{200j} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{j}{200} = \dfrac{20-j}{200}.$

$\underline{Z}'' = \dfrac{200}{20-j} = \dfrac{200(20+j)}{400+1} = \dfrac{4000}{4001} + \dfrac{200}{4001}j.$

b. $\underline{Z} = \underline{Z}'' + \underline{Z}_3 = \dfrac{4000}{4001} + \dfrac{200}{4001}j - 120j$
$= \dfrac{4000}{4001} + \dfrac{479920}{4001}j.$

› Problème 3

Étude, à l'aide de GeoGebra d'un ensemble de nombres complexes

1. a. $z_3 = z_2^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$.
$z_4 = z_3^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$.

b. Les prochains nombres z_n valent tous 0 ou 1.

c. Le point correspondant à $c = -1$ est dans l'ensemble de Mandelbrot car le module de z_n vaut 0 ou 1.

2. a. $z_3 = (-1 + \mathrm{i})^2 + \mathrm{i} = 1 - 2\mathrm{i} - 1 + \mathrm{i} = -\mathrm{i}$.
$z_4 = (-\mathrm{i})^2 + \mathrm{i} = -1 + \mathrm{i}$.

b. Les prochains nombres z_n valent $-\mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$.

c. On a $|-\mathrm{i}| = 1$ et $|-1+\mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

d. Le point correspondant à $c = \mathrm{i}$ est dans l'ensemble de Mandelbrot.

3. Les modules des nombres z_n calculés sont inférieurs à 2.

4. a. $|z_5| = \approx 3{,}55$.

b. Le point correspondant à $c = 0{,}5 + 0{,}5\mathrm{i}$ n'est pas dans l'ensemble de Mandelbrot car $|z_5|$ est strictement supérieur à 2.

› Problème 4

Rapport d'onde stationnaire

1. a. $z_1 = z - z' = 75 - 46{,}6 + 20{,}3\mathrm{j} = 28{,}4 + 20{,}3\mathrm{j}$.
$\rho_1 = |z_1| = \sqrt{28{,}4^2 + 20{,}3^2} \approx 34{,}91$.

b. $z_2 = z + z' = 75 + 46{,}6 - 20{,}3\mathrm{j} = 121{,}6 - 20{,}3\mathrm{j}$.
$\rho_2 = |z_2| = \sqrt{121{,}6^2 + 20{,}3^2} \approx 123{,}28$.

c. $R = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{28{,}4 + 20{,}3\mathrm{j}}{121{,}6 - 20{,}3\mathrm{j}} = a + b\mathrm{j}$ avec $a \approx 0{,}20$ et $b \approx 0{,}20$.
$\rho \approx \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}2^2} \approx 0{,}28$.

Remarque : on peut montrer que $\rho = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \approx 0{,}28$.

d. ROS ρ 1,78.

e. $1{,}78 < 2$ donc l'installation respecte la norme.

2. a. Comme $1 - \rho > 0$, on se ramène à $1 + \rho \leq 2(1 - \rho)$ c'est-à-dire $3\rho \leq 1$.

b. $\rho = \dfrac{1}{3}$.

› Problème 5

1. $RC\omega = 100 \times 63 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 50 \approx 1{,}98$.

2. $\underline{T} = \dfrac{1}{1 + 1{,}98\mathrm{j}} = \dfrac{1 - 1{,}98\mathrm{j}}{1^2 + 1{,}98^2} = \dfrac{1}{4{,}9204} - \dfrac{1{,}98}{4{,}9204}\mathrm{j}$
$\approx 0{,}2 - 0{,}4\mathrm{j}$.

3. a. $T \approx \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}4^2} \approx 0{,}447$.

b. $G = 20 \log T \approx -7$.

32 Primitives d'une fonction

Capacités

- Savoir que si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle, $F + k$ (où k est une constante) est aussi une primitive de f
- Déterminer les primitives d'une somme de fonctions, du produit d'une fonction par un réel

(Livre élève pages 147 et 148)

1 Première approche d'une primitive

Un dépliant publicitaire

Un constructeur automobile annonce sur un dépliant publicitaire que la vitesse d'une voiture passe de 0 à 100 km/h en 14 secondes.
On suppose que le mouvement de ce véhicule est uniformément accéléré, c'est-à-dire que sa vitesse instantanée est proportionnelle à t telle que $v(t) = at$.

1. Convertir 100 km/h en m/s. Arrondir le résultat au dixième. $100 \div 3{,}6 \approx 27{,}8$ soit 27,8 m/s.

2. Déterminer le réel a. $v(14) = a \times 14 = 27{,}8$ d'où $a = 27{,}8 \div 14$ $a = 1{,}986$.

La fonction vitesse v est la fonction dérivée de la fonction distance parcourue d.

Si $d(t)$ désigne la distance parcourue à l'instant t, alors $d'(t) = v(t)$.

3. Parmi les fonctions suivantes : $d_1(t) = 3{,}98t + k$; $d_2(t) = 1{,}99t^2 + k$; $d_3(t) = 0{,}99t^2 + k$, laquelle a pour dérivée la fonction v ? Il s'agit de $d_3(t) = 0{,}99t^2 + k$.

À l'instant initial, le véhicule est à l'arrêt. Donc, $d(0) = 0$.

4. Déterminer la fonction d : $d(0) = 0{,}99 \times 0^2 + k = 0$ d'où $k = 0$. Soit $d(t) = 0{,}99t^2$.

5. Calculer $d(14)$: $d(14) = 0{,}99 \times 14^2 = 194{,}04$.

2 Détermination d'une primitive d'une fonction

1. Des fonctions et une dérivée commune

Soient les fonctions F_1, F_2 et F_3 définies pour tout x par :
$F_1(x) = x^2 + 3x$; $F_2(x) = x^2 + 3x + 3$; $F_3(x) = x^2 + 3x - 5$.

a. Tracer, à l'aide de GeoGebra ou de la calculatrice, dans un même repère, les représentations graphiques des fonctions F_1, F_2 et F_3.

b. Que constate-t-on graphiquement ? Les courbes sont parallèles.

c. Déterminer F_1', F_2' et F_3' : $F_1'(x) = 2x + 3$, $F_2'(x) = 2x + 3$, $F_3'(x) = 2x + 3$.

d. Que constate-t-on ? $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x)$.

On dit que les fonctions F_1, F_2 et F_3 sont des primitives de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 2x + 3$ car $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = f(x)$.

e. Donner deux autres fonctions ayant la même fonction dérivée f.

$F_4(x) = x^2 + 3x - \sqrt{2}$; $F_5(x) = x^2 + 3x + 0{,}4$.

2. Primitives d'une fonction

Soit la fonction G définie pour tout x par $G(x) = F_1(x) + k$ où k est une constante.

a. Déterminer G' : $G'(x) =$ $F_1'(x)$ ....

b. Que peut-on dire de la fonction $G = F_1 + k$? La fonction $G = F_1 + k$ est aussi une primitive de la fonction f. ....

....

Si la fonction F_1 est une primitive de la fonction f, alors la fonction $F_1 + k$ est aussi une primitive de la fonction f.

3. Primitives d'une somme de fonctions et du produit d'une fonction par une constante

Soient la fonction F, une primitive de la fonction f, définie pour tout x par $F(x) = x^3$ et la fonction G, une primitive de la fonction g, définie pour tout x par $G(x) = x^2$.

a. Déterminer les fonctions f et g : $f(x) =$ $3x^2$ .... et $g(x) =$ $2x$ ....

b. Vérifier que la fonction $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$. $F(x) + G(x) = x^3 + x^2$ ....

$F'(x) + G'(x) = 3x^2 + 2x = f(x) + g(x)$ ....

c. Vérifier que les fonctions $2F$ et $3G$ sont des primitives des fonctions $2f$ et $3g$. $2F(x) = 2x^3$ ....

$(2F(x))' = 2 \times 3x^2 = 6x^2 = 2f$; $3G(x) = 3x^2$, $(3G(x))' = 3 \times 2x = 6x = 3g$. ....

d. Vérifier que les fonctions $2F + 3G$ sont des primitives des fonctions $2f + 3g$. $2F(x) + 3G(x) = 2x^3 + 3x^2$ ....

$(2F(x) + 3G(x))' = 6x^2 + 6x = 2f + 3g$. ....

On a vérifié les deux propriétés suivantes :
– si F est une primitive de f et si G est une primitive de g, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$;
– si F est une primitive de f et si k est une constante, alors kF est une primitive de kf.

Comment déterminer les primitives d'une fonction ?

Déterminer les primitives de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 2x + 3$.

- Identifier la forme de la fonction : $f(x)$ est de la forme $1(x) + v(x)$ ....
  avec $u(x) =$ $2x$ .... et $v(x) =$ 3 ....
- Lire dans le tableau des primitives de la page 151 la fonction correspondant à x :
  x a pour primitive $\frac{1}{2}x^2 + k$ .... Donc $2x$ a pour primitive $2 \times \frac{1}{2}x^2 + k$ .... $= x^2 + k$ ....
- Lire dans le tableau des primitives de la page 151 la fonction correspondant à la constante 3 :
  La fonction constante 3 a pour primitive $3x + k$ ....
- Donner les fonctions primitives cherchées : f étant la somme des deux termes précédents, les primitives de f sont données par $F(x) =$ $x^2 + 3x + k$ ....

On peut s'occuper des constantes à la fin des calculs car la somme de deux constantes est encore une constante.
On ajoute donc une constante k à la fin des calculs.

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** $F(x) = 2{,}5x^2 + k$; **b.** $G(x) = -\,0{,}5x^2 + 7x + k$.

2 **a.** $F(x) = -\frac{1}{5}x^2 - 5x + k$;

b. $G(x) = x - 6{,}5x^2 + k$.

3 **a.** $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 8x + k$;

b. $G(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{10}x^2 - 4x + k$.

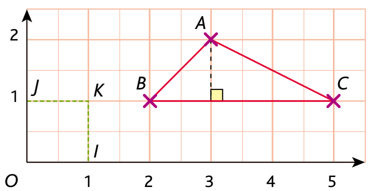
33 Intégrale d'une fonction

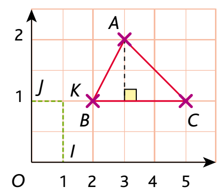
Capacités
- Calculer l'intégrale, sur un intervalle $[a ; b]$, d'une fonction f admettant une primitive F
- Interpréter, dans le cas d'une fonction positive, une intégrale comme l'aire d'une surface

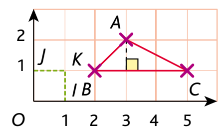
(Livre élève pages 149 et 150)

1 Aire d'une figure en fonction de l'unité d'aire du graphique

On considère les points $A(3 ; 2)$, $B(2 ; 1)$ et $C(5 ; 1)$ dans chacun des repères suivants.


Cas n° 1


Cas n° 2


Cas n° 3

Pour chacun des trois cas :

1. Calculer, en cm², l'aire du triangle ABC.

Cas n° 1 : $\frac{3 \times 1}{2} = 1{,}5$ Cas n° 2 : $\frac{1{,}5 \times 1}{2} = 0{,}75$ Cas n° 3 : $\frac{1{,}5 \times 0{,}5}{2} = 0{,}375$

2. Calculer, en cm², l'aire du rectangle $OIKJ$; on note u cette aire.

Cas n° 1 : $1 \times 1 = 1$ Cas n° 2 : $0{,}5 \times 1 = 0{,}5$ Cas n° 3 : $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

3. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de u.

Cas n° 1 : $1{,}5 \div 1 = 1{,}5$ Cas n° 2 : $0{,}75 \div 0{,}5 = 1{,}5$ Cas n° 3 : $0{,}375 \div 0{,}25 = 1{,}5$

2 Calcul d'une aire à l'aide d'une intégrale

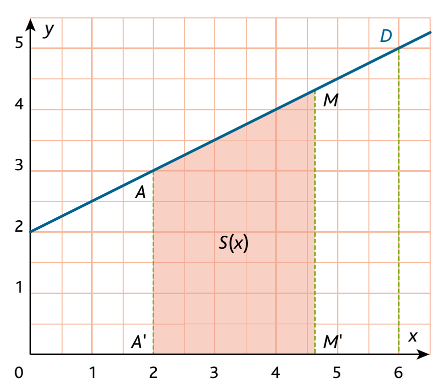
1. Aire du trapèze en fonction de x

Soit la fonction f définie pour tout x par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et D sa représentation graphique dans le repère ci-dessous. Les points $A(2 ; 3)$ et $M(x ; f(x))$ sont deux points de D.

On appelle $S(x)$ l'aire du trapèze $AA'M'M$ délimitée par les droites (AA'), (MM'), l'axe des abscisses et la droite D.

Soit $A'M'$ la hauteur h du trapèze ; AA' la petite base b ; $M'M$ la grande base B.

La formule donnant l'aire du trapèze est $A_{\text{trapèze}} = \frac{(b+B) \times h}{2}$.



a. Donner la longueur de la petite base b : $b = 3$.

b. Exprimer en fonction de x les longueurs suivantes :

La hauteur h $x - 2$ la grande base B $f(x)$.

c. Vérifier que l'aire du trapèze est donnée, en fonction de x, par $S(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$.

$\frac{(3 + 0,5x + 2) \times (x - 2)}{2} = \frac{(0,5x + 5)(x - 2)}{2} = \frac{0,5x^2 + 5x - x - 10}{2} = \frac{0,5x^2 + 4x - 10}{2} = 0,25x^2 + 2x - 5.$

d. Déterminer l'aire du trapèze pour $x = 6$: $S(6) = \frac{1}{4} \times 6^2 + 2 \times 6 - 5 = 16.$

2. Intégrale de la fonction *f* sur l'intervalle [2 ; 6]

On a trouvé en 1. que $S(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$.

a. Calculer $S'(x)$: $S'(x) = \frac{1}{4} \times 2x + 2 \times 1 + 0 = \frac{1}{2}x + 2.$

b. Que peut-on dire de la fonction S par rapport à la fonction f définie au début de l'activité ?

La fonction S est une primitive de la fonction f.

c. Calculer $S(6)$ et $S(2)$: $S(6) = 16$, $S(2) = 0$. D'où, $S(6) - S(2) = 16$.

La différence $S(6) - S(2)$ représente l'intégrale de 2 à 6 de la fonction f.

Cela se note $\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 16$ et se lit « somme de 2 à 6 de $f(x)\mathrm{d}x$ ».

> $f(x)\mathrm{d}x$ est une notation qui peut paraître surprenante, mais qui fait historiquement référence à une aire.

d. Donner, à partir de 1.d. une interprétation géométrique de $\int_2^6 f(x)\ \mathrm{d}x$: C'est l'aire sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses et entre $x = 2$ et $x = 6$.

Comment calculer l'intégrale définie d'une fonction ?

Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$, f étant définie pour tout x par $f(x) = 2x + 3$.

> On prend $k = 0$ car l'intégrale définie d'une fonction sur un intervalle est indépendante de la constante k.

- Déterminer une primitive F de f en prenant k égal à 0 : $F(x) = x^2 + 3x$.
- Calculer les nombres $F(2)$ et $F(1)$: $F(2) = 2^2 + 3 \times 2 = 10$ et $F(1) = 1^2 + 3 \times 1 = 4$.
- Calculer $F(2) - F(1)$: $F(2) - F(1) = 10 - 4 = 6$.
- Conclure : l'intégrale $I = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 (2x + 3)\ \mathrm{d}x = 6$.

RÉPONSES
Exercices

1 $I = F(2) - F(0) = 10 - 0 = 10$ avec $F(x) = 2,5x^2$.
$J = F(3) - F(-1) = 12 - 0 = 12$ avec $F(x) = x^2 + x$.

2 $I = F(2) - F(1) = 4 - 1 = 3$ avec $F(x) = x^3 - 2x$.
$J = F(3) - F(-3) = 21 - (-3) = 24$ avec $F(x) = x^2 + 4x$.

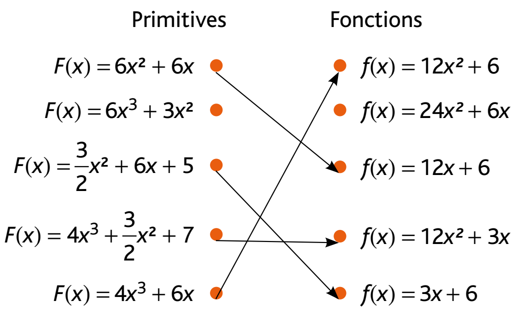
Exercices & Problèmes

Exercices p. 153 à 155

1. QCM

a. $F_1(x) = 3x + 12$
b. $F(x) = -3x + k$
c. $F(x) = 2x^3 + k$
d. $F(x) = \dfrac{x^5}{5} + k$

2. Associer

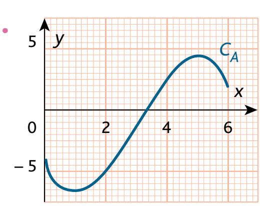


3. Choix dans une liste

a. Si $f(x) = 2x$, alors $F(x) = x^2 + k$ est une primitive F de f.
b. Si $f(x) = 2x^4 + 9x^2$, alors $F(x) = 0{,}4x^5 + 3x^3 + k$ est une primitive F de f.
c. Si $f(x) = \dfrac{4}{x}$, pour $x > 0$, alors $F(x) = 4\ln x + k$ est une primitive F de f.

4. QCM

a.



b. $I = \int_1^5 f(x)\,dx$
c. $A = F(5) - F(1)$

› Primitives d'une fonction

5. a. $F(x) = 1{,}5x^2 - 5x + k$.
b. $G(x) = -0{,}5x^2 + 2x + k$.

6. a. $F(x) = -\dfrac{1}{7}x^2 - 15x + k$.
b. $G(x) = x - 5{,}5x^2 + k$.

7. a. $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + 6x + k$.
b. $G(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + 2x^2 - \dfrac{1}{5}x + k$.

8. a. $F(x) = -\dfrac{0{,}01}{3}x^3 + 3x + k$.
b. $G(x) = -\dfrac{\sqrt{11}}{3}x^3 - 2x + k$.

9. a. $F(x) = -\dfrac{3}{x} + k\ (x \neq 0)$.
b. $G(x) = \dfrac{2}{x} + k\ (x \neq 0)$.

10. a. $F(x) = 3\ln x + k\ (x > 0)$.
b. $G(x) = -2\ln x + k\ (x > 0)$.

11. a. $F(x) = x^2 - \ln x + k$.
b. $G(x) = \dfrac{1}{12}x^3 + 4x + k$.

12. a. $F(x) = -2x^2 + \ln x + k\ (x > 0)$.
b. $G(x) = -3x^3 - 2\ln x + k\ (x > 0)$.

13. a. $F(x) = 4\ln x + 0{,}5x^4 + k\ (x > 0)$.
b. $G(x) = -\dfrac{1}{x} - 3\ln x + k\ (x > 0)$.

14. a. $F(x) = -0{,}5x^6 + 0{,}75x^4 - 2x^2 + k$.
b. $G(x) = x^5 - \dfrac{7}{3}x^3 - 2x + k$.

15. a. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 4x + k$.
b. $G(x) = -2x^5 + 4x^3 + 2x + k$.

› Primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné

16. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 + x + \dfrac{1}{6}$.

17. $F(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - 2{,}5x^2 + 7x + \dfrac{46}{9}$.

18. $F(x) = x + 3\ln x + 2\ (x > 0)$.

19. $F(x) = -2\ln x + \dfrac{x^2}{2} + x + 2 + 2\ln 7\ (x > 0)$.

20. $F(x) = -4\ln x - \dfrac{2}{9}x^3 + \dfrac{2}{9}$.

21. $F(x) = -\frac{2}{3}x^6 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 63.$

22. $F(x) = -x^5 + 4x^3 + 7x.$

23. $F(x) = 2\ln x$ $(x > 0).$

› Intégrale définie

24. $I = 6$; $J = 20.$

25. $I = -3$; $J = 18.$

26. $I = \frac{1}{18}$; $J = 0{,}5.$

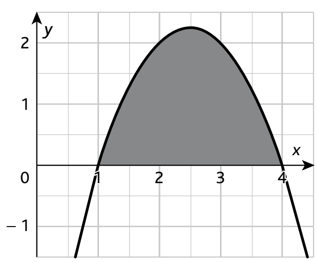
27. $I = 2$; $J = 4\ln 3.$

28. $I = \frac{4}{3}$; $J = 1{,}5 + 8\ln 0{,}5.$

29. $I = 8$; $J \approx 3{,}969\,6.$

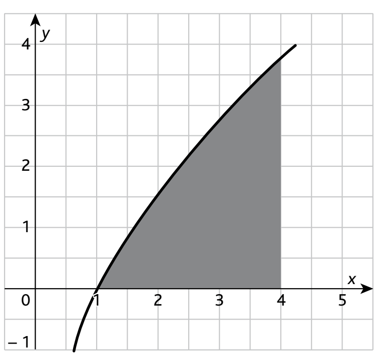
› Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

30.



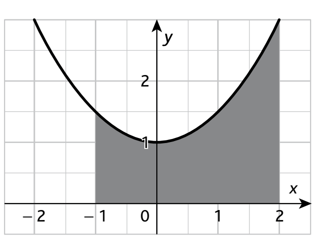
$I = 4{,}5$

31.



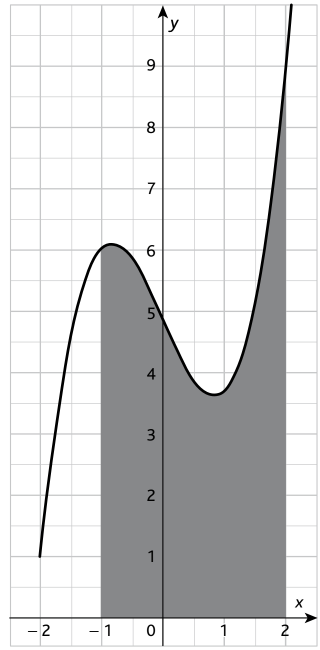
$I = 7{,}5 - \ln 4.$

32.



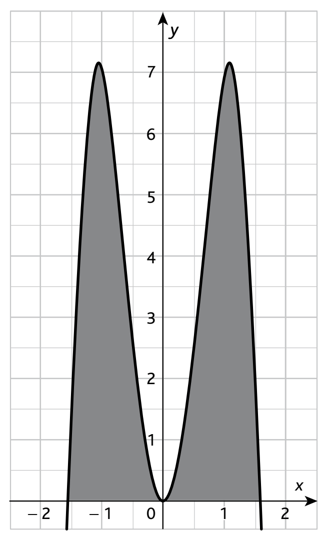
$I = 4{,}5.$

33.



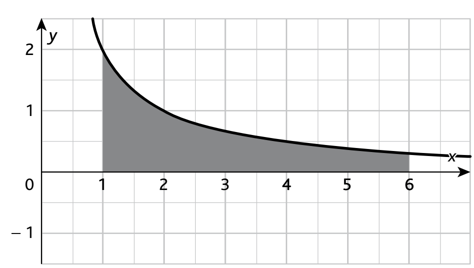
$I = 15{,}75$

34.



$I = 11{,}8125.$

35.



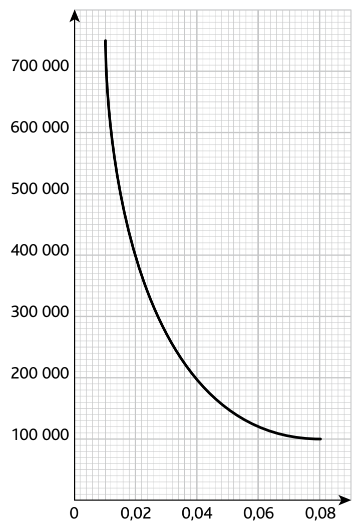
$I = 2\ln 6.$

Problèmes p. 155 et 156

› Problème 1

1. La fonction f est décroissante car le numérateur est positif.

2.

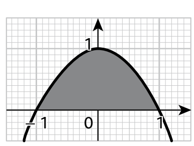


3. a. $F(x) = 7\,650 \times \ln x + k$.

b. $I = 7\,650 \ln 8$ u.a.
Erratum : les unités graphiques du repère sont 2×10^{-2} cm ; en abscisses et 10^5 cm en ordonnées.

› Problème 2

1.



2. $I = \int_{-1}^{1}(-x^2 + 1)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

› Problème 3
Calculs de volumes de révolution

1. a. $V = \pi \int_0^4 2^2 \, \mathrm{d}x = 16\pi$.

b. Le rayon vaut 2 et la hauteur 4.
D'où, $V = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$.

2. a. $y = 0{,}5x$.

b. $V = \pi \int_0^4 (0{,}5x)^2 \mathrm{d}x = \frac{16}{3}\pi$.

c. *Erratum :* il faut lire «quels sont le rayon de la base et la hauteur du cône ?».
Le rayon vaut 2 et la hauteur 4.
D'où, $V = \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 4 = \frac{16}{3}\pi$.

3. $V = \pi \int_0^3 (\sqrt{1{,}5x})^2 \, \mathrm{d}x$

$= \pi \int_0^3 1{,}5x \, \mathrm{d}x = 6{,}75 \times \pi \approx 21{,}21$.

› Problème 4
Travail d'un compresseur

Erratum : il faut lire 0,041 à la place de – 0,041.
Le travail W mis en jeu vaut 518 joules.

› Problème 5
Écoulement d'un fluide

1. $v = 0{,}104 \times (7{,}5^2 - r^2) = -0{,}104r^2 + 5{,}86$.

2. a. $F(x) = -\frac{0{,}104}{3}x^3 + 5{,}86x + k$.

b. $I = 29{,}325$.

c. $\mu = \frac{1}{7{,}5} \times I = \frac{1}{7{,}5} \times 29{,}325 = 3{,}91$.
La vitesse moyenne d'écoulement est de 3,91 m/s.

› Problème 6
Signal en « dents de scie »

1. a. $T = 0{,}01$ s.

b. $s(t) = 1\,000t$.

2. a. $A = \frac{0{,}01 \times 10}{2} = 0{,}05$ u.a.
L'aire A de OBC vaut 0,05 u.a.

b. $S(t) = 500t^2$, donc $\overline{U} = 5$.

c. Les valeurs $\overline{U}$ et A sont dans un rapport 100 qui se justifie par le coefficient $\frac{1}{0{,}01}$ devant l'intégrale de $s(t)$.

d. Le signal u peut être remplacé à chaque instant pas le signal moyen symbolisé par la droite D.

3. a. $S = \frac{1}{0{,}01} \times \frac{1}{3} \approx 33{,}33$.

b. $U_{\text{eff}} = \sqrt{S} = \sqrt{33{,}33} \approx 5{,}77$.
La tension efficace est de 5,77 V.

› Problème 7
Signal redressé double-alternance

A. 1. $\omega = 100\pi$ rad/s d'où $T = 0{,}02$ s.

2. a. $U(t) = -\dfrac{2{,}2\sqrt{2}}{\pi}\cos(100\pi t)$.

b. $\bar{u} = \dfrac{1}{0{,}02} \times 0 = 0$. La valeur moyenne du signal est nulle.

3. a. On a $(220\sqrt{2})^2 = 220^2 \times 2$ et $\sin^2(100\pi t)$
$= \dfrac{1 - \cos(2 \times 100\pi t)}{2}$.

D'où $u^2(t) = 220^2 \times 2 \times \dfrac{1 - \cos(200\pi t)}{2}$
$= 220^2\,(1 - \cos(200\pi t))$.

b. *Erratum :* il n'y a pas de question.

c. $S = \dfrac{220^2}{0{,}02} \times 0{,}02 = 220^2$.

d. $U_{\text{eff}} = \sqrt{S} = 220$. La tension efficace du signal est de 220 V.

B. 1. La pulsation $\omega = 100\pi$ rad/s mais $T = 0{,}01$ s du fait du redressement.

2. $\overline{u_r} = \dfrac{1}{0{,}01} \times \dfrac{2{,}2\sqrt{2}}{\pi} \approx 99$.

3. a. *Erratum :* il n'y a pas de question.

b. $S_r = \dfrac{220^2}{0{,}01} \times 0{,}01 = 220^2$.

c. $U_{\text{reff}} = \sqrt{Sr} = 220$. La tension efficace du signal redressé est de 220 V.

4. Le redressement modifie la tension moyenne du signal mais laisse inchangée la tension efficace.

› Problème 8
Coût marginal

A. 1. a. et **b.** Voir fichier «ch11_pb8.xls»

c. Il faut entrer «=3*A2+40».

2. Il faut entrer «=Somme($B$2:B2)».

3. Le coût de fabrication pour 10 objets supplémentaires est de 565 €.

B. $F(q) = 3 \times 1 + 40 + 3 \times 2 + 40 + \ldots + 3 \times q + 40$;
$F(q) = 3 \times (1 + 2 + \ldots + q) + 40q = 3 \times \dfrac{q}{2}(1 + q) + 40q$;
$F(q) = \dfrac{3}{2}q + \dfrac{3}{2}q^2 + 40q = \dfrac{3}{2}q^2 + 41{,}5q$.

C. 1. a. $C(q) = \dfrac{3}{2}q^2 + 40q$.

b. Voir fichier.

2. Voir fichier.

3. Plus q augmente et plus l'erreur commise diminue.

4. À la différence entre $F(q)$ et $C(q)$ de $1{,}5q$.

› Problème 9
Consommation de gaz naturel

1. $Q(t) = 0{,}005t^2 + 4{,}5t$.

2. Les réserves seront épuisées lorsque $Q(t) = 100$.
Soit à résoudre l'équation $0{,}005t^2 + 4{,}5t - 100 = 0$.
Cette équation n'a qu'une solution positive 21,7.
Il faudra 21 ans pour épuiser les réserves de gaz naturel.

› Problème 10
Coût total de production

1. $F(q) = -\,0{,}006q^2 + 16q + k$.

2. $F(q) = -\,0{,}006q^2 + 16q + 4{,}006$.

3. $F(60) = 942{,}406$.
Le coût total de production de 60 survêtements est de 942,41 €.

› Problème 11
Évolution du stock

1. a. $S(t) = 0{,}002\,5t^4 - 0{,}17t^3 - t^2 + 680t$.

b. $S_{m1} = \dfrac{1}{15} \times 9\,527{,}812\,5 = 635{,}187\,5$. Soit une valeur moyenne $S_{m1} = 635$.

2. $S_{m2} = \dfrac{1}{15} \times 6\,843{,}48 = 456{,}232$. Soit une valeur moyenne $S_{m2} = 456$.

3. $S_m = \dfrac{1}{30} \times 16\,935 = 564{,}5$. Soit une valeur moyenne $S_m = 565$.

4. La valeur S_m est la moyenne entre les valeurs S_{m1} et S_{m2}.
La légère différence provient du fait que l'on ne tient pas compte de l'intervalle [15 ; 16].

5. a. $200 \times 30 \times S_m = 200 \times 30 \times 565 = 3\,390\,000$.
Le coût total de gestion s'élève à 3,39 milliers d'euros.

b. Voir le fichier « ch11_pb11 ».
Formule à entrer en B2 :
«=0,01*A2^3-0,51*A2^2-2*A2+680».
Formule à entrer en C2 : «=B2*200».

c. Le coût total de gestion s'élève à 3,362 milliers d'euros.

d. Les valeurs sont très proches. La différence provient d'un mode de calcul avec des valeurs discrètes et avec un mode de calcul avec une fonction continue.

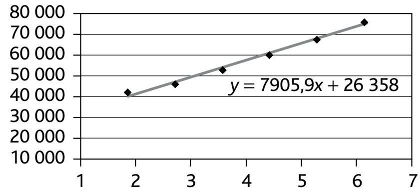
Évaluation 1

(Livre élève page 161)

Énergie éolienne

EXERCICE 1

1 et **2**



3 On peut estimer la puissance du parc européen en 2012 à :
$7\,906 \times 2012 + 26\,358 = 15\,933\,230$ mégawatts.

EXERCICE 2

1 Pour tout v dans l'intervalle $[5 ; 20]$, $f'(v) = 3 \times 733\, v^2 = 2\,199\, v^2$.
Pour tout v dans l'intervalle $[5 ; 20]$, $f'(v) > 0$.

2

v	5	20
$f'(v)$	+	
$f(v)$	91 625 ↗	5 864 000

3 $f(v) = 2.10^6$ équivaut à $733\, v^3 = 2.10^6$ c'est-à-dire $v^3 = \dfrac{2.10^6}{733}$ d'où $v = \left(\dfrac{2.10^6}{733}\right)^{\frac{1}{3}}$
donc $v \approx 14$ mètres par seconde.

Remarque : sans utiliser la puissance $\frac{1}{3}$ (ou la racine cubique), on peut obtenir cette valeur par balayage à l'aide de la calculatrice ou du tableur.

VERS LE BAC PRO

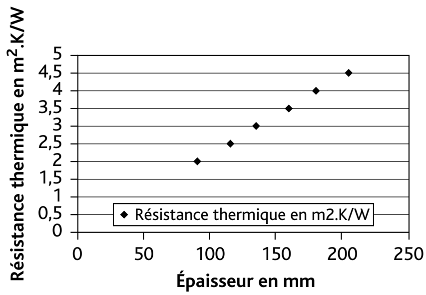
Évaluation 2

(Livre élève page 163)

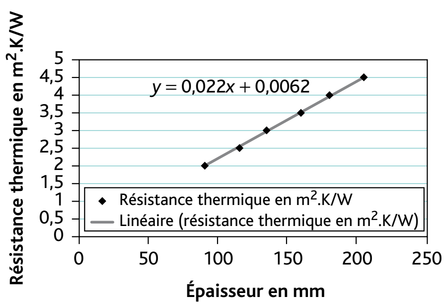
Isolation thermique

EXERCICE 1

1



2 On utilise les fonctionnalités du tableur ou de la calculatrice graphique pour afficher une courbe de tendance.



Le nuage de points est modélisé par une droite d'équation $y = 0{,}0022x + 0{,}0062$.

En utilisant cette équation, on trouve que pour une épaisseur d'isolant de 250 mm, la résistance thermique peut être estimée à 5,51 m^2.K/W.

$y = 0{,}0022 \times 250 + 0{,}0062 = 5{,}5062$

EXERCICE 2

1 Le montant de la mensualité du deuxième mois sera 475 € car :

$500 \times 5 \div 100 = 25$ € de réduction

$500 - 25 = 475$.

En procédant de même, on trouve pour le troisième mois un montant de mensualité de 451,25 € et 428,6875 € pour le quatrième mois.

2 La suite de nombres formée par les montants des mensualités est une suite géométrique de raison 0,95 car :

$$\frac{475}{500} = \frac{451{,}25}{475} = \frac{428{,}687\,5}{451{,}25} = 0{,}95$$

3 **a.** Il faut utiliser la formule des suites géométriques donnant le terme de rang n en fonction du premier terme u_1 et de n, soit : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ pour calculer le 36ᵉ terme qui correspondra à la 36ᵉ mensualité.

b. $u_{36} = 500 \times 0{,}95^{35} \approx 83{,}04$.

La mensualité du 36ᵉ mois sera 83,04 €.

4 À l'aide des fonctionnalités d'un logiciel tableur, on peut calculer le montant des 36 mensualités et en faire la somme. On peut également utiliser la formule de la somme des k premiers termes d'une suite géométrique : $S_k = u_1 . \dfrac{(1-q^k)}{(1-q)}$.

Avec la formule, on obtient : $S_{36} = 500 \times \dfrac{(1-0{,}95^{36})}{(1-0{,}95)} \approx 8\,422{,}21$.

Le coût total du crédit s'élève à 8 422,21 € ce qui convient à Alex qui ne souhaitait pas dépenser plus de 8 500 €.

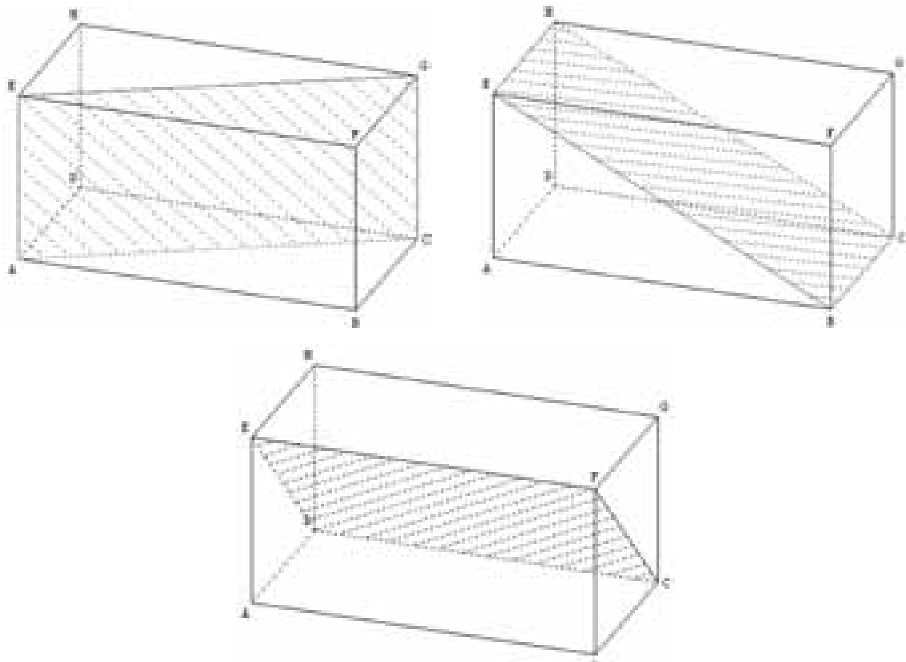
Évaluation 3

(Livre élève page 165)

Mécanique des structures

EXERCICE 1

1 **a.** Voici trois plans de coupe possibles pour obtenir deux prismes identiques.



b. Dans chacun des cas précédents, la section entre le parallélépipède et le plan de coupe est un rectangle.

2 **a.** $F(3\ ;\ 6\ ;\ 3)\ ;\ H(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$.

b. $\overrightarrow{FH}(-3\ ;\ -6\ ;\ 0)$

$\left\|\overrightarrow{FH}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$

EXERCICE 2

1 Dérivée :

$Mf'(x) = -150 \times 2x + 450$ soit $Mf'(x) = -300\,x + 450$

2 On étudie le signe de Mf'.

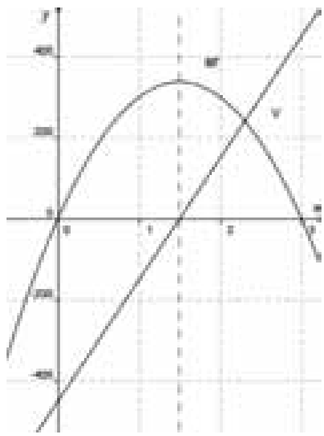
$-300\,x + 450 \geq 0$ si $x \leq 1,5$

On complète le tableau de variation de Mf sur l'intervalle [0 ; 3].

x	0		1,5		3
Signe $Mf'(x)$		+	0	–	
Variations de Mf	0	↗	337,5	↘	0

3 $Mf'(x) = -V(x)$

4 Voici un exemple de représentation graphique obtenu avec le logiciel GeogGebra.



L'effort tranchant est négatif sur l'intervalle [0 ; 1,5], le moment fléchissant est croissant sur cet intervalle (en accord avec le signe de la dérivée puisque $V(x) = -Mf'(x)$).

Évaluation 4

(Livre élève page 167)

Absorption du bruit

EXERCICE 1

a. Voir fichier « eval4_corrige.xls » ou « eval4_corrige.ods ».

b. Avec un tableur, si on ajuste le premier nuage de points par une courbe de tendance logarithmique, l'équation affichée est : $y = 0{,}1202 \ln x - 0{,}0006$.

En arrondissant les coefficients au centième, on obtient : $k = 0{,}12$ et $k' = 0$.

En abscisse, la variable est f et en ordonnée, on a porté le coefficient α.

On a donc $\alpha = 0{,}12f$.

c. Si $f = 1\,500$, alors $\alpha = 0{,}12 \times \ln 1\,500 \approx 0{,}88$.

Si $\alpha = 0{,}8$, alors on a à résoudre l'équation : $0{,}12 \times \ln f = 0{,}8$.

D'où $\ln f = \dfrac{0{,}8}{0{,}12}$; $\ln f = \dfrac{20}{3}$; $f = e^{20/3} \approx 786$.

EXERCICE 2

1 **a.** $f(1) \approx 70$ dBA.

b. $f(3) \approx 34$ dBA.

c. On peut seulement affirmer que le minimum cherché est entre 1 m et 3 m puisqu'on ne trouve pas exactement 40 dBA comme niveau d'intensité.

2 **a.** $f'(x) = -36e^{-0{,}36x}$.

Cette dérivée est négative quel que soit x.

Donc la fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ 3{,}5]$.

b. On peut résoudre cette équation soit par le calcul, soit graphiquement.

$100 \times e^{-0{,}36x} = 40$; $e^{-0{,}36x} = 0{,}4$; $-0{,}36x = \ln 0{,}4$; $x = \dfrac{\ln 0{,}4}{-0{,}36} \approx 2{,}55$.

3 La largeur d cherchée est environ 2,55 mètres.

Évaluation 5

(Livre élève page 169)

Maladie bovine

EXERCICE 1

Erratum : **4** Remplacer « 10 animaux » par « 100 animaux ».

1 **a.** La suite (a_n) est une suite géométrique.

b. $a_2 = 0{,}9 \times a_1 = 0{,}9 \times 15 = 13{,}5$. Le taux d'augmentation de la maladie le deuxième mois est de 13,5 %.

$a_3 = 0{,}9 \times a_2 = 0{,}9 \times 13{,}5 = 12{,}15$. Le taux d'augmentation de la maladie le troisième mois est de 12,15 %.

c. Pour tout entier n non nul, on a $a_n = 0{,}9^{n-1} \times a_1 = 0{,}9^{n-1} \times 15$.

2 On a $u_1 = \left(1 + \dfrac{15}{100}\right) \times 5\,000 = 5\,750$.

3

B4 = =0,9*B3

	A	B	C	D	E
1	n	a(n)	u(n)		différence
2	0		5000		
3	1	15	5750		750
4	2	13,5	6526,25		776,25
5	3	12,15	7319,18938		792,938375
6	4	10,935	8119,54273		800,353368
7	5	9,8415	8919,82753		799,084798
8	6	8,85735	9709,58159		789,954068
9	7	7,971615	10482,5133		773,600749
10	8	7,1744535	11234,5753		752,062873
11	9	6,45700815	11959,9927		725,417443
12	10	5,81130734	12655,0247		695,031936
13	11	5,23017660	13316,9048		661,880014
14	12	4,70715894	13943,7527		626,847876
15	13	4,23644305	14534,4718		590,718142
16	14	3,81279874	15088,642		554,170189
17	15	3,43151887	15606,4118		517,769597
18	16	3,08836698	16098,3949		491,983283
19	17	2,77953029	16535,5757		447,181007
20	18	2,50157725	16949,2269		413,650225

B4 = =0,9*B3

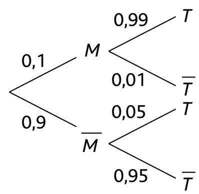
	A	B	C	D	E
28	26	1,07984698	19247,3807		205,056479
29	27	0,96915229	19433,8969		186,536161
30	28	0,87224806	19603,4102		169,511416
31	29	0,78502145	19757,3013		153,890976
32	30	0,70651931	19896,8904		139,589149
33	31	0,63586737	20023,4083		126,517935
34	32	0,57228064	20137,9983		114,590088
35	33	0,51505257	20241,7198		103,721279
36	34	0,46354731	20335,5498		93,8394...
37	35	0,41719258	20420,398		84,8384047
38	36	0,37547333	20497,0811		76,6731098
39	37	0,33792599	20566,328		69,2468972
40	38	0,30413339	20628,875		62,5480652
41	39	0,27372005	20685,3404		56,485388
42	40	0,24634805	20736,2983		50,9579025
43	41	0,22171324	20782,2736		45,9751188
44	42	0,19954192	20823,7428		41,4692474
45	43	0,17958773	20861,1387		37,3958885
46	44	0,16162895	20894,8573		33,7179421
47	45	0,14546606	20925,2523		30,3949256
48	46	0,13091945	20952,6415		27,3892259
49	47	0,11782751	20977,3355		24,6979824
50	48	0,10604476	20999,5808		22,2453645
51	49	0,09544029	21019,4229		20,0420581
52	50	0,08589626	21037,676		18,0550866

4 À partir du 34ᵉ mois, l'extension de la maladie est de moins de 100 animaux par mois.

VERS LE BAC PRO

EXERCICE 2

1



2 $P(M \cap T) = 0{,}1 \times 0{,}99 = 0{,}099$.

3 $P(M \cap \overline{T}) = 0{,}1 \times 0{,}01 = 0{,}001$.

4 $P(T) = 0{,}1 \times 0{,}99 + 0{,}9 \times 0{,}05 = 0{,}144$.

Évaluation 6

(Livre élève page 171)

Comparaison de l'action de trois désinfectants

1 Désinfectant A

a. $u_1 = 18\,000$; $u_2 = 16\,200$; $u_3 = 14\,580$; $u_4 = 13\,122$; $u_5 = 11\,522$; $u_6 = 9\,922$; $u_{10} = 3\,522$.

b. La suite $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une suite géométrique de raison 0,9.

c. $u_4 = u_0 \times 0{,}9^4$.

d. La suite $(u_5, u_6, \ldots, u_9, u_{10})$ est une suite arithmétique de raison – 1 600.

e. $u_{10} = u_5 + 5 \times (-1\,600)$.

f. On ne connaît pas exactement au bout de combien de temps le nombre de bactéries a diminué de moitié, entre la 5^e et la 6^e heure.

2 Désinfectant B

a. $f(0{,}5) \approx 18\,279$.

b. $f'(t) = -3\,600 \times e^{-0{,}18t}$.
Cette dérivée est négative quel que soit t.
Donc la fonction f est décroissante sur [0 ; 10].

c. On peut connaître au bout de combien de temps le nombre de bactéries a diminué de moitié en résolvant l'équation $f(t) = 10\,000$, soit algébriquement, soit graphiquement.
On obtient : $e^{-0{,}18t} = 0{,}5$.

$-0{,}18t = \ln 0{,}5$; $t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}18} \approx 3{,}85$.

La durée cherchée est 3,85 heures, soit 3 h 51 min.

3 Désinfectant C

a. $g(0{,}5) \approx 18\,463$.

b. $g'(t) = 300t - 3\,150$.
$g'(t) = 0$ pour $t = 10{,}5$ qui est supérieur à 10 ; $g'(t)$ est donc négative sur l'intervalle [0 ; 10].
Donc la fonction g est décroissante sur [0 ; 10].

c. On peut connaître au bout de combien de temps le nombre de bactéries a diminué de moitié en résolvant l'équation $g(t) = 10\,000$, soit algébriquement, soit graphiquement.
On obtient : $150t^2 - 3\,150t + 10\,000 = 0$.
Le discriminant de cette équation du second degré est 3 922 500.
Les deux solutions sont 17,1 et 3,9 (valeurs arrondies au dixième).
Seule la solution 3,9 est dans l'intervalle [0 ; 10].
La durée cherchée est 3,9 heures, soit 3 h 54 min.

Évaluation 7

(Livre élève page 173)

Fabrication de vis

EXERCICE 1

a. $C_M(x) = x^2 - 30x + 300$

b. On fait cette étude soit à l'aide de la fonction dérivée, soit à partir des coordonnées du sommet de la parabole.
Le minimum de C_M sur [0 ; 20] est pour $x = 15$.

c. Le coût de production minimal $C_M(15)$ vaut 75 milliers d'euros.
La production correspondante $C(15)$ vaut 1 125 milliers d'euros.

EXERCICE 2

a.

	Vis présentant le défaut (a)	Vis ne présentant pas le défaut (a)	Total
Vis présentant le défaut (b)	80	160	240
Vis ne présentant pas le défaut (b)	200	1 560	1 760
Total	280	1 720	**2 000**

b.

	a	$\bar{a}$	Total
b	$\frac{80}{2\,000} = 0{,}04$	$\frac{160}{2\,000} = 0{,}08$	0,12
$\bar{b}$	$\frac{200}{2\,000} = 0{,}1$	$\frac{1560}{2\,000} = 0{,}78$	0,88
Total	0,14	0,86	1

c. $P(\text{a} \cap \text{b}) = 0{,}04 + 0{,}08 + 0{,}14 = 0{,}26$.
La probabilité que la vis présente au moins l'un des deux défauts est 0,26.

d. La probabilité que la vis ne présente aucun défaut est 0,86.

VERS LE BAC PRO

Évaluation 8

(Livre élève page 175)

Le transformateur

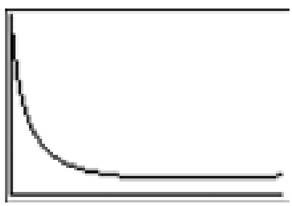
1 **a.** $C(n) = 3{,}5n + \dfrac{1\,470\,000}{n}$.

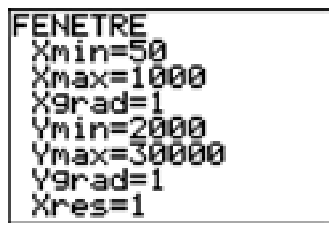
b. $C(300) = 5\,950$. Le coût d'approvisionnement est de 5 950 €.

c. $C'(n) = 3{,}5 - \dfrac{1\,470\,000}{n^2}$. $C'(n) > 0$ pour $n > \sqrt{420\,000}$.

Donc, la fonction C est croissante pour n supérieur à $\sqrt{420\,000}$.

La courbe obtenue correspond à la fenêtre ci-contre.





d. Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée lorsque $n > 0$.

$C'(n) = 0$ lorsque $3{,}5 - \dfrac{1\,470\,000}{n^2} = 0$. Soit $3{,}5n^2 - 1\,470\,000 = 0$.

C'est-à-dire, pour $n > 0$, lorsque $n = \sqrt{420\,000} \approx 648$.

e. $C(648) = 4\,536{,}52$. Le coût minimal d'approvisionnement est 4 537 €.

2 **a.** La fréquence : $f = \dfrac{1}{T} = 400$ Hz et la pulsation : $\omega = 2\pi f = 800\pi$ rad/s.

b. $u_2(t) = 20\sin(800\pi t + \dfrac{\pi}{3})$.

c. $u_2(t) = 15$ revient à résoudre l'équation $\sin(800\pi t + \dfrac{\pi}{3}) = 0{,}75$.

Soit sur la période $[0 ; 0{,}0025]$ lorsque $t \approx 4{,}96 \times 10^{-4}$ ou $t \approx 2{,}42 \times 10^{-3}$.

d. A l'aide d'une représentation graphique, on constate que la tension u_2 est écrêtée durant la durée $(0{,}0025 - (2{,}42 \times 10^{-3} - 4{,}96 \times 10^{-4})$, soit pendant $5{,}76 \times 10^{-4}$ s.

STDI

Éditions Foucher - Vanves – AOÛT 2011 – 01 – IH - DL / DC

Imprimé en France par Jouve