Bac Pro 2de

Mathématiques

I. Baudet, L. Breitbach, P. Dutarte, D. Laurent
Sous la direction de G. Barussaud

Corrigé

FOUCHER

les NOUVEAUX cahiers

Sommaire

ISBN 978-2-216-11889-2

5. Des solides usuels aux figures planes

6. Fluctuation d'une fréquence

7. Figures planes – Longueurs et angles

8. Utilisation des fonctions de référence

9. Probabilités

10. Aires – Volumes – Agrandissement – Réduction

Évaluations vers la certification intermédiaire

Pictogrammes des différentes thématiques du programme :

Vie économique et professionnelle

Prévention, santé et sécurité

Évolution des sciences et techniques

Développement durable

Vie sociale et loisirs

Crédits photographiques

p. 7 ph © Phovoir-Images
p. 9 ph © Fotolia-Jackin
p. 21 ph © Phovoir-Images
p. 23 ph © Phovoir-Images
p. 24 ph © Fotolia-Scanrail
p. 29 ph © Phovoir-Images
p. 31 ph © Phovoir-Images
p. 33 ph © Phovoir-Images
p. 35 ph © Phovoir-Images
p. 39 ph © Phovoir-Images
p. 43 ph © Phovoir-Images
p. 45 ph © Fotolia-Secret Side
p. 51 ph © Fotolia-Nomad_Soul
p. 74 ph © Fotolia-pzAxe
p. 128 ph© Phovoir-Images
p. 134 ph© Phovoir-Images
p. 138 ph© Phovoir-Images
p. 141 ph© Phovoir-Images
p. 142 ph© Phovoir-Images
p. 155 ph© Phovoir-Images

1 Graphiques statistiques

Capacités
- Représenter une série statistique
- Exploiter un graphique statistique

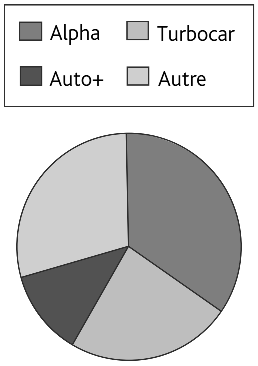
(livre élève pages 5 et 6)

1 Représenter des données qualitatives

Visualiser les ventes de voitures

Un vendeur de voitures d'occasion a vendu 80 voitures le mois dernier. Le tableau ci-dessous fournit les effectifs du caractère « marque des voitures » vendues.

Marque des voitures	Alpha	Turbocar	Auto+	Autres
Effectif	28	18	10	24



1. Le caractère étudié est-il qualitatif ou quantitatif ? Qualitatif.

La **fréquence** de la marque Alpha dans les ventes est $\frac{28}{80} = 0{,}35$ soit 35 %.

2. Calculer la fréquence de la marque Turbocar, en pourcentage des ventes.

La fréquence de la marque Turbocar est $\frac{18}{80} \times 100 = 22{,}5\,\%$.

On choisit de représenter ce caractère à l'aide d'un **diagramme en secteurs**.

L'angle au centre de chaque secteur est proportionnel à la fréquence. Puisque 360° correspondent à 100 %, un angle de 3,6° correspond à 1 %. Pour la marque Alpha, on a $3{,}6 \times 35 = 126°$.

3. Calculer l'angle au centre du secteur correspondant à la marque Turbocar : $3{,}6 \times$ 22,5 = 81 degrés.

Un caractère est **qualitatif** lorsque ses valeurs ne sont pas mesurables.

2 Représenter des données quantitatives

On reprend la situation précédente en étudiant les caractères « puissance » et « prix de vente ».

Puissance fiscale (en CV)	5	7	9	11
Effectif	20	35	15	10

Prix de vente (en €)	[3 000 ; 5 000[	[5 000 ; 7 000[	[7 000 ; 9 000[	[9 000 ; 11 000[
Effectif	17	30	21	12

1. Les caractères étudiés sont-ils qualitatifs ou quantitatifs ? Quantitatifs.

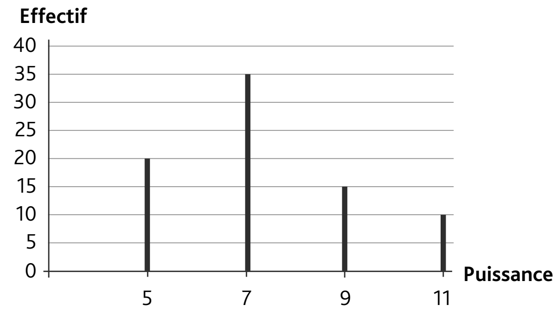
2. Le caractère « puissance fiscale » est-il discret (ne prend que des valeurs isolées) ou continu (prend toutes les valeurs d'un intervalle) ? Discret.

3. Le caractère « prix de vente » est-il discret ou continu ? Continu.

On choisit de représenter le caractère « puissance fiscale » par un diagramme en bâtons.

Ce type de diagramme convient bien aux séries discrètes. La hauteur des bâtons correspond aux effectifs.

4. Compléter le graphique.

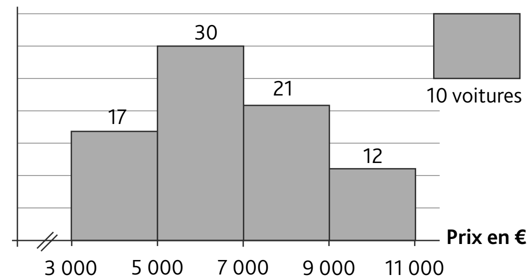


On choisit de représenter le caractère « prix de vente » par un histogramme.

Ce type de diagramme convient bien aux séries continues regroupées en classes.

Les rectangles sont accolés et leur aire est proportionnelle à l'effectif.

5. Compléter le graphique.

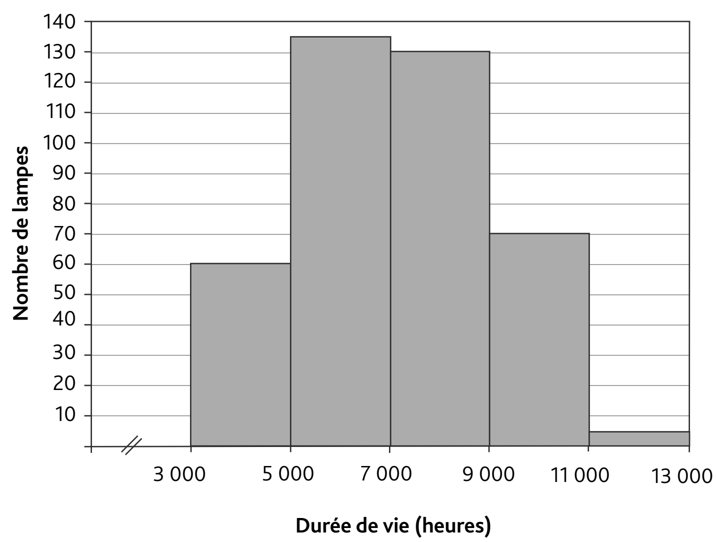


Comment exploiter un histogramme ?

On a mesuré la durée de vie de 400 lampes à économie d'énergie produites dans une usine. Traduire par un tableau l'histogramme ci-contre.

- Les intervalles des classes sont donnés par les valeurs lues à la base des rectangles (on ouvre l'intervalle à droite).
- Comme tous les rectangles ont la même largeur, les effectifs sont proportionnels aux hauteurs des rectangles.

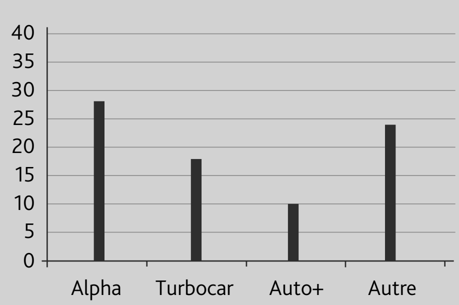
Durée de vie (heures)	Effectif
[3 000 ; 5 000[	60
[5 000 ; 7 000[	135
[7 000 ; 9 000[	130
[9 000 ; 11 000[	70
[11 000 ; 13 000[	5



RÉPONSES

Exercices

1



2 **a.** L'Allemagne est le pays dont les émissions sont les plus importantes.
b. Le pays qui a le plus augmenté ses émissions est l'Espagne.
c. L'Allemagne a réduit ses émissions d'environ 250 millions de tonnes d'équivalent CO_2.

2 Indicateurs de tendance centrale

(livre élève pages 7 et 8)

Capacités
- Calculer la moyenne
- Calculer et interpréter la médiane

1 Calculer une moyenne

Nombre de buts en ligue 1

Le tableau ci-dessous fournit le nombre de buts marqués durant les 380 matchs de la saison 2010-2011 de ligue 1 de football.

Buts x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Effectifs n_i	44	60	118	77	53	21	5	1	0	1	380

1. Calculer le nombre total de buts marqués pendant la saison.

$0 \times 44 + 1 \times 60 + 2 \times 118 + 3 \times 77 + 4 \times 53 + 5 \times 21 + 6 \times 5 + 7 \times 1 + 8 \times 0$
$+ 9 \times 1 = 890$

2. Calculer la moyenne $\overline{x}$ du nombre de buts par match :

$$\overline{x} = \frac{\text{nombre total de buts}}{\text{nombre de matchs}} = \frac{890}{380}$$

3. Arrondir au dixième : 2,3

La **moyenne** $\overline{x}$ d'une série statistique est $\overline{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{nombre de valeurs}}$.

2 Calculer une médiane

Note médiane à un devoir

Dans une classe, la liste des notes obtenues à un devoir par les élèves classés par ordre alphabétique est la suivante : 8 – 16 – 9 – 19 – 9 – 11 – 13 – 8 – 13 – 14 – 7 – 10 – 10 – 2 – 7.

1. Classer les notes dans l'ordre croissant :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Note	2	7	7	8	8	9	9	10	10	11	13	13	14	16	19

La note médiane à ce devoir est celle située au centre de la liste ordonnée, c'est-à-dire au rang 8.

2. Quelle est la médiane ? La médiane est 10.

3. Calculer la moyenne des 15 notes : la moyenne est $156 \div 15 = 10,4$

4. La moyenne est-elle égale à la médiane ? Non.

Comment calculer la moyenne ?

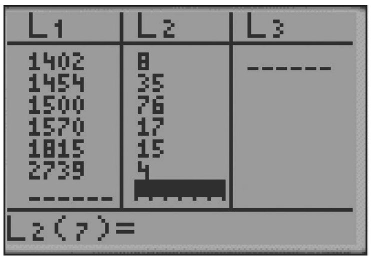
Le tableau suivant donne les salaires mensuels des 155 employés d'une entreprise.

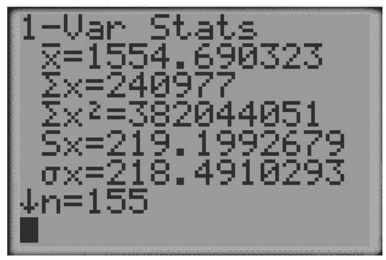
Salaires en euros : x_i	1 402	1 454	1 500	1 570	1 815	2 739
Effectifs : n_i	8	35	76	17	15	4

Déterminer le salaire moyen dans l'entreprise (arrondir au centime d'euro).

Le calcul de la moyenne se fait à l'aide de la calculatrice (voir fiche calculatrice).

- On entre les valeurs x_i dans la liste 1.
- On entre les effectifs n_i dans la liste 2.
- La moyenne $\overline{x}$ est affichée parmi les calculs statistiques à une variable.





- D'après la calculatrice, le salaire moyen dans cette entreprise est : $\overline{x} \approx$ ……1 554,69.. €.

Comment calculer la médiane ?

On reprend l'exemple précédent donnant les salaires mensuels des 155 employés d'une entreprise.
Déterminer le salaire médian.

- Si elles ne le sont pas, classer les valeurs de la série dans l'ordre croissant. Les valeurs de la série sont-elles classées dans l'ordre croissant ? .Oui……………………….
- On détermine le rang de la médiane (au centre).
  On a $\frac{155}{2}$ = .77,5………………….. On constate que 77 + 1 + 77 = 155. La médiane est au rang …78…………….. .
- On ajoute les effectifs jusqu'à dépasser le rang de la médiane.
  8 + 35 = ..43……….. ; 8 + 35 + 76 = ..119…..
- On en déduit la valeur de la médiane.
  Me = ..1 500….. €.

RÉPONSES
Exercices

1 Le montant moyen d'une commande, en convenant que toutes les valeurs d'une classe sont égales au centre de la classe, est : 114,55 € (en arrondissant au centime d'euro).

2 Cela signifie qu'en 2008, la moitié des salariés français ont un salaire mensuel inférieur ou égal à 1 655 € nets et la moitié des salariés français ont un salaire mensuel supérieur ou égal à 1 655 € nets.

3 Indicateurs de dispersion

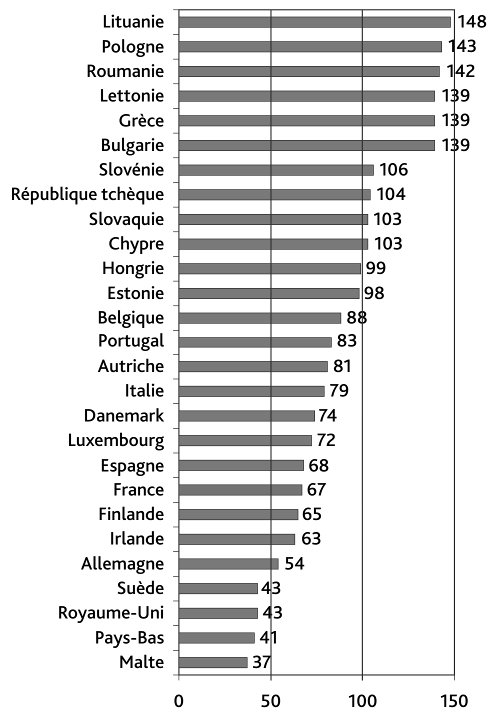
Capacités
- Calculer l'étendue
- Calculer et interpréter les quartiles

(livre élève pages 9 et 10)

1 Calculer l'étendue

Mortalité sur les routes de l'Union européenne

Le graphique ci-contre donne, pour 2008, le nombre de tués sur les routes pour 1 million d'habitants dans 27 pays de l'Union européenne.



1. Donner la plus petite valeur du caractère.

37

2. Donner la plus grande valeur du caractère.

148

3. Calculer la différence de ces deux valeurs.

148 − 37 = 111

Cette différence est l'**étendue** de la série.

2 Calculer le premier quartile et le troisième quartile

On reprend l'exemple précédent.

1. Combien vaut un quart de 27 ? 27 ÷ 4 = 6,75

2. a. Quel est, dans l'ordre croissant des valeurs, le premier pays pour lequel au moins un quart des 27 pays ont un résultat inférieur ou égal au sien ? La Finlande

b. Le résultat de ce pays est le **premier quartile** Q_1. On a $Q_1 =$ 65 tués pour un million d'habitants

3. Combien valent trois quarts de 27 ? 20,25

4 a. Quel est, dans l'ordre croissant des valeurs, le premier pays pour lequel au moins trois quarts des 27 pays ont un résultat inférieur ou égal au sien ? La Slovénie.

b. Le résultat de ce pays est le **troisième quartile** Q_3. On a $Q_3 =$ 106

5. Situer la mortalité sur les routes françaises par rapport au premier quartile : la mortalité sur les routes françaises est supérieure au premier quartile.

Comment calculer les quartiles ?

Le tableau suivant donne les salaires mensuels des 155 employés d'une entreprise.

Salaires en euros : x_i	1 402	1 454	1 500	1 570	1 815	2 739
Effectifs : n_i	8	35	76	17	15	4

Déterminer les quartiles de cette série statistique.

- On détermine le rang du premier quartile : on a $\frac{155}{4}$ = ……38,75……

  L'entier immédiatement supérieur est …39……, donc le premier quartile est au rang …39……
- On ajoute les effectifs jusqu'à dépasser le rang du premier quartile.

  8 + 35 = …43…… .
- On en déduit la valeur du premier quartile : Q_1 = …1 454…… €.
- On détermine le rang du troisième quartile : on a $\frac{155 \times 3}{4}$ = …116,25……

  L'entier immédiatement supérieur est …117……, donc le troisième quartile est au rang …117……
- On ajoute les effectifs jusqu'à dépasser le rang du troisième quartile.

  8 + 35 + 76 = …119……
- On en déduit la valeur du troisième quartile : Q_3 = …1 500…. €.

  Attention : la calculatrice calcule différemment les quartiles, et la valeur affichée peut parfois un peu différer de celle attendue.

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** L'étendue est 563 – 322 = 241.
La médiane est située au 29e rang (États-Unis). Elle vaut 489.
b. Le premier quartile correspond à la 15e valeur : $Q_1 = 428$ points.
Le troisième quartile correspond à la 43e valeur : $Q_3 = 513$ points.
c. La France n'est pas dans le quart de tête : $495 < Q_3$.

1 **a.** L'étendue des mesures est $e = 70 - 25 = 45$ MPa.
b. Pour 100 mesures, la médiane correspond à la demi-somme des mesures de rangs 50 et 51. On a $Me = 45$ MPa.
Le premier quartile correspond à la mesure de rang 25. On a $Q_1 = 35$ MPa.
Le troisième quartile correspond à la mesure de rang 75. On a $Q_3 = 50$ MPa.
c. Les trois quarts des mesures sont inférieures ou égales à 50 MPa.

4 Comparaison d'indicateurs

Capacités
- Comparer moyenne et médiane
- Comparer deux séries statistiques

(livre élève pages 11 et 12)

1 Comparer la moyenne et la médiane d'une même série

En 2008 en France, le salaire mensuel médian est $Me = 1\,655$ € nets pour un temps complet dans le secteur privé ou semi-public, tandis que le salaire mensuel moyen est $\overline{x} = 2\,069$ €.

1. Si tous les salariés avaient le même salaire, de combien serait-il ?

Il serait de 2 069 €.

Si l'on ne considère que les salaires des hommes, on a en 2008 : $Me_H = 1\,734$ € et $\overline{x}_H = 2\,216$ €.

2. Dans les deux cas, comparer moyenne et médiane : quelle est la plus grande ? La moyenne.

3. Calculer les différences $\overline{x} - Me = 2\,069 - 1\,655 = 414$ et $\overline{x}_H - Me_H = 2\,216 - 1\,734 = 482$

4. Comment peut-on expliquer que la moyenne soit supérieure à la médiane ?

La moyenne est « tirée vers le haut » par les gros salaires.

5. Pourquoi l'écart est-il plus important pour les salaires des hommes ? Les salaires les plus élevés sont souvent des salaires d'hommes.

Contrairement à la médiane, la moyenne est très **influencée par les valeurs extrêmes**.

2 Comparer la dispersion de deux séries statistiques

Les tableaux suivants donnent les notes obtenues à un devoir dans deux classes A et B de 24 élèves. Ces deux classes ont obtenu la même moyenne $\overline{x} = 10{,}75$.

Notes	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectifs dans la classe A	1	2	4	7	1	4	1	3	1

Notes	2	4	5	6	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18	20
Effectifs dans la classe B	1	3	1	2	2	2	2	1	1	2	1	2	1	1	2

1. Compléter le tableau ci-contre.

La comparaison de la dispersion peut se faire à l'aide de l'étendue et de $Q_3 - Q_1$.

Classe	Étendue	Q_1	Q_3	$Q_3 - Q_1$
A	8	9	12	3
B	18	6	16	10

2. Quelle est la classe dont les résultats sont les plus hétérogènes ? Justifier la réponse.

La classe la plus hétérogène est B car l'étendue et $Q_3 - Q_1$ y sont plus importants.

Plus l'**étendue** est importante, plus la dispersion est grande.

Plus l'**écart entre Q_1 et Q_3** est grand, plus la dispersion est grande.

Comment comparer deux séries statistiques ?

Voici les températures mensuelles moyennes relevées à Brest et à Moscou durant une année.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Brest (°C)	9,1	9,4	11	12,5	15,6	18,1	20,4	20,6	18,7	15,3	11,9	10
Moscou (°C)	– 6,3	– 4,2	1,5	10,4	18,4	21,7	23,1	21,5	15,4	8,2	1,1	– 3,5

À l'aide de la médiane, de l'étendue et des quartiles, comparer les températures mensuelles moyennes à Brest et à Moscou.

- La détermination de la médiane et des quartiles nécessite tout d'abord de trier les données. Compléter le tableau suivant en écrivant les températures dans l'ordre croissant.

Brest	9,1	9,4	10	11	11,9	12,5	15,3	15,6	18,1	18,7	20,4	20,6
Moscou	– 6,3	– 4,2	– 3,5	1,1	1,5	8,2	10,4	15,4	18,4	21,5	21,7	23,1

- La comparaison des tendances centrales peut s'effectuer ici à l'aide des médianes, fournies par les cases centrales du tableau (en bleu) : $\dfrac{12{,}5 + 15{,}3}{2} = 13{,}9$ et $\dfrac{8{,}2 + 10{,}4}{2} = 9{,}3$.

  Pendant la moitié des mois, la température moyenne mensuelle est inférieure à 9,3 ° à Moscou et supérieure à 13,9 ° à Brest.

- La comparaison des dispersions s'effectue à l'aide de l'étendue et de la différence entre Q_3 et Q_1 (apparaissant ci-dessus dans les cases jaunes).

  Compléter le tableau ci-contre.

Ville	Étendue	Q_1	Q_3	$Q_3 - Q_1$
Brest	11,5	10	18,1	8,1
Moscou	29,4	– 3,5	18,4	21,9

  Les températures moyennes mensuelles sont beaucoup plus dispersées à Moscou qu'à Brest.

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** Le temps médian est inférieur à 15 min.
b. La moyenne est influencée par les valeurs extrêmes. Certains déplacements ont des temps très longs.

2 La moyenne de l'atelier *B* est un peu plus proche de la valeur attendue.
La production de l'atelier *A* est beaucoup plus dispersée (étendue et $Q_3 - Q_1$ plus importants).

5 J'utilise un logiciel (tableur)

Illustrer des données

(livre élève pages 13 et 14)

Ouvrir le fichier « 01_revenus2007.xls » ou « 01_revenus2007.ods » (source impôts).

Revenus 2007	Tranches de revenu	< **9400€**	**9401€ à 11250€**	**11251€ à 15000€**	**15001€ à 18750€**	**18751€ à 28750€**	**28751€ à 38750€**	**38751€ à 97500€**	> **97500€**	Total
Nombre de foyers		9494278	2374448	5246582	4381099	6516598	3556487	4006396	460239	**36036127**
Revenu moyen		4416€	10351€	13206€	16769€	23298€	33204€	54376€	169270€	**21504€**

1. Répartition des foyers selon les tranches de revenus

a. **Sélectionner les nombres de foyers de C6 à J6, puis cliquer sur l'icône de graphiques et choisir *Nuage de points reliés par une courbe* avec Excel ou *XY Points et lignes* avec OpenOffice. Pour les valeurs de X, entrer ensuite les revenus moyens de C7 à J7.**

Que montre le graphique cartésien obtenu ? Une répartition très inégale des foyers par tranche.

b. **Représenter la répartition des foyers à l'aide d'un diagramme en secteurs. Afficher le pourcentage de chaque secteur en faisant un clic droit puis en choisissant *Format de la série de données* avec Excel ou *Éditer / Propriétés de l'objet* avec OpenOffice.**

- À quelle tranche appartient un foyer situé « au milieu » de la population, c'est-à-dire pour lequel existent autant de foyers gagnant plus que de foyers gagnant moins ? Entre 15 001 € et 18 750 €.
- Le revenu moyen, 21 504 €, appartient-il à cette tranche ? Non.
- Donner une explication : la moyenne est tirée vers le haut par des revenus très élevés.

A

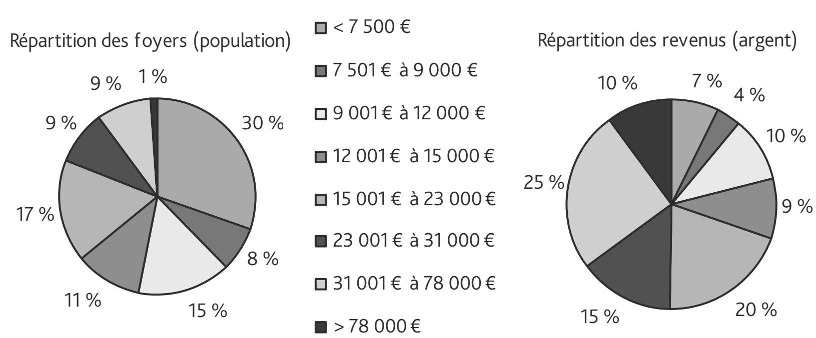
Appelez le professeur pour exposer vos résultats et vos arguments.

2. Répartition des revenus

En multipliant le nombre de foyers par le revenu moyen, on obtient le revenu total.

a. Calculer le revenu total de chaque tranche.
Voir le fichier. « 01_revenus2007_corrige_xls » ou « 01_revenus2007_corrige_ods ».

b. Représenter, ci-contre, ces revenus à l'aide d'un diagramme en secteurs avec pourcentages.



c. Comment constate-t-on, sur les graphiques, que 26 % de la population se partage 5 % des richesses et qu'à l'opposé, 1 % de la population se partage 10 % des richesses ? On compare les deux secteurs verts clair et les deux vecteurs bleus ciel.

A

Appelez le professeur pour exposer votre méthode.

J'utilise un logiciel (tableur)

Traiter un grand nombre de données

Voir fichier « 01_accidents-technos_corrige.xls » ou « 01_accidents-technos_corrige.ods ».

Ouvrir le fichier « **01_accidents-technos.xls** » ou « **01_accidents-technos.ods** ».
Il est établi à partir de la base de données des Nations Unies listant les accidents technologiques « majeurs » pour la période 1970-1997. Le nombre de morts est généralement une « estimation » car on ne dispose pas toujours de l'information exacte. Par exemple, pour l'accident de 1986 à Tchernobyl, cette source indique 31 morts. L'OCDE est l'Organisation de coopération et de développement économiques, comprenant essentiellement des pays économiquement développés.

	A	B	C	D	E	F
1	année	lieu	membre de l'OCDE (1 = oui)	nombre de morts	morts OCDE	morts non OCDE
2	1997	France, St-Nicolas d.P.	1	0	0	
3	1997	South Africa, Stanger	0	34		34
4	1997	China, Jin Jiang	0	32		32
5	1997	India, Wishakhaptnam	0	34		34
6	1997	Equador, Quito	0	3		3
7	1997	Turkey, Kirikkale	1	1	1	
8	1997	USA, Deer Park	1	0	0	
9	1997	Salvador, Acajutla	0	0		0

a. **À l'aide des fonctions du tableur, compléter le tableau (cellules I3 à J8) contenant les indicateurs statistiques des deux séries des nombres de morts dans les accidents survenus dans des pays de l'OCDE et dans des pays n'appartenant pas à l'OCDE. (Voir les fiches techniques tableur pour les formules à utiliser.)**

b. ▪ Quelle est l'étendue de chacune des deux séries ? Pays OCDE : $e = 550$.
Pays non OCDE : $e = 2\,800$.

▪ Quel renseignement la comparaison des étendues apporte-t-elle quant à la dispersion ?
Le nombre de morts est plus dispersé (variable) dans les pays non OCDE.

c. Que signifie, pour les pays de l'OCDE, une médiane nulle ? Dans la moitié des cas, les accidents technologiques dans les pays de l'OCDE ne font pas de morts.

d. L'affirmation : « 75 % des accidents technologiques font au plus 7 morts dans les pays de l'OCDE alors que 25 % des accidents technologiques font plus de 60 morts dans les pays n'appartenant pas à l'OCDE » est-elle exacte ?
Oui c'est une traduction de la comparaison des quartiles.

A

Appelez le professeur pour exposer votre réponse.

e. L'accident survenu à Bhopal (Inde) en 1984 a fait 2 800 morts. Cet accident apparaît comme exceptionnellement dramatique. Examinons ce que deviennent les indicateurs des pays non-OCDE si l'on n'en tient pas compte.
Effacer le contenu de la cellule D229.
Indiquer, parmi les paramètres suivants, ceux qui sont sensibles aux valeurs extrêmes et ceux qui le sont peu : moyenne, médiane, quartiles.
La moyenne est sensible aux valeurs extrêmes, les quartiles moins et la médiane très peu.

A

Appelez le professeur pour donner vos explications.

Exercices & Problèmes

Ⓡ *Exercices avec réponses en fin d'ouvrage.* ✱/✱✱ *Exercices plus difficiles.*

Exercices p. 17 à 19

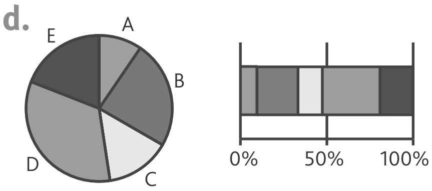
1. QCM : graphiques statistiques

a. 21.

b. $\frac{1}{3}$.

c. en barres.

d.



2. QCM

a. La température.

b. Quantitatif continu.

c. Que les températures maximales d'août 2003 sont globalement très supérieures à celles de 2007.

d. Vers le 10 août.

3. QCM : indicateurs statistiques

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

a. La moitié des personnes dans le monde sont moins âgées que Nadia.
Nadia a vécu plus longtemps que 50 % des personnes vivantes.

b. En Europe de l'Ouest, Nadia est dans la moitié jeune de la population.
En Afrique, Nadia est dans la moitié âgée de la population.

4. QCM

a. 50 % des Français salariés gagnent moins que la moyenne.
Les gros salaires « tirent la moyenne vers le haut ».

b. la médiane.

c. la moyenne.

d. l'étendue ; $Q_3 - Q_1$.

› Calculer un effectif ou une fréquence

5. a. Le caractère est quantitatif continu.

b. L'effectif total est 150.
Les fréquences des classes successives sont : 0,1 ; 0,2 ; 0,38 ; 0,26 ; 0,06.

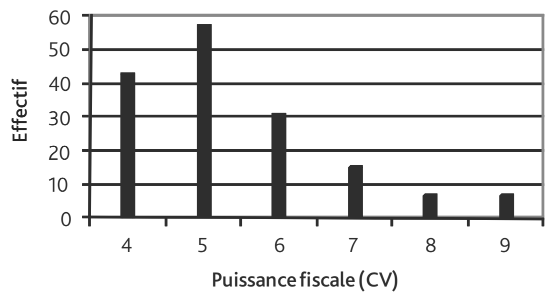
c. La fréquence des tiges dont le diamètre est compris entre 125 mm et 140 mm est 0,84. Ce résultat étant supérieur à 80 %, on peut considérer que la machine est bien réglée.

› Représenter une série statistique

6. a. Il s'agit d'un caractère quantitatif discret.

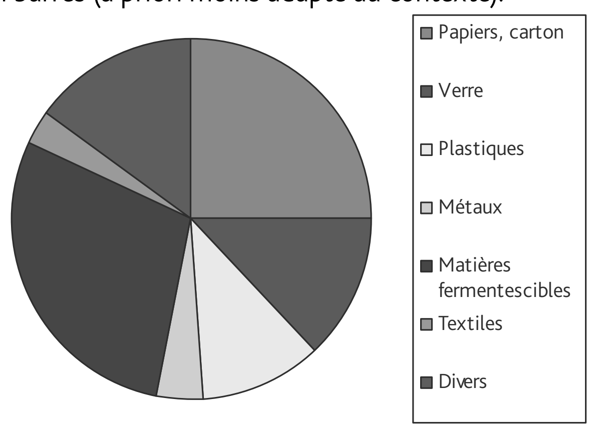
Remarque : c'est pourquoi un graphique en bâtons est adapté.

b.



7. a. Le caractère étudié est qualitatif.

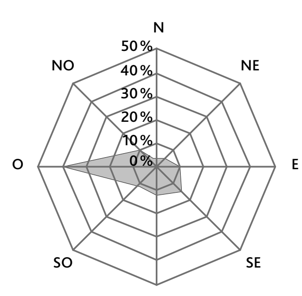
b. Pour représenter ce caractère qualitatif, on peut effectuer un diagramme en secteurs ou à bandes – comme dans l'exercice 8 – (qui montrera bien la part relative de chaque type de déchet) ou un diagramme en barres (a priori moins adapté au contexte).



c. La masse moyenne annuelle des déchets en verre par habitant est $455 \times \frac{13}{100} = 59{,}15\,\text{kg}$.

› Exploiter un graphique statistique

8. a.



b. Les vents « dominants » (les plus fréquents) sont les vents d'Ouest et, dans une moindre mesure, du Sud-Est.

9.

Montant en €	Effectif n_i	Fréquence f_i
[0 ; 50[	150	0,09375
[50 ; 100[	800	0,5
[100 ; 150[	450	0,28125
[150 ; 200[	200	0,125

10. a. L'aire du disque correspond, pour les produits culturels, à la somme totale en euros dépensée sur le net.

b. Ce graphique montre la répartition de l'argent entre les différents secteurs. Les livres et les vidéos se partagent plus des trois quarts du chiffre d'affaires.

c. La somme correspondant aux livres est :
$362 \times 39 \div 100 \approx 141$ millions d'euros.

11. a. Les graphiques sont exacts (mais l'échelle de l'axe des ordonnées est différente).
b. La réalité du pourcentage de baisse (assez faible) entre 2007 et 2008 se perçoit mieux sur le graphique de gauche, dont l'axe des ordonnées est gradué à partir de 0.

› Calculer une moyenne

12. a. Les mesures peuvent être différentes en raison d'une erreur de mesure, d'un défaut de l'ohmmètre ou de son réglage, d'une résistance un peu différente…
b. On a $R_{moy} = 800\ \Omega$.
c. Le pourcentage des valeurs situées dans l'intervalle $[R_{moy} - 2 ; R_{moy} + 2] = [798 ; 802]$ est $\frac{13}{14} \times 100$ soit environ 93 %.

› Calculer une médiane

13. a. La valeur médiane correspond à la Pologne et vaut 76 ans.
b. On a $39 + \frac{39 \times 110}{100} = 81{,}9$ qui est très proche de l'espérance de vie en France. La phrase est donc exacte.

› Comparer des séries

14. A - Série 1 : valeurs centrées autour de la médiane 6,01 avec une très faible dispersion puisque $Q_3 - Q_1 = 1{,}05$.
B - Série 4 : très forte dispersion puisque $Q_3 - Q_1$ est le plus important des quatre séries.
C - Série 2 : valeurs centrées autour de la médiane 5,98 avec une dispersion moyenne par rapport aux quatre séries puisque $Q_3 - Q_1 = 2{,}02$.
D - Série 3 : médiane faible (1,90) et dispersion moyenne par rapport aux autres séries. On a une répartition dissymétrique.

Remarque : on peut aussi procéder par élimination.

Problèmes p. 20

› Problème 1

Prévention, santé, sécurité

1. L'IMC de cet adulte vaut $\frac{80}{1{,}75^2} \approx 26{,}1$. D'après son IMC, cet adulte est considéré en surpoids.

2. Les adultes aux États-Unis ont tendance à avoir un IMC plus important que les Français (indicateur de tendance centrale).

3. a. Le secteur correspondant à un « IMC normal » occupe plus de la moitié de la surface du disque. Il correspond donc à une majorité de Français.

b. Premier quartile : classe « IMC normal ».

Médiane : classe « IMC normal ».

Troisième quartile : classe « surpoids ».

c. Moins de 25 % de la population a un IMC inférieur à la normale.

50 % de la population a un IMC inférieur ou égal à ceux de la classe normale.

25 % de la population a un IMC supérieur ou égal à ceux de la classe en surpoids.

4. a. Le secteur correspondant à un « IMC normal » occupe moins de la moitié de la surface du disque. Il ne correspond donc pas à une majorité d'Américains.

b. Premier quartile : classe « IMC normal ».

Médiane : classe « surpoids ».

Troisième quartile : classe « obésité ».

c. Les classes « surpoids » et « obésité » concernent la majorité de la population adulte aux États-Unis, alors que la situation est inversée en France.

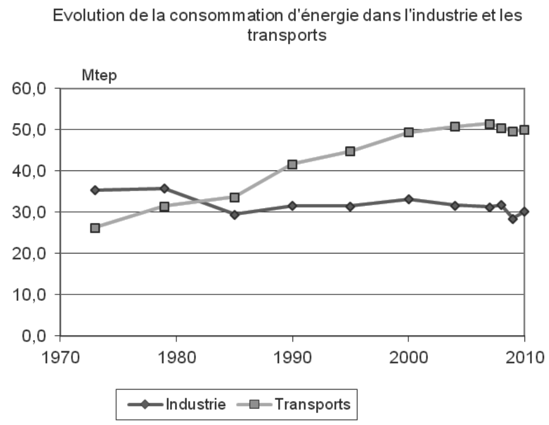
Démarche d'investigation

› Problème 2

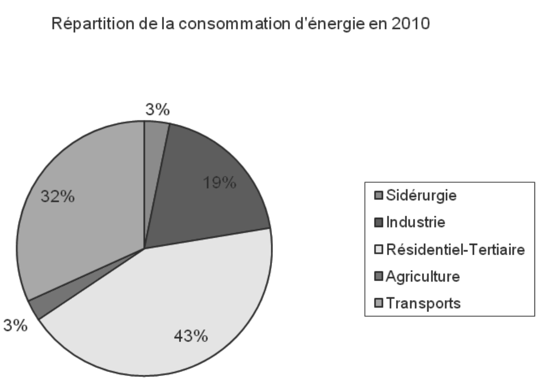
Pour la correction de ce problème, on peut consulter le fichier « **01_energie_corrige.xls** ».

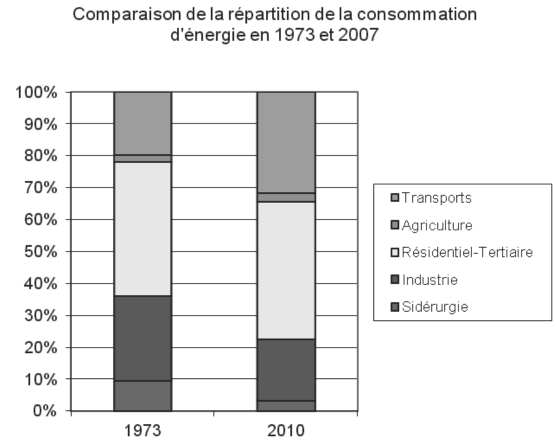
On peut réaliser les graphiques suivants.

– Évolution de la consommation d'énergie en France :

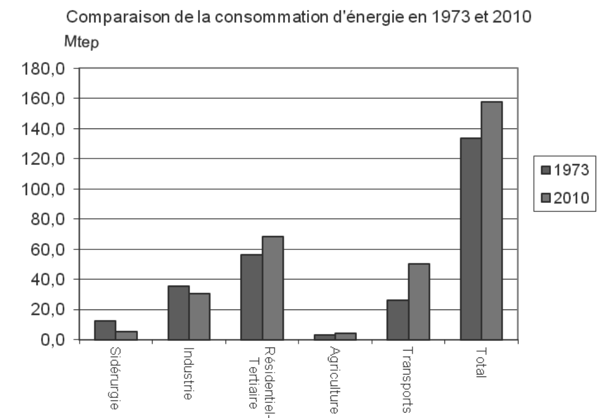


– Part relative de chaque secteur d'activité :



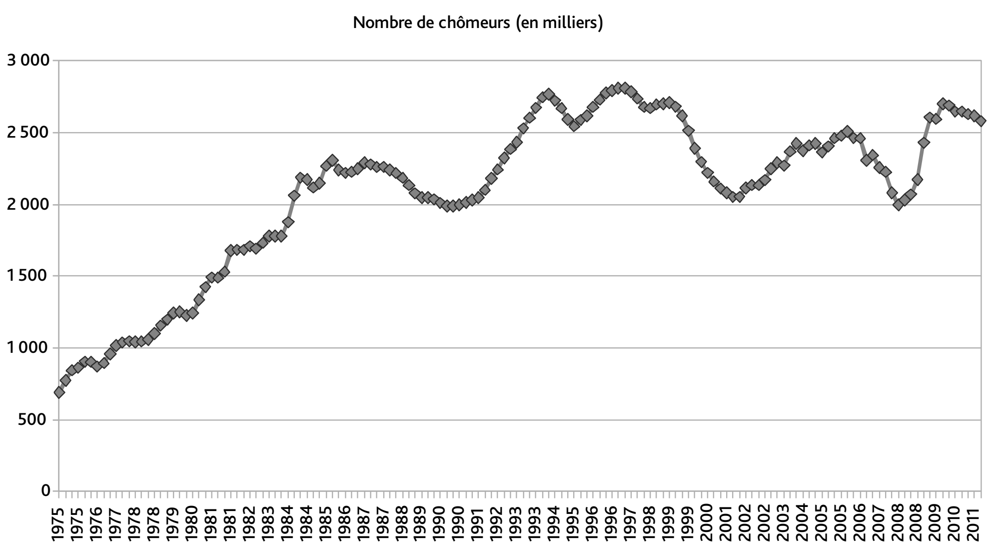


– Différences entre la consommation d'énergie en 1973 et la consommation d'énergie en 2010 :



› Problème 3

1.



2.

Moyenne	2 088
Mini	691
Maxi	2 810
Étendue	2 119
Q_1	1 903,75
Q_3	2 501
$Q_3 - Q_1$	597,25

L'écart à la moyenne début 2011 est $n - \bar{x} = 2\,617 - 2\,088 = 529$. Cette valeur est proche de l'écart interquartile. L'écart est donc important.

Voir fichier « 01_chomage_corrige.xls » ou « 01_chomage_corrige.ods ».

Je me teste

(livre élève pages 21 et 22)

EXERCICE 1 Notes aux devoirs

1 Deux classes ont effectué un devoir commun. Dans la première, comptant 35 élèves, la moyenne est 11,5. Dans la seconde, comptant 24 élèves, la moyenne est 9,5.

Quelle est la moyenne globale ? $(11{,}5 \times 35 + 9{,}5 \times 24) \div 59 \approx 10{,}7$

2 On considère les 7 notes suivantes : 6, 7, 8, 9, 10, 14, 16.

Quelle est la médiane ? 9

3 On considère les 8 notes suivantes : 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18.

Quelle est l'étendue ? $18 - 5 = 13$

4 On considère les 12 notes suivantes : 6, 8, 8, 9, 10, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19.

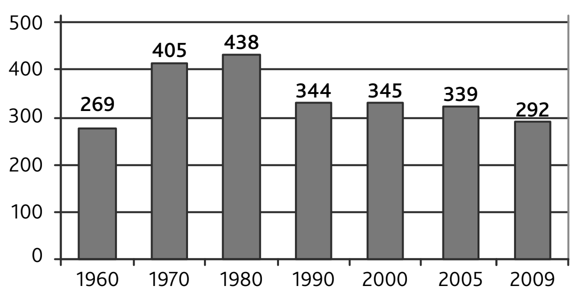
Quel est le premier quartile ? 8

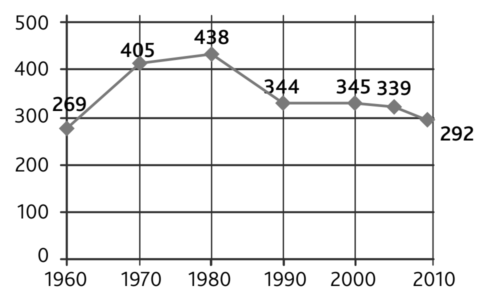
Quel est le troisième quartile ? 15

EXERCICE 2 Gaz à effet de serre en France

1 Diagramme en barres et diagramme cartésien

Les graphiques ci-dessous donnent l'évolution des émissions de gaz à effet de serre (GES) dues à l'activité humaine, en France métropolitaine, en millions de tonnes d'équivalent CO_2.





Source : CITEPA (Centre interprofessionnel technique d'étude de la pollution atmosphérique).

a. Combien d'années séparent les deux premières données ? Combien d'années séparent les deux dernières données ?

Pour les deux premières données : 10 ans.

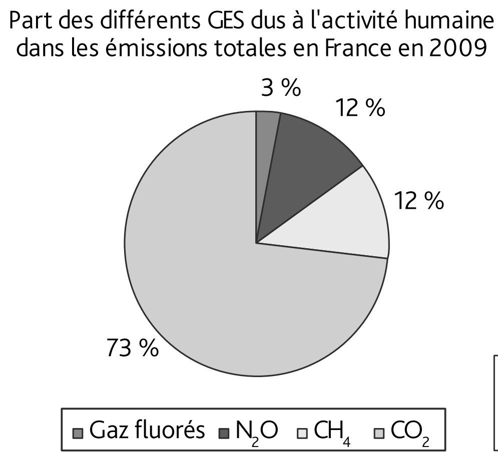
Pour les deux dernières données : 4 ans.

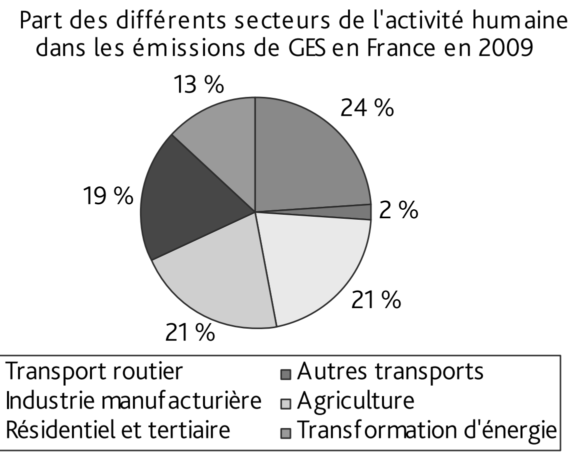
b. Quel est celui des deux graphiques qui illustre le mieux l'évolution des émissions de GES en France ? Justifier.

Le graphique cartésien (à droite) respecte l'échelle de temps et est préférable.

2 Diagrammes en secteurs

Les diagrammes en secteurs ci-dessous présentent les parts des différents GES et des secteurs d'activités dans les émissions en France en 2009.





a. Combien de tonnes d'équivalent CO_2 représentent chacun de ces disques ?

Ces disques représentent la totalité des émissions en 2009 en France, c'est-à-dire 292 millions de tonnes d'équivalent CO_2.

b. Que montre le diagramme de gauche quant à la part du CO_2 dans l'émission des gaz à effet de serre d'origine humaine en France en 2009 ?

Le diagramme de gauche montre que la part du CO_2, dans les émissions de GES, est très largement majoritaire.

b. Combien de tonnes d'équivalent CO_2 ont émis les transports routiers en France en 2009 ?

Les transports routiers on émis $292 \times \frac{24}{100} \approx 70$ millions de tonnes d'équivalents CO_2.

EXERCICE 2 Distance domicile-travail

Le tableau suivant concerne la distance moyenne (en km) parcourue par les actifs ayant un emploi hors de leur commune de résidence, pour les 96 départements de France métropolitaine.

Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Maximum
8,5	13,7	14,9	16,1	23,3

1 Interpréter la médiane.

A

Appelez le professeur pour lui donner votre interprétation.

2 Dans combien de départements, au moins, la distance moyenne parcourue est-elle inférieure ou égale à 13,7 km ?

Au moins 25 % des 96 départements (24 départements).

3 La distance moyenne parcourue par les actifs des Bouches-du-Rhône est 18,1 km par jour. Comment peut-on situer ce département par rapport aux autres ?

Au-dessus du troisième quartile : dans au moins 75 % des départements, la distance moyenne parcourue et inférieure à celle des Bouches-du-Rhône.

6 Proportionnalité

Capacités
- Reconnaître des suites proportionnelles
- Résoudre un problème dans une situation de proportionnalité

(livre élève pages 23 et 24)

1 Reconnaître deux suites proportionnelles

Attention aux calories !

Les nutritionnistes soulignent la nécessité de surveiller le nombre de kilocalories (kcal) apportées par notre alimentation. Les sucres ou glucides contribuent à cet apport de calories.

Masse de glucides (en g)	15	35	62	100
Nombre de kilocalories	60	140	248	400

1. Calculer les rapports suivants : $\frac{60}{15}$ = 4 ; $\frac{140}{35}$ = 4 ; $\frac{248}{62}$ = 4 ; $\frac{400}{100}$ = 4

2. Que constate-t-on ? Les rapports sont égaux.

3. Le nombre de kilocalories apportées par 1 g de glucides est : 4.

Les suites de nombres (15, 35, 62, 100) et (60, 140, 248, 400) sont proportionnelles.

On dit que le nombre de kilocalories est **proportionnel** à la masse de glucides.

Ce tableau est un **tableau de proportionnalité**. Son coefficient de proportionnalité est 4.

2 Écrire les produits en croix

On considère le tableau de proportionnalité suivant :

Masse de glucides (en g)	15	35
Nombre de kilocalories	60	140

On a vu dans l'activité précédente que l'on a l'égalité : $\frac{60}{15} = \frac{140}{35}$.

1. Effectuer les produits indiqués par les flèches

$15 \times 140 =$ 2 100 et $60 \times 35 =$ 2 100

2. Que remarque-t-on ? Les produits sont égaux.

On dit que, dans l'égalité $\frac{60}{15} = \frac{140}{35}$, les **produits en croix** sont égaux.

Comment calculer et utiliser un coefficient de proportionnalité ?

Dans le tableau ci-dessous, la remise est proportionnelle au prix marqué.

Prix marqué (en €)	35	80	62,50
Remise (en €)	2,80	6,40	5

Compléter ce tableau.

- Le coefficient de proportionnalité est : $\dfrac{2{,}80}{35} = 0{,}08$

  Pour passer de la première à la seconde ligne, on multiplie par ce coefficient.

- La remise sur un prix marqué de 80 € est : $80 \times 0{,}08 = 6{,}40$ €.

  Pour passer de la seconde à la première ligne, on divise par ce coefficient.

- Le prix marqué correspondant à une remise de 5 € est : $5 \div 0{,}08 = 62{,}50$ €.

Comment calculer une quantité dans une situation de proportionnalité ?

40 g de glucides apportent au corps humain 160 kilocalories. Le nombre de kilocalories apportées est proportionnel à la masse de glucides.

Calculer, sans utiliser le coefficient de proportionnalité, le nombre *x* de kilocalories apportées par 74 g de glucides.

- On peut s'aider d'un tableau de proportionnalité. Compléter le tableau ci-dessous

Masse de glucides (en g)	40	74
Nombre de kilocalories	160	x

- Sans faire le tableau, on peut aussi écrire directement l'égalité : $\dfrac{160}{40} = \dfrac{x}{74}$

On a aussi l'égalité $\dfrac{40}{160} = \dfrac{74}{x}$.

- L'égalité des produits en croix s'écrit : $40 \times x = 74 \times 160$
- En divisant les deux membres de cette égalité par 40, on obtient : $x = \dfrac{74 \times 160}{40} = 296$
- Le nombre de kilocalories apportées par 74 g de glucides est : 296

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** Les deux suites sont proportionnelles :
$\dfrac{0{,}9}{0{,}18} = \dfrac{7{,}5}{1{,}5} = \dfrac{39}{7{,}8} = 5.$

b. Les deux suites ne sont pas proportionnelles :
$\dfrac{1{,}53}{9} = 0{,}17$ mais $\dfrac{5{,}62}{33} \approx 0{,}1703.$

2

7	10,5	35
4,2	6,3	21

3 **a.** Les prix sont proportionnels aux quantités :

$\dfrac{32{,}56}{22} = \dfrac{44{,}40}{30} = \dfrac{56{,}24}{38} = 1{,}48.$

b. Le coefficient de proportionnalité est 1,48.
C'est le prix du litre d'essence.

4 **a.** La quantité de glucides contenue dans une boîte de 33 cL est 35 g (résultat arrondi à l'unité).

b. Il faut boire 19 cL (valeur arrondie à l'unité) de Coca-Cola pour absorber 20 g de glucides.

7 Pourcentages

Capacité
- **Utiliser des pourcentages dans des situations issues de la vie courante, des autres disciplines, de la vie économique et professionnelle.**

(livre élève pages 25 et 26)

1 Calculer et appliquer un taux

Au cinéma

Le complexe cinématographique Bigarama dispose de plusieurs salles de capacités différentes. Monsieur Ciné, le directeur, s'intéresse à leur niveau d'occupation.

1. Calcul du taux d'occupation de la salle 1

La salle 1 offre 240 places. À la séance de 14 heures, 150 sièges sont occupés. M. Ciné désire connaître le taux d'occupation de cette salle.

a. Calculer le rapport suivant : $\dfrac{\text{nombre de places occupées}}{\text{nombre total de places}} = \dfrac{150}{240} = 0{,}625$

Ce résultat est l'écriture décimale du taux d'occupation de la salle 1.

b. Écrire la fraction de dénominateur 100 égale à ce décimal : $\dfrac{62{,}5}{100}$.

Le taux d'occupation de la salle 1 est : ……62,5…….. %.

Le taux p % peut s'écrire sous la forme d'une fraction de dénominateur 100 ou d'un **nombre décimal obtenu en divisant p par 100**.

2. Calcul du nombre de places occupées dans la salle 2

La salle 2 offre 320 places. À la séance de 14 heures, 35 % des sièges sont occupés. M. Ciné a besoin de savoir combien de sièges sont libres dans cette salle.

a. Donner l'écriture décimale de 35 % : ……0,35………………

b. Calculer le nombre de sièges occupés en utilisant ce décimal.

…320…..× ……0,35…. = …112……

c. En déduire le nombre de sièges libres dans la salle 2 : …320 – 112 = 208……………………………

On dit que l'on applique le taux de 35 % à 320 ou que l'on prend 35 % de 320.

2 Utiliser un taux d'évolution

Dans la salle 3, M. Ciné compte 160 sièges occupés à la séance de 14 heures. Ce nombre augmente de 15 % à la séance de 16 heures.
M. Ciné veut connaître le nombre de sièges occupés à la séance de 16 heures.

1. Calculer le nombre de sièges supplémentaires occupés à la séance de 16 heures.

………160…..× ……0,15…….. = …24……….

2. Calculer le nombre total de sièges occupés à la séance de 16 heures : ……160…..+ …24…….. = ……184…..

3. On peut présenter ce calcul différemment. Le nombre de sièges occupés à 16 heures peut s'écrire :

$160 + 160 \times 0{,}15$ ou encore $(160 \times 1) + (160 \times 0{,}15)$.

Mettre 160 en facteur commun dans cette expression.

160(….1……… + ……0,15…..) = 160 × ….1,15…… = …184……..

4. Vérifier que le résultat trouvé est identique à celui de la question b.

Augmenter une quantité de 15 %, c'est la multiplier par 1 + 0,15, c'est-à-dire par 1,15.

5. Compléter la phrase suivante en s'inspirant de la phrase écrite en bleu.

Diminuer une quantité de 15 %, c'est la multiplier par ……1…… – ……0,15.. , c'est-à-dire par ..0,85…..

Comment calculer une quantité dont on connaît un pourcentage ?

Inès a bénéficié d'une remise de 15 % sur une tablette numérique.
La remise s'élève à 36 €. Calculer le prix de la tablette avant remise.

- Donner l'écriture décimale du taux : 15 % = …0,15…..
- Diviser la remise par l'écriture décimale du taux.

  …36….. ÷ …0,15….. = …240…..

  Le prix de l'article avant remise est : …240……………. €.

Comment calculer un taux d'évolution ?

Au mois de mai, le salaire net de Kevin est de 1 325,20 €. Il est de 1 345,08 € au mois de juin. Calculer le taux d'augmentation entre les mois de mai et juin.

- Calculer le montant de l'augmentation.

  .1 345,08. – .1 325,20.. = .19,88….. €.

- Calculer l'écriture décimale du taux d'augmentation.

  $$\frac{\text{augmentation}}{\text{salaire } \textbf{avant} \text{ augmentation}} = \frac{19{,}88}{1\,325{,}20} = 0{,}015$$ Arrondir au millième.

- Multiplier par 100 le décimal trouvé : .0,015…. × 100 = .1,5……..

  Le taux d'augmentation est …1,5…… %.

RÉPONSES

Exercices

1 6 % de 32 € = 1,92 € ; 1 % de 230 kg = 2,3 kg ; 10 % de 2 800 m = 280 m.

2 Le taux de réussite est 65 %.

3 **a.** Le prix du téléviseur avant remise est 780 €.
b. Le prix du téléviseur après remise est 741 €.

4 Le pourcentage de remise est 16 %.

5 Le nombre d'élèves reçus en 2013 est : 750 × 1,08 = 810.

6 Le nombre de salariés après compression du personnel est : 1 800 × 0,88 = 1 584.

8

J'utilise un logiciel (tableur)

Remplir une facture

(livre élève pages 27 et 28)

Terre et jardins

Facture n° 11708
N° client : 648
Date d'expédition : 14 février 2012

Réf.	Désignation	Quant.	PUHT(1)	Remise	PU net HT(2)	Montant HT
0651	Récupérateur d'eau de pluie	1	33,40	10 %	30,06	30,06
0876	Kit de jonction	1	6,60	0 %	6,60	6,60
0802	Toile d'ombrage (au m)	7	7,80	5 %	7,41	51,87
0788	Clips de fixation (par 6)	5	4,00	0 %	4	20

(1) Prix unitaire hors taxe.
(2) Le prix net est le prix remise déduite.
(3) Taxe sur la valeur ajoutée.
Elle s'ajoute au prix net HT.

Total HT	108,53
Remise fidélité 2 %	2,17
Net HT	106,36
TVA 19,6 % (3)	20,85
Forfait frais expédition	10,00
Net à payer	137,21

1. Utilisation de la calculatrice

Compléter cette facture à l'aide de la calculatrice.

2. Utilisation d'un tableur

Avec un tableur, l'introduction de formules dans les cellules permet d'utiliser le même tableau de calculs lorsque les données numériques de la facture changent.

Ouvrir le fichier « 02_facture.xls » ou « 02_facture.ods ».

Voir fichier « 02_facture_corrige.xls » ou « 02_facture_corrige.ods »

a. Remplir la facture précédente. Pour cela :

- **Compléter les cellules teintées en jaune par les données ci-dessus.**
- **Entrer les formules adéquates dans les cellules teintées en bleu.**

Par exemple, dans la cellule F2, saisir la formule =D2-D2*E2.

b. Vérifier que le net à payer est celui trouvé avec la calculatrice.

A

Appelez le professeur pour lui présenter votre travail.

c. Modifier les données. Pour cela :

- **Copier le tableau sur la feuille 2.**
- **Saisir les modifications suivantes : 2 kits de jonction, 15 % de remise sur la toile d'ombrage, forfait expédition 15 €. Les autres données sont inchangées.**

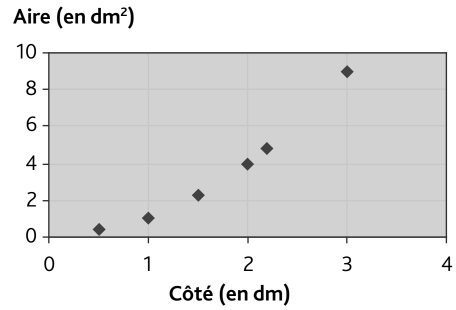
d. Donner le net à payer : 143,54 €

J'utilise un logiciel (tableur)

Caractériser graphiquement une situation de proportionnalité

Voir fichier « 02_graphique_corrige.xls » ou « 02_graphique_corrige.ods »
On considère différentes plaques carrées en bois, dont le côté *c* varie de 0,5 dm à 3 dm.
Chaque plaque est garnie d'une fine baguette sur le bord. On estime les chutes de baguette à 0,8 dm par plaque, quelle que soit la mesure du côté.

1. Aire de la plaque



Ouvrir le fichier « 02_graphique.xls » ou « 02_graphique.ods ».
Cliquer sur la feuille Aire plaque.

- **Compléter le tableau en recopiant vers la droite la formule contenue dans la cellule B4, jusqu'à la cellule G4.**

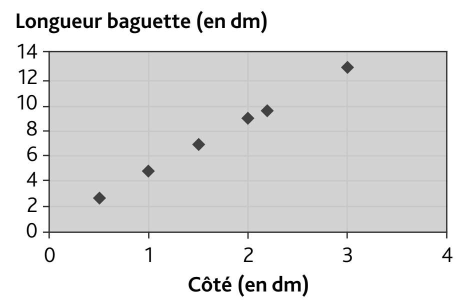
a. L'aire est-elle proportionnelle au côté *c* ?

Non : $\frac{0,25}{0,5} = 0,5$; mais $\frac{1}{1} = 1$.

- **Sélectionner les cellules de A3 à G4, puis cliquer sur l'icône de graphiques. Choisir *Nuages de points*.**

b. Les points obtenus sont-ils alignés ? Non

2. Longueur de la baguette



Dans le même fichier, cliquer sur la feuille Longueur baguette.

- **Compléter le tableau en recopiant vers la droite la formule contenue dans la cellule B4, jusqu'à la cellule G4.**

a. La longueur de la baguette est-elle proportionnelle au côté *c* ?

Non : $\frac{2,8}{0,5} = 5,6$; mais $\frac{4,8}{1} = 4,8$.

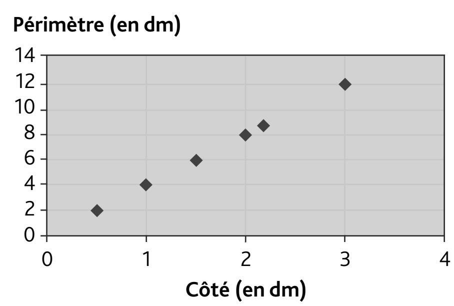
- **Sélectionner les cellules de A3 à G4, puis cliquer sur l'icône de graphiques. Choisir *Nuages de points*.**

b. Les points obtenus sont-ils alignés ? Oui

c. Les points obtenus sont-ils alignés avec l'origine du repère ? Non

En cas de doute pour répondre, ajouter 0 comme valeur de *c* dans le tableau et refaire le graphique.

3. Périmètre de la plaque



Dans le même fichier, cliquer sur la feuille Périmètre plaque.

- **Compléter le tableau.**

a. Le périmètre est-il proportionnel au côté *c* ? Oui

- **Sélectionner les cellules de A3 à G4, puis cliquer sur l'icône de graphiques. Choisir *Nuages de points*.**

b. Les points obtenus sont-ils alignés ? Oui

c. Les points obtenus sont-ils alignés avec l'origine du repère ? Oui

A

Appelez le professeur pour expliquer comment on reconnaît graphiquement une situation de proportionnalité.

Exercices & Problèmes

Ⓡ *Exercices avec réponses en fin d'ouvrage.* ✱/✱✱ *Exercices plus difficiles.*

Exercices p. 31 à 33

1. QCM

a. $\dfrac{7\times 14}{5}$

b. On ne peut pas savoir.

c. 72 % ; supérieur à 50 %

d. $78\times 1{,}196$

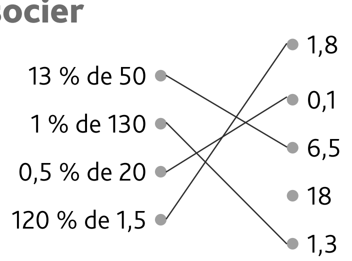
2. Vrai - Faux

a. Faux

b. Faux

c. Vrai

3. Associer



› Résoudre un problème de proportionnalité

4.

22	25	0,8	3,2
13,2	15	0,48	1,92

5. a. Le prix du timbre n'est pas proportionnel au poids de la lettre. On ne peut donc pas donner le prix du timbre à mettre sur une lettre de 40 g à partir de celui pour une lettre de 20 g.

b. En général, la consommation n'est pas proportionnelle à la vitesse. On ne peut donc pas calculer la consommation à 120 km/h sans autre indication.

6. a. $\dfrac{3293}{181}=18{,}19$ et $\dfrac{4042}{214}\approx 18{,}19$.
Il n'y a donc pas proportionnalité entre la recette et le nombre de spectateurs.

b. Les places ne sont pas toutes au même prix. Il peut y avoir, par exemple, plus de places à tarif réduit le mardi que le jeudi. Il peut y avoir aussi des entrées gratuites.

7. a. $x=\dfrac{30}{21}=\dfrac{10}{7}$ **b.** $y = 0{,}936$ **c.** $z = 11{,}25$

8. Il faut mettre 126 g de farine.

9. a. Il faut 625 L de lait.

b. On peut fabriquer 280 fromages, soit 728 kg.

10 a. Il faut manger 80 g de frites.

b. La quantité de lipides est 36 g.

11. Il restera 4,9 L d'essence à la fin du trajet.

12. Le souvenir coûte 32,87 €.

13. Le souvenir coûte 14,33 livres.

› Calculer et appliquer un taux de pourcentage

14. Les écritures décimales de 42 %, 4,2 %, 2 %, 128 %, 106 % sont respectivement 0,42 ; 0,042 ; 0,02 ; 1,28 ; 1,06.

15. Olivier a obtenu 40 % des votes.

16. Le taux de remise est 12,5 %.

17. Le pourcentage est 60 %.

18. a. 25 % de 900 m = 225 m.

b. 10 % de 350 g = 35 g.

c. 50 % de 36 s = 18 s.

19. 16 236 véhicules respectent la limitation de vitesse.

20. a. Le taux de remboursement de la Sécurité sociale est 60 %.

b. La somme non remboursée est 9,60 €.

c. La mutuelle rembourse 7,68 €.

21. 15 donneurs sont du groupe A négatif.

› Calculer une quantité initiale

22. Il y a 500 élèves dans le lycée.

23. Le montant des économies de Marion est 140 €.

24. 406 candidats ont échoué.

Calculer et utiliser un pourcentage d'évolution

25. a. Le coefficient est 0,012.
b. Le coefficient est 1,012.

26. Le coefficient est 1,28.

27. Il y a une augmentation de 12 %.

28. Le livre a augmenté de 10 %.

29. Le nombre d'élèves à la rentrée 2009 est 780.

30. Le loyer avant augmentation est 850 €.

31. Le prix du meuble pris en magasin est 1 840 €.

32. a. Le coefficient est 0,35.
b. Le coefficient est 0,65.

33. Le coefficient est 0,96.

34. Il y a une diminution de 9 %.

35. Le pourcentage de baisse est 4 %.

36. Le prix de la calculatrice après remise est 70,20 €.

37. Le prix initial de la table est 60 €.

38. a. Le prix après la seconde démarque est 154,70 €.
b. Le pourcentage global de remise est 44,75 %.

39. a. Le montant de la TVA est 30,38 €.
b. Le prix de vente taxe comprise est 185,38 €.

40. a. Le montant de la TVA est 51,70 €.
b. Le taux de la TVA est 5,5 %.

41. a. Le coefficient est 1,196.
b. Le prix de vente hors taxe est 1 240 €.

Problèmes p. 33 et 34

Problème 1 – Change de devises

1. Monsieur Dupont reçoit 2 890,52 roubles.

2. Le montant de la commission est 2,40 €.

3. Monsieur Durant a changé 86,35 €.

Problème 2 – Aliments et calories

1. 100 g de pain apportent 258 kilocalories.

2. 100 g de cacahuètes apportent 605 kilocalories.

3. Il faut manger 30 g de cacahuètes. Résultat arrondi à l'unité.

4. La masse de fromage blanc est 509 g. Résultat arrondi à l'unité.

Problème 3 – Consommation d'un scooter

1.

Distance (en km)	50	22	210
Consommation (en litres)	2	0,88	8,4

2. Malik peut faire au maximum 11 allers-retours.

3. La dépense en carburant est 17,84 €.

Problème 4 – Intérêt et valeur acquise

1. L'intérêt s'élève à 76,13 €.

2. La valeur acquise est 2 686,13 €.

3. Le capital placé est 14 400 €.

Problème 5 * – Les polluants atmosphériques

1. a. Les émissions ont été réduites de 6,28 %.
b. La circulation routière a émis 130,5 millions de tonnes de CO_2 équivalent.

2. a. La masse de dioxyde de soufre est 473 000 tonnes.
b. Le taux est 11,86 %.

3. a. 5 g de dioxygène réagissent avec 10 g de soufre.
b. 20 g de soufre réagissent avec 10 g de dioxygène.
c. On obtient 30 g de dioxyde de soufre.
d. Il faut 40 g de soufre.

Démarche d'investigation

Problème 6 – Variations successives

1,05 × 0,95 = 0,9975.
Le prix a baissé de 0,25 %.

Problème 7 – Construction d'un mur

1 ouvrier seul mettrait 18 heures. Donc 4 ouvriers mettraient 4 h 30.

Je me teste

(livre élève pages 35 et 36)

EXERCICE 1 Présence de plomb dans l'eau

Le tableau suivant donne les masses de plomb trouvées dans 1 litre d'eau (c'est-à-dire 1 000 mL) prélevé dans différents lieux.

Eau de pluie	Eau de ruissellement urbain	Eaux résiduaires	Eau de ruissellement sur autoroute
0,002 à 0,4 mg	0,02 à 0,2 mg	0,05 à 0,15 mg	0,2 à 0,53 mg

1 Utilisation du tableau

L'analyse de 200 mL d'une eau de ruissellement indique qu'elle contient une masse de 0,024 mg de plomb.

a. Calculer la masse de plomb contenue dans un litre de cette eau.

$(0{,}024 \times 1\,000) \div 200 = 0{,}12$ mg

b. À l'aide du tableau ci-dessus, donner un lieu de prélèvement possible de cette eau.

Eau de ruissellement urbain par exemple.

2 Eau de ruissellement sur autoroute

400 mL d'eau de ruissellement sur autoroute contiennent 0,14 mg de plomb.

a. Calculer la masse de plomb contenue dans 750 mL de cette eau.

$(0{,}14 \times 750) \div 400 = 0{,}2625$ mg.

Un an plus tard, un prélèvement d'eau effectué au même endroit montre la présence de 0,28 mg de plomb par litre d'eau.

b. Calculer l'évolution, en pourcentage, de la teneur de l'eau en plomb.

$0{,}28 - 0{,}2625 = 0{,}0175$ mg.

$0{,}0175 \div 0{,}2625 \approx 0{,}067$. L'augmentation en pourcentage, est de 6,7 %.

3 Présence de plomb dans l'eau du robinet

L'ingestion de plomb peut causer de graves maladies. L'être humain ne doit pas en absorber plus de 0,0036 mg par kilogramme de poids et par jour.

Jasmine, 10 ans, habite un immeuble ancien où certaines parties de la canalisation d'eau sont en plomb. L'eau du robinet contient 0,022 mg de plomb par litre.

Jasmine pèse 32 kg et boit chaque jour 1,5 litre d'eau du robinet.

Absorbe-t-elle une quantité de plomb dangereuse pour sa santé ?

Quantité à ne pas dépasser pour Jasmine : $0{,}0036 \times 32 = 0{,}1152$ mg.

Quantité absorbé : $0{,}022 \times 1{,}5 = 0{,}033$ mg.

La quantité absorbée n'est donc théoriquement pas dangereuse.

A

Appelez le professeur pour argumenter votre réponse

EXERCICE 2 Les élections

Lors d'une élection, on relève les résultats obtenus par le candidat Hervé Dubois dans deux communes : Fleuron et Moissy.

	Nombre total de votants	Pourcentage obtenu par Hervé Dubois
Fleuron	6 400	45 %
Moissy	9 200	52 %

1 Montrer qu'Hervé Dubois a obtenu, au total, 7 664 voix dans ces deux communes.

Nombre de voix obtenues à Fleuron : $6\,400 \times 0{,}45 = 2\,880$.

Nombre de voix obtenues à Massy : $9\,200 \times 0{,}52 = 4\,784$.

Nombre total de voix : $2\,880 + 4\,784 = 7\,664$.

2 Calculer le pourcentage de voix obtenues par Hervé Dubois dans ces deux communes.

Nombre total de votants : $6\,400 + 9\,200 = 15\,600$.

Pourcentage de voix obtenues : $\frac{7\,664}{15\,600} \approx 0{,}491$, soit 49,1 %.

3 Vérifier que ce pourcentage n'est pas égal à la demi-somme des pourcentages obtenus dans chacune des communes. Expliquer pourquoi.

$\frac{45\,\% + 52\,\%}{2} = 48{,}5\,\%$. Il est normal que les deux pourcentages ne soient pas égaux car le nombre de votants n'est pas le même qans les deux communes.

A

Appelez le professeur pour présenter votre démarche.

4 À Fleuron, la candidate Valérie Dupont a obtenu 25 % de voix de moins qu'Hervé Dubois. Calculer le nombre de voix recueillies à Fleuron par Valérie Dupont.

$2\,880 \times 0{,}75 = 2\,160$ voix.

5 À Moissy, la candidate Valérie Dupont a obtenu 1 232 voix de moins qu'Hervé Dubois. Calculer le pourcentage du nombre total de votants à Moissy obtenu par Valérie Dupont.

Nombre de voix : $4\,784 - 1\,232 = 3\,552$.

En pourcentage : $\frac{3\,552}{9\,200} \approx 0{,}386$, soit 38,6 %.

9 Équation du 1er degré à une inconnue

(livre élève pages 37 et 38)

Capacités
- Résoudre une équation du premier degré à une inconnue
- Résoudre une équation-produit $(ax + b)(cx + d) = 0$

1 Traduire un énoncé par une équation

En musique

Camille a téléchargé sur son lecteur MP3 un certain nombre de mégaoctets (Mo) de musique. Les $\frac{2}{5}$ sont de la musique techno, 55 % du rap et les 62 Mo restants sont des morceaux divers.
On veut connaître le nombre de Mo de musique sur le lecteur.

On peut résoudre ce problème de différentes façons. On choisit ici de traduire l'énoncé par une équation que l'on résoudra.

On appelle x le nombre de Mo de musique sur le lecteur.

1. Donner l'écriture décimale de la fraction $\frac{2}{5}$: $\frac{2}{5} = 0{,}4$

2. Exprimer, en fonction de x, le nombre de Mo de musique techno : $0{,}4\,x$

3. Donner l'écriture décimale du pourcentage 55 % : 55 % = 0,55

4. Exprimer, en fonction de x, le nombre de Mo de musique rap : $0{,}55\,x$

5. Exprimer le nombre total de Mo, en fonction de x : $0{,}4\,x$ + $0{,}55\,x$ + 62

6. Écrire l'équation traduisant l'énoncé.

$x = 0{,}42\,x + 0{,}55\,x + 62$

Le nombre total de Mo est aussi égal à x.

2 Résoudre une équation

La situation de la première partie se traduit par l'équation $x = 0{,}95x + 62$.

N'oubliez pas : $x = 1 \times x$.

1. Pour résoudre cette équation, on peut successivement :

- retrancher $0{,}95x$ aux deux membres de l'équation et réduire.

  $x - 0{,}95\,x = 62$; $0{,}05x = 62$.

- diviser les deux membres par 0,05 : $\frac{0{,}05x}{0{,}05} = \frac{62}{0{,}05}$

- Terminer le calcul de x : $x =$ 1 240.

  La solution de l'équation $x = 0{,}95x + 62$ est 1 240.

2. Donner la réponse : le nombre de mégaoctets est 1 240.

Comment résoudre une équation du premier degré à une inconnue ?

Résoudre l'équation $4 - (2x + 1) = 4(2x + 3) - x$.

- Développer le produit et réduire dans les deux membres.

$4 - 2x - 1 = 8x + 12 - x$

$-2x + 3 = 7x + 12$

- Regrouper les termes qui contiennent x dans un membre et les termes constants dans l'autre membre.

Pour cela, retrancher $7x$ et retrancher 3 dans les deux membres.

$-2x - 7x = 12 - 3$

- Réduire dans les deux membres : $-9x = 9$
- Diviser les deux membres par -9 et simplifier le résultat obtenu : $x = \frac{9}{-9} = -1$

La solution de l'équation est : -1

Comment résoudre une équation-produit ?

a. Résoudre l'équation $(3x - 5)(2x + \frac{1}{3}) = 0$.

- Un produit de facteurs est nul lorsque l'un au moins des facteurs est nul.

$3x - 5 = 0$ ou $2x + \frac{1}{3} = 0$.

- Résoudre séparément chacune des équations obtenues.

$3x = 5$ $\quad 2x = -\frac{1}{3}$

$x = \frac{5}{3}$ $\quad x = -\frac{1}{6}$

- Les solutions sont : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{1}{6}$

b. Résoudre l'équation $25x^2 - 81 = 0$.

- Factoriser le premier membre à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

$(5x + 9)(5x - 9) = 0$.

- Continuer la résolution en utilisant la méthode de l'équation précédente.

$5x + 9 = 0$ ou $5x - 9 = 0$.

$x = -\frac{9}{5}$ $\quad x = \frac{9}{5}$

- Les solutions sont : $-\frac{9}{5}$ et $\frac{9}{5}$

RÉPONSES

Exercice

a. $-2,5$; $2,2$; 12.

b. $0,37$; -25 ; $\frac{5}{4}$.

c. 56 ; 32 ; $\frac{12}{55}$; $-\frac{1}{8}$.

d. $-\frac{7}{3}$; 3 ; $1,5$.

e. $-\frac{8}{3}$; $-\frac{3}{19}$; $\frac{5}{12}$.

f. 4 ; $18,75$.

g. 9 ; 4.

h. $-0,5$; -15.

i. $\frac{195}{7}$; -1.

j. $\frac{22}{7}$.

k. $-\frac{13}{12}$.

l. -5 et 3 ; $\frac{7}{2}$ et 8.

m. 3 et -3 ; $\frac{4}{5}$ et $-\frac{4}{5}$; 2 et -2.

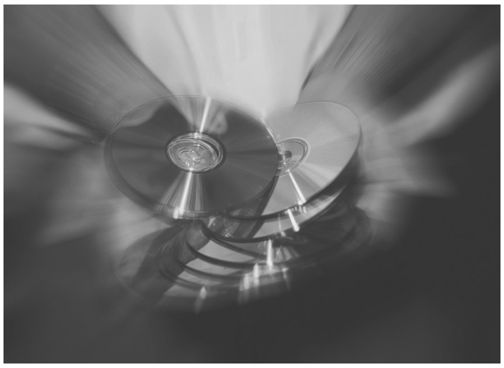
10 Inéquation du 1er degré à une inconnue

(livre élève pages 39 et 40)

Capacités
- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue
- Représenter les solutions sur un axe

1 Traduire un énoncé par une inéquation

Gérer un budget



Nadia dispose de 50 € pour acheter des CD. Elle a déjà choisi deux CD à 11,20 € chacun. Elle veut compléter son achat par trois CD soldés au même prix. Il y a des offres à différents prix. Nadia veut connaître le prix à ne pas dépasser pour un CD soldé.

On peut résoudre ce problème de différentes façons.

Dans la méthode proposée ci-dessous, on traduit l'énoncé par une inéquation que l'on résoudra.

On appelle x, en euros, le prix d'un CD soldé.

1. Exprimer la dépense de Nadia, en fonction de x : $3x + 11{,}2 \times 2$.

2. Écrire une inéquation traduisant la contrainte du budget de 50 € à ne pas dépasser : $3x + 22{,}4 \leqslant 50$.

2 Résoudre une inéquation

La situation de la première partie se traduit par l'inéquation 3x + 22,4 ⩽ 50. Pour résoudre cette inéquation, on peut successivement :

1. Retrancher 22,4 aux deux membres de l'inéquation et réduire : $3x \leqslant 27{,}6$

2. Diviser les deux membres par 3 : $x \leqslant \dfrac{27{,}6}{3}$. On obtient : $x \leqslant 9{,}2$

3. Faire une phrase pour donner la réponse.

Les solutions de l'inéquation $3x + 22{,}4 \leqslant 50$ sont les nombres inférieurs ou égal à 9,2.

Les CD soldés sont à différents prix : 9,30 € ; 3,60 € ; 10,10 € ; 7,20 € ; 9,20 €.

4. Parmi ces prix, donner les choix possibles de Nadia (les trois CD achetés sont au même prix).

3,60 € ; 7,20 € ; 9,20 €.

3 Écrire un intervalle

Tous les nombres que vous utilisez en classe de seconde sont appelés nombres réels. Ils peuvent être positifs, négatifs, entiers, décimaux, fractionnaires. Les racines carrées et π sont aussi des réels.

1. Écrire tous les décimaux d à une décimale tels que $2 \leqslant d \leqslant 3$: 2,0 ; 2,1 ; 2,2 ; 2,3 ; 2,4 ; 2,5 ; 2,6 ; 2,7 ; 2,8 ; 2,9 ; 3,0.

2. Pourquoi ne peut-on pas écrire tous les réels x tels que $2 \leqslant x \leqslant 3$? Il y en a une infinité.

3. On peut les représenter sur un axe. Quelle est la bonne représentation pour $2 \leqslant x \leqslant 3$? ………………..

On écrit que x appartient à l'**intervalle** $[2 ; 3]$.

Comment résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue ?

Résoudre les inéquations :

a. $2x + 5 \leqslant -10 - x$

b. $4 - 2x < 5x + 18$

- On regroupe les termes qui contiennent x dans un membre et les termes constants dans l'autre.

Pour cela, ajouter x et retrancher 5 aux deux membres : $2x$ …$+x$… $\leqslant -10$ …-5…

…$3x$… $\leqslant$ …-15…

Pour cela, retrancher $5x$ et retrancher 4 aux deux membres : $-2x$ …$-5x$… < 18 …-4…

…$-7x$… $<$ …14…

Pensez à changer le sens de l'inéquation si vous la divisez par un nombre négatif.

- On divise les deux membres par le coefficient de x.

Diviser les deux membres par 3 et simplifier.

$x \leqslant \dfrac{-15}{3}$; $x \leqslant -5$

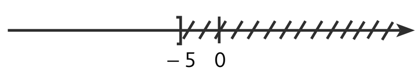
Les solutions sont les nombres inférieurs ou égal à …-5…

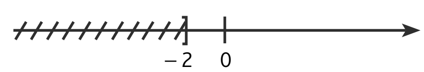
Diviser les deux membres par -7 et simplifier.

$x > \dfrac{14}{-7}$; $x > -2$

Les solutions sont les nombres supérieurs strictement à …-2…

- On représente les solutions sur un axe en barrant la partie de l'axe qui ne convient pas.





Comment écrire un intervalle ?

Soient le nombre réel x tel que $3 < x \leqslant 7$ et les intervalles $]3 ; 7[$, $[3 ; 7[$, $]3 ; 7]$, $]3 ; 7[$.
Donner l'intervalle correspondant à cet encadrement de x.

- Dire si chacune des bornes appartient ou non à l'intervalle cherché.

Le réel 3 appartient à l'intervalle cherché : ☐ oui ☒ non.

Le réel 7 appartient à l'intervalle cherché : ☒ oui ☐ non.

- Appliquer la règle suivante pour écrire l'intervalle : si la réponse à la question précédente est oui, le crochet est tourné vers l'intérieur de l'intervalle ; si la réponse est non, le crochet est tourné vers l'extérieur.

L'intervalle qui correspond à l'encadrement de x est …$]3 ; 7]$…

RÉPONSES

Exercices

a. $x < 17$; $x \geqslant -2$; $x > -5$.

b. $x \leqslant -5$; $x < -4$; $y > 50$; $x \leqslant 3$.

c. $x > 3$; $x \leqslant 1$; $a \leqslant -\dfrac{8}{3}$; $x > 1$.

d. $x < -4$; $t \geqslant -2$; $x \leqslant 0$; $x > 2$.

e. $x > \dfrac{8}{5}$; $x \leqslant -\dfrac{4}{13}$.

f. $x \leqslant \dfrac{3}{4}$; $x < \dfrac{3}{7}$.

11 Système de deux équations à deux inconnues

(livre élève pages 41 et 42)

Capacité
- **Résoudre algébriquement un système de deux équations à deux inconnues**

1 Traduire un énoncé par un système d'équations

C'est bientôt Noël

Au mois de décembre, Natacha achète 4 boules et une guirlande dans un grand magasin. Elle paie 12,30 €. Louisa possède une carte de fidélité de ce magasin lui donnant droit à une réduction de 10 % sur tous les articles. Elle achète 3 boules et 2 guirlandes. Elle présente sa carte de fidélité à la caisse et paie 12,24 €.

Retrouver le prix d'une boule et celui d'une guirlande.

1. Achat de Natacha

Expliquer ce que représentent x et y quand on écrit l'équation $4x + y = 12{,}3$.

x est le prix d'une boule ; y est celui d'une guirlande.

2. Achat de Louisa

a. Réduire un prix de 10 %, c'est le multiplier par le décimal 0,9

b. Écrire l'équation correspondant à l'achat de Louisa : $0{,}9 \times 3x + 0{,}9 \times 2y = 12{,}24$;

$2{,}7x + 1{,}8y = 12{,}24$;

c. Montrer que celle-ci peut s'écrire $0{,}9x + 0{,}6y = 4{,}08$: en divisant par 3, on obtient $0{,}9x + 0{,}6y = 4{,}08$.

On peut donc traduire l'énoncé par le système $\begin{cases} 4x + y = 12{,}3 \\ 0{,}9x + 0{,}6y = 4{,}08 \end{cases}$.

2 Reconnaître la solution d'un système

On utilise les données et les résultats de l'activité 1.

1. Montrer que le couple (2,2 ; 3,5) est solution de chacune des équations du système, c'est-à-dire que pour $x = 2{,}2$ et $y = 3{,}5$, les égalités sont vérifiées :

$4 \times 2{,}2 + 3{,}5 = 12{,}3$.

$0{,}9 \times 2{,}2 + 0{,}6 \times 3{,}5 = 1{,}98 + 2{,}10 = 4{,}08$

On dit que le couple (2,2 ; 3,5) est **solution** du système $\begin{cases} 4x + y = 12{,}3 \\ 0{,}9x + 0{,}6y = 4{,}08 \end{cases}$.

2. Compléter : le prix d'une boule est 2,20 € ; le prix d'une guirlande est 3,50 €.

Comment résoudre un système par substitution ?

Résoudre le système $\begin{cases} 4x + y = 12{,}3 & (1) \\ 0{,}9x + 0{,}6y = 4{,}08 & (2) \end{cases}$ **par substitution.**

- On calcule une des inconnues en fonction de l'autre dans l'une des équations.

  Exprimer y en fonction de x à l'aide de l'équation (1) : $y = 12{,}3 - 4x$ (3)
- On effectue la substitution dans l'autre équation.

  Remplacer y par $-4x + 12{,}3$ dans l'équation (2) : $0{,}9x + 0{,}6(-4x + 12{,}3) = 4{,}08$.

  On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue : $0{,}9x - 2{,}4x + 7{,}38 = 4{,}08$; $x = \frac{3{,}3}{1{,}5} = 2{,}2$
- On calcule la deuxième inconnue.

  Remplacer x par sa valeur dans l'équation (3) : $y = 12{,}3 - 4 \times 2{,}2 = 3{,}5$.
- On donne la réponse.

  La solution du système est : $(2{,}2 ; 3{,}5)$.
- On vérifie la réponse.

  (1) : $4 \times 2{,}2 + 3{,}5 = 12{,}3$; (2) : $0{,}9 \times 2{,}2 + 0{,}6 \times 3{,}5 = 4{,}08$.

Comment résoudre un système par addition ?

Résoudre le système $\begin{cases} 4x + y = 12{,}3 & (1) \\ 0{,}9x + 0{,}6y = 4{,}08 & (2) \end{cases}$ **par addition.**

- On multiplie les deux membres de chaque équation par un nombre astucieusement choisi afin d'obtenir pour une inconnue des coefficients opposés dans les deux équations.

  Multiplier les deux membres de l'équation (1) par $-0{,}6$: $\begin{cases} -0{,}6 \times 4x - 0{,}6y = -0{,}6 \times 12{,}3 \\ 0{,}9x + 0{,}6y = 4{,}08 \end{cases}$

  Réduire l'équation (1) : $\begin{cases} -2{,}4x - 0{,}6y = -7{,}38 \\ 0{,}9x \quad + 0{,}6y = 4{,}08 \end{cases}$. Les coefficients de y sont opposés.
- On ajoute membre à membre les deux équations : $-1{,}5x + 0y = -3{,}3$.

  L'inconnue y disparaît. Calculer x : $x = \frac{3{,}3}{1{,}5} = 2{,}2$
- On calcule la seconde inconnue.

  Remplacer x par sa valeur dans l'une des équations (1) ou (2) : $4 \times 2{,}2 + y = 12{,}3$.

  Calculer y : $y = 12{,}3 - 8{,}8 = 3{,}5$.
- On donne la réponse.

  La solution du système est : $(2{,}2 ; 3{,}5)$.

RÉPONSES

Exercices

1 $(1 ; -3)$; $(3 ; -1)$.

2 $(-3 ; 5)$; $\left(\frac{5}{22} ; \frac{47}{88}\right)$

3 Le prix d'un pull est 16,90 € ; celui d'un jean est 38 €.

12 Résolution graphique d'un système

(livre élève pages 43 et 44)

Capacités
- Résoudre graphiquement un système
- Choisir une méthode pour résoudre un système

Résoudre graphiquement un problème à deux inconnues

Qui est le plus riche ?

Si Martin donne 20 € à Nora, il est alors trois fois moins riche qu'elle. Si Martin reçoit 20 € de Nora, il est alors deux fois plus riche qu'elle. Combien Martin possède-t-il ? Combien Nora possède-t-elle ?

Soit x la somme possédée par Martin (en €), soit y la somme possédée par Nora (en €).

	Au départ	Si Martin donne 20 €	Si Martin reçoit 20 €
Martin possède :	x	$x - 20$	$x + 20$
Nora possède :	y	$y + 20$	$y - 20$

1. Mise en équation

a. Pour faciliter la mise en équation, compléter le tableau ci-contre.

b. Écrire le système qui traduit l'énoncé : $\begin{cases} y+20=3(x-20) \\ x+20=2(y-20) \end{cases}$

c. Montrer que ce système peut s'écrire : $\begin{cases} 3x - y = 80 \\ x - 2y = -60 \end{cases}$: $\begin{cases} 3x-y=20+60 \\ x-2y=-40-20 \end{cases}$

On choisit de résoudre le système graphiquement.

2. Tracé du graphique

a. Transformer la première équation pour isoler y dans le premier membre : $y = 3x - 80$.

b. Transformer la seconde équation pour isoler y dans le premier membre (sous la forme $y = \ldots$).

$2y = x + 60$; $y = 0{,}5x + 30$.

On verra dans le chapitre suivant que de telles équations sont représentées par des droites.

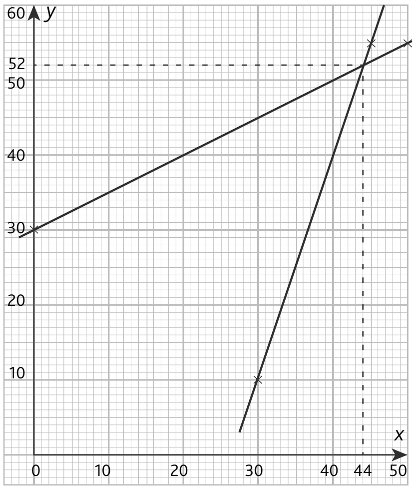
Les droites seront tracées dans le repère ci-contre.

c. Pour tracer la droite D_1 d'équation $y = 3x - 80$, on détermine deux de ses points.

- Pour $x = 30$, calculer y : $y = 90 - 80 = 10$.
- Pour $x = 45$, calculer y : $y = 135 - 80 = 55$.
- Placer les points correspondants sur le graphique ; les joindre à la règle.

d. Pour tracer la droite D_2 d'équation $y = 0{,}5x + 30$, on détermine deux de ses points.

- Pour $x = 0$, calculer y : $y = 30$.
- Pour $x = 50$, calculer y : $y = 25 + 30 = 55$.



- Placer les points correspondants sur le graphique ; les joindre à la règle.

3. Utilisation du graphique

La solution du système est le couple de coordonnées du point d'intersection *I* des deux droites.

a. Donner les coordonnées de *I* : $x_I =$ 44 ; $y_I =$ 52

b. Répondre au problème : Martin possède 44 € et Nora 52 €.

c. Vérifier la réponse : $3(44-20) = 52 + 20 = 72$; $44 + 20 = 2(52 - 20) = 64$

Comment choisir la méthode la plus adaptée pour résoudre un système ?

Un système de deux équations à deux inconnues peut se résoudre algébriquement ou graphiquement. L'utilisation de la calculatrice ou d'un logiciel est également possible.

Voici quelques indications pour guider votre choix :

- La méthode graphique est rarement la plus rapide, sauf si le graphique est donné.
- En cas de résolution algébrique, pour choisir entre méthode par substitution et méthode par addition, on observe les coefficients des inconnues du système :

– si l'un d'eux vaut 1 ou – 1, la méthode par substitution est conseillée ;

– si les deux coefficients d'une inconnue ont un multiple commun simple, on peut penser à la méthode par addition.

Voici deux systèmes. Donner la méthode algébrique la plus adaptée.

a. $\begin{cases} \mathbf{2x - 5y = 3} \\ \mathbf{3x + 2y = -7} \end{cases}$

- Indiquer les coefficients de *x* et *y* dans les deux équations : 2 et –5 ; 3 et 2
- Quelle méthode est conseillée ? addition
- Résoudre le système.

$\begin{cases} 4x - 10y = 6 \\ 15x + 10y = -35 \end{cases}$

$19x = -29$; $x = -\dfrac{29}{19}$; $2\times\left(-\dfrac{29}{19}\right) - 5y = 3$;

$y = -\dfrac{23}{19}$

b. $\begin{cases} \mathbf{x + 3y = 5} \\ \mathbf{7x - 2y = 8} \end{cases}$

- Indiquer le coefficient de *x* dans la première équation : 1
- Quelle méthode est conseillée ? substitution
- Résoudre le système.

$x = 5 - 3y$

$7(5 - 3y) - 2y = 8$

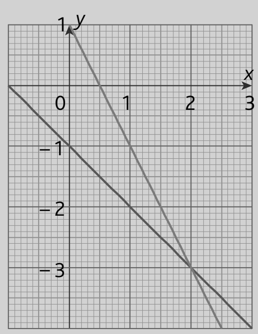
$35 - 21y - 2y = 8$; $y = \dfrac{27}{23}$

$x = 5 - 3\times\dfrac{27}{23} = \dfrac{34}{23}$

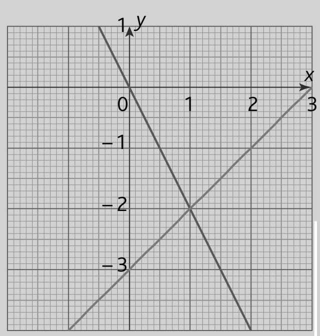
Exercices

RÉPONSES

1



(2 ; – 3)



(1 ; – 2)

2 (1 ; 2) ; (10,5 ; 8) ; $\left(\dfrac{42}{11} ; \dfrac{7}{11}\right)$.

13 J'utilise un logiciel (tableur)

Comparer deux quantités à l'aide d'un tableur

(livre élève pages 45 et 46)

Les scooters

Le scooter de Jessica consomme 4,5 litres aux 100 km et son réservoir contient 8,1 litres d'essence. Le scooter de Nordine consomme 3,9 litres aux 100 km et son réservoir contient 7,2 litres d'essence. L'objectif de cette activité est de comparer le nombre de litres restant dans le réservoir des deux scooters pour le même nombre de kilomètres parcourus.

Voir fichier « 03_p45_corrige.xls » ou « 03_p45_corrige.ods »

1. Construction d'un tableau de valeurs

- **Reproduire le tableau ci-contre sur la feuille de calcul d'un tableur.**

	A	B	C
1	Nombre de km	Nombre de litres restant Jessica	Nombre de litres restant Nordine
2	0	8,1	7,2
3	1	=8,1-A3*0,045	

a. Expliquer pourquoi la formule à écrire dans la cellule B3 est : =8,1-A3*0,045 : 8,1 est le nombre de litres au départ ; 0,045 est la consommation pour 1 km.

b. Donner la formule à écrire dans la cellule C3 : = 7,2 – A3 * 0,039

- **Écrire ces deux formules dans les cellules indiquées.**
- **Sélectionner les cellules A3, B3 et C3.**
- **Recopier ces trois cellules vers le bas jusqu'à 185 km (ligne 187).**

N'oubliez pas de valider après avoir saisi la formule.

2. Utilisation du tableau

a. Au bout de combien de kilomètres le réservoir de Jessica sera-t-il vide ? 180 km.

b. Au bout de combien de kilomètres le nombre de litres restant dans les deux réservoirs sera-t-il le même ?
150 km.

c. Au bout de 100 kilomètres, quel réservoir contient le plus d'essence ? C'est celui de Jessica.

d. Pour quels kilométrages le réservoir de Jessica contient-il plus d'essence que celui de Nordine ?
De 0 à 150 km, le réservoir de Jessica contient plus d'essence que celui de Nordine.

3. Équation et inéquation

On désigne par x le nombre de kilomètres parcourus.

a. De quelle question de la partie 2. la solution de l'équation $8,1 - 0,045x = 0$ est-elle la réponse ?
Question a.

b. De quelle question de la partie 2. les solutions de l'inéquation $7,2 - 0,039x < 8,1 - 0,045x$ sont-elles la réponse ? Question d.

A

Appelez le professeur pour argumenter votre choix.

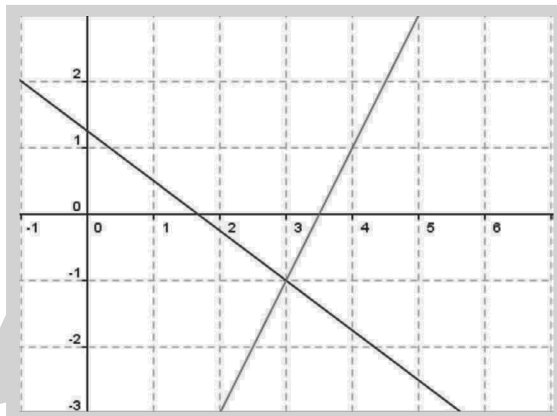
J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Résoudre un système avec le logiciel GeoGebra

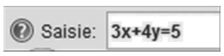
1. Résolution du système $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$

Il s'agit d'une résolution graphique : la solution du système est le couple de coordonnées des deux droites qui représentent les équations du système.

Étape 1 : tracé des deux droites



- **Dans la zone de saisie en bas de l'écran, taper $3x + 4y = 5$.**



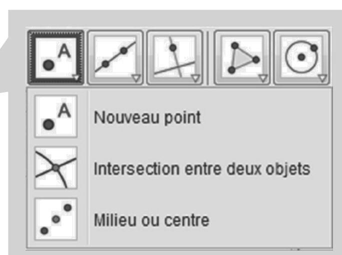
- **Puis appuyer sur la touche *Entrée*.**

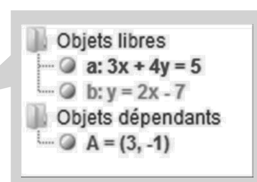
  Par défaut, le logiciel nomme a la droite obtenue.
- **Dans la zone de saisie, taper $y = 2x - 7$.**
- **Puis appuyer sur la touche *Entrée*.**

  Par défaut, le logiciel nomme b cette seconde droite.

  On obtient le graphique ci-contre.

Étape 2 : création du point d'intersection





- **Sélectionner l'outil *Intersection entre 2 objets*.**
- **Puis cliquer successivement sur les droites a et b.**

  Le logiciel nomme A le point d'intersection de a et b.
- **Lire les coordonnées du point A à gauche de l'écran.**

  Compléter : A(3 ; – 1)

Étape 3 : solution du système

Donner la solution du système : (3 ; – 1)

2. Résolution du système $\begin{cases} 2(3x - 0,5) = 7 + y \\ x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$

Il est inutile de mettre les équations sous la forme $ax + by = c$.

- **Utiliser la même méthode de résolution qu'au 1.**

  La solution du système est (1,16 ; – 1,04)

A

Appelez le professeur pour lui présenter votre travail.

3. Résolution du système $\begin{cases} 0,5x + y = 3 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

- **Utiliser la même méthode de résolution qu'au 1.**

a. Que remarque-t-on ? Les deux droites sont parallèles.

b. Donner le nombre de solutions du système : Le système n'a pas de solution.

Exercices & Problèmes

R *Exercices avec réponses en fin d'ouvrage.* ✱/✱✱ *Exercices plus difficiles.*

Exercices p. 49 à 51

1. QCM

a. – 11

b. $\frac{21}{8}$

c. 26 ans

d. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - y = -1 \end{cases}$

2. Vrai - Faux

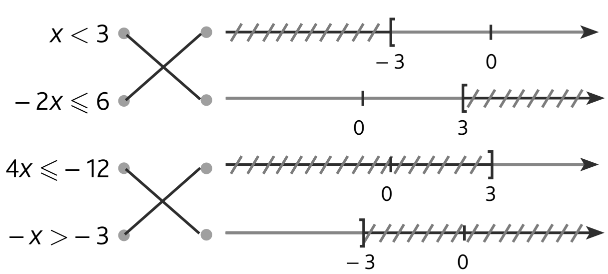
a. Vrai

b. Faux

c. Vrai

d. Faux

3. Associer



4. Vrai - Faux

a. Vrai

b. Faux

c. Faux

d. Vrai

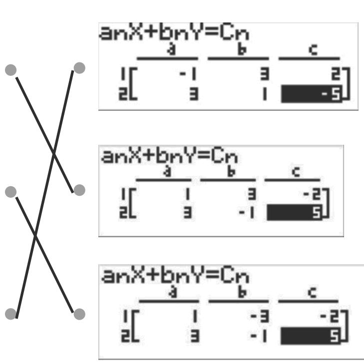
5. Associer

Associer chaque système à l'écran correspondant de la calculatrice.

$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y - 2 \\ 3x - 5 = y \end{cases}$

$\begin{cases} 3y - x - 2 = 0 \\ y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$



Résoudre une équation du premier degré

6. a. $\frac{23}{3}$; – 0,12. **b.** $\frac{7}{8}$; $-\frac{20}{7}$.

c. – 4 ; – 1. **d.** $\frac{9}{4}$; – 8.

e. $\frac{16}{5}$. **f.** $\frac{6}{7}$.

g. 1. **h.** 12,5.

7. a. $\frac{20}{7}$. **b.** $\frac{39}{14}$. **c.** 0,8.

8. a. – 1 et 5 ; $\frac{5}{3}$ et $-\frac{2}{7}$. **b.** 0 ; 0 ; 0.

c. – 8 et $\frac{3}{2}$; – 5.

9. a. – 5 et 5 ; – 1 et 1 ; – 2 et 2.

b. – 0,5 et 0,5 ; $-\frac{7}{3}$ et $\frac{7}{3}$; $-\frac{6}{5}$ et $\frac{6}{5}$.

c. – 0,1 et 0,1 ; – 22,5 et 22,5 ; – 0,3 et 0,3.

10. La largeur du rectangle est 18 m.

11. Dans 4 ans, l'âge de Maria sera le double de celui de Fatima.

12. Olivier reçoit 4 500 €, Yasmina 2 250 € et Johnny 4 250 €.

13. La contenance du verre est 12,5 cL.

Résoudre une inéquation du premier degré

14. a. – 2 ; 0 ; – 0,8 sont solutions de l'inéquation.

b. 2 ; 6 ; 0 ; – 3 sont solutions de l'inéquation.

15. a. $x \leqslant -1$; $x > 8$. **b.** $x > 2$; $x \leqslant -4$.

c. $x > \frac{8}{5}$; $x \leqslant -4$. **d.** $x > -\frac{8}{5}$; $x < 12$.

16. a. $x > -2{,}5$; $x \leqslant 4$. **b.** $x > -1$; $x < \frac{7}{4}$.

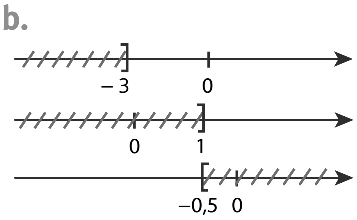
17. a. $x > \frac{31}{28}$. **b.** $x \geqslant \frac{29}{13}$. **c.** $x < \frac{15}{29}$.

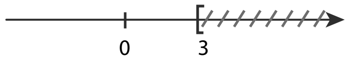
18. a. et **b.**

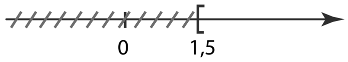
$x > -3$

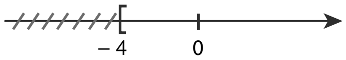
$x > 1$

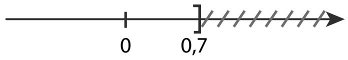
$x < -0{,}5$

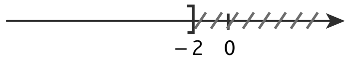


$x < 3$ 

$x \geqslant 1{,}5$ 

$x \geqslant -4$ 

$x \leqslant 0{,}7$ 

$x \leqslant -2$ 

19.

a. $x < -1{,}2$ **b.** $x \leqslant 4{,}5$ **c.** $x \geqslant -0{,}3$
d. $x > 3{,}5$

20. a. $]-1\,;2]$ 

;

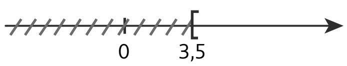
$[-3\,;-1]$ 

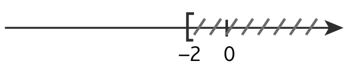
.

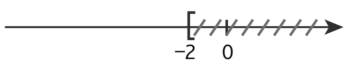
b. $[1\,;10[$; 

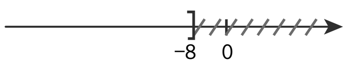
$]-3\,;5[$ 

21. a. $2 < x < 9$; $-4 < x \leqslant 6$; $-7 \leqslant x \leqslant -1$.
b. $9 \leqslant x < 12$; $-6 < x < 7$; $5 < x \leqslant 6$.

22. a. $x \geqslant 3{,}5$ 

$x < -2$ 

b. $x < -2$ 

$x \leqslant -8$ 

23. La formule d'abonnement est plus avantageuse à partir de 18 heures de location.

24. a. $P_1 = 4x + 8$.
b. $P_2 = 3x + 15$.
c. $0 < x < 7$.
d. 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

25. $x \geqslant 13{,}6$
Yasmina doit donc avoir au moins 14.

› Résoudre un système de deux équations à deux inconnues

26. Le couple (1 ; 4) est solution du système.

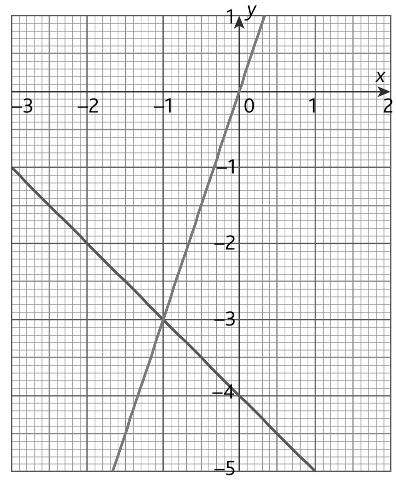
27. Le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ a pour solution le couple (2 ; – 1).

28. a. (2,25 ; 2,75) ; $\left(-\dfrac{19}{11};\dfrac{5}{11}\right)$.

b. $\left(\dfrac{10}{11};\dfrac{15}{11}\right)$; (8 ; 15) **c.** $\left(\dfrac{44}{45};\dfrac{32}{9}\right)$; (– 26 ; – 1,1).

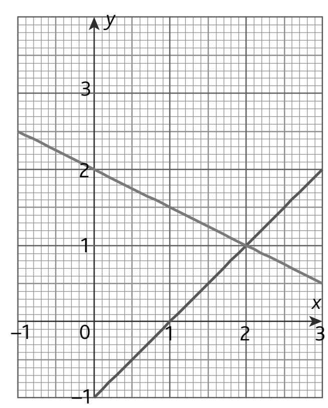
29. a. (1,6 ; 0,4). **b.** $\left(\dfrac{3}{7};\dfrac{94}{7}\right)$. **c.** $\left(\dfrac{85}{9};-\dfrac{155}{3}\right)$.

30. a.



(– 1 ; – 3)

b.



(2 ; 1)

31.
a. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 8x - y = 5 \end{cases}$ $\left(\dfrac{8}{13};-\dfrac{1}{13}\right)$.

b. $\begin{cases} 4x - 8y = 7 \\ x + y = -1 \end{cases}$ $\left(-\dfrac{1}{12};-\dfrac{11}{12}\right)$.

c. $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 2y = 21 \end{cases}$ $\left(\dfrac{27}{4};-\dfrac{57}{8}\right)$.

32. Le prix initial d'une chaise est 130 € ; celui d'un fauteuil est 290 €.

33. $E = 11{,}5$ volts ; $r = 0{,}5$ ohm.

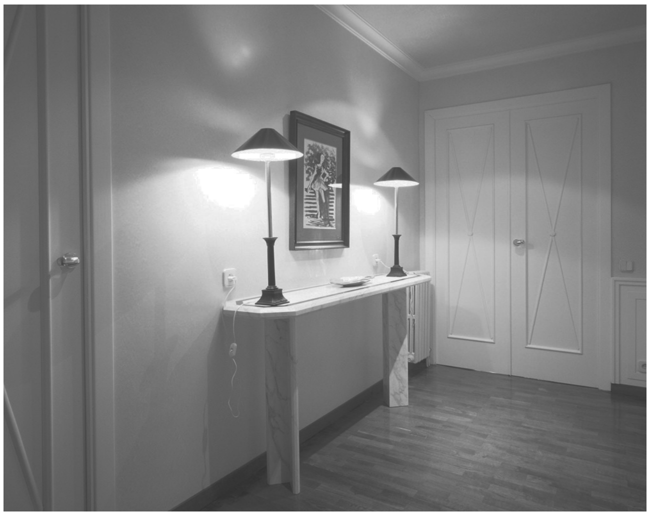
34. Le prix d'un crayon est 1,70 € ; celui d'une gomme est 1,20 €.

35. Il y a 10 personnes ; le montant de l'addition est 86 €.

Problèmes p. 51 et 52

› Problème 1
Facture d'électricité

Bernard consomme 756 kWh en heure pleine et 498 kWh en heure creuse.



› Problème 2 *

Mandrin a 12 compagnons. Le partage se fait donc entre 13 personnes.

› Problème 3
Placement financier

1. a. L'intérêt s'élève à 75,83 €.

b. La valeur acquise est 5 275,83 €.

2. a. $y = 75x + 20\,000$.

b. Le nombre de mois de placement est 10.

3. Le capital placé est 8 000 €.

4. a. $y = 1{,}845x + 12\,300$.

b. $y = 1{,}442x + 12\,360$.

c. Les deux valeurs acquises sont égales après 149 jours de placement.

› Problème 4
Problème d'escalier

1. Si un escalier a 10 girons, il a 11 contremarches.

2. a. Quelques valeurs possibles pour $2H + G$: 61 cm ; 63,2 cm ; 64,8 cm.

b. $2H + 29 = 63$; d'où $H = 17$ cm.

c. $60 \leqslant 2 \times 16{,}5 + G \leqslant 65$; $60 \leqslant 33 + G \leqslant 65$; d'où $27 \leqslant G \leqslant 32$.

3. $60 \leqslant 2H + 30 \leqslant 65$; $30 \leqslant 2H \leqslant 35$; d'où $15 \leqslant H \leqslant 17{,}5$.

Démarche d'investigation

› Problème 5 *
Rénovation d'un sol

Si le nombre de paquets est inférieur à 9, le prix du grossiste A est le moins cher.
Si le nombre de paquets est égal à 9, les deux prix sont égaux.
Si le nombre de paquets est supérieur à 9, le prix du grossiste B est le moins cher.

› Problème 6 * *
Noir ou blanc ?

Il faut retourner 12 jetons noirs. Il y aura alors 48 jetons noirs et 16 jetons blancs.

Je me teste

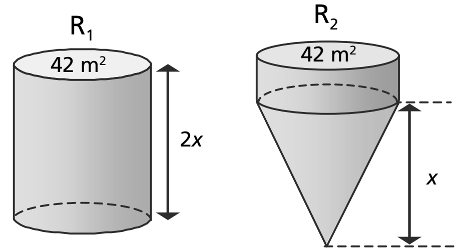
(livre élève pages 53 et 54)

EXERCICE 1 Les réservoirs d'eau

1 Volume des réservoirs

Le réservoir R_1 a la forme d'un cylindre de révolution, dont l'aire de la base est 42 m^2 et dont la hauteur mesure $2x$ (en m) ; x est un nombre positif.

Le réservoir R_2 est constitué d'un cône dont l'aire de la base est 42 m^2 et dont la hauteur mesure x (en m), surmonté d'un cylindre de volume 63 m^3.



Volume d'un cylindre = aire de la base × hauteur

Volume d'un cône = $\frac{1}{3}$ × aire de la base × hauteur

a. Vérifier que, pour $x = 0{,}9$ m, les deux réservoirs ont le même volume.

Volume du réservoir R_1 : $42 \times 2 \times 0{,}9 = 75{,}6$ m^3.

Volume du réservoir R_2 : $63 + \frac{1}{3} \times 42 \times 0{,}9 = 75{,}6$ m^3.

A

Appelez le professeur pour présenter votre démarche.

b. Résoudre l'équation $84x = 63 + 14x$: $84x - 14x = 63$; $70x = 63$; $x = \frac{63}{70}$; $x = 0{,}9$.

La solution de l'équation est 0,9.

c. Expliquer pourquoi la solution de cette équation est la réponse trouvée à la question a.

Volume de R_1 en fonction de x : $42 \times 2x = 84x$; volume de R_2 en fonction de x : $63 + \frac{1}{3} \times 42x = 63 + 14x$.

On trouve donc la valeur de x pour laquelle les deux volumes sont égaux.

2 Remplissage des réservoirs

On considère les réservoirs R_1 et R_2 pour $x = 0{,}9$ m. Leur volume commun est 75,6 m^3.

R_1 contient au départ 18 m^3 d'eau ; on le remplit avec une pompe qui débite 0,6 m^3 par minute.

R_2 contient au départ 15 m^3 d'eau ; on le remplit avec une pompe qui débite 0,8 m^3 par minute.

Le remplissage des deux réservoirs commence au même moment.

a. Déterminer au bout de combien de temps les deux réservoirs contiennent la même quantité d'eau : Soit x le nombre de minutes cherché.

$18 + 0{,}6x = 15 + 0{,}8x$ d'où $x = 15$.

Les deux réservoirs contiennent la même quantité d'eau au bout de 15 minutes.

b. Quel réservoir sera plein le premier ? B Justifier :

$18 + 0{,}6x = 75{,}6$; $x = 96$.

$15 + 0{,}8x = 75{,}6$; $x = 75{,}75$.

Le temps de remplissage de B est inférieur à celui de A.

EXERCICE 2 Le compte est bon

On pose le problème suivant à deux élèves, Jordan et Sonia : « Vous disposez de 11 billets, les uns de 50 €, les autres de 20 €. Indiquez le nombre de billets de chaque sorte pour obtenir exactement la somme de 370 € ».

Voir fichier « 03_p54_corrige.xls » ou « 03_p54_corrige.ods »

1 Jordan choisit de résoudre ce problème avec un tableur. Voici le début du tableau. Jordan tape 1 dans la cellule A2 et saisit la formule =50*A2 dans la cellule B2.

Vous devez faire le même travail que Jordan sur la feuille de calcul d'un tableur

	A	B	C	D	E
1	**Nombre de billets de 50 €**	**Valeur des billets de 50 €**	**Nombre de billets de 20 €**	**Valeur des billets de 20 €**	**Valeur totale**
2	1	50			

a. Quelle formule, à recopier vers le bas, doit-il entrer dans la cellule C2 ?

❑ =11-B2 ☒ =11-A2 ❑ =370-B2

b. Quelle formule, à recopier vers le bas, doit-il entrer dans la cellule D2 ? = 20*C2

c. Quelle formule, à recopier vers le bas, doit-il entrer dans la cellule E2 ? = B2+D2

d. Jordan sélectionne les cellules A2 à E2 et les recopie vers le bas en tirant.

Quand doit-il arrêter la recopie des cellules ? Il doit arrêter quand la valeur totale atteint 370 €.

e. Répondre au problème : il faut 5 billets de 50 € et 6 billets de 20 €.

A

Appelez le professeur pour expliquer votre raisonnement.

2 Sonia choisit de résoudre le problème à l'aide d'un système de deux équations. Elle note x le nombre de billets de 50 € et y le nombre de billets de 20 €.

a. Cocher le système traduisant l'énoncé du problème.

❑ $\begin{cases} y = 11 - x \\ x + y = 370 \end{cases}$ ☒ $\begin{cases} y = 11 - x \\ 50x + 20y = 370 \end{cases}$ ❑ $\begin{cases} y = 11 + x \\ 50x + 20y = 370 \end{cases}$

b. Résoudre le système choisi : $50x + 20(11 - x) = 370$; $30x + 220 = 370$;

$30x = 150$; $x = 5$;

$y = 11 - 5 = 6$.

La solution du système est (5 ; 6).

c. Répondre au problème : il faut 5 billets de 50 € et 6 billets de 20 €.

3 Comparer les réponses obtenues en 1. e. et 2. c. : ce sont les mêmes

4 Peut-on obtenir une somme de 410 € avec 11 billets, les uns de 50 €, les autres de 20 € ? Non. Justifier : Si on continue le tableau, on n'obtient pas 410 €

Si on résout le système $\begin{cases} y = 11 - x \\ 50x + 20y = 40 \end{cases}$, les valeurs obtenues pour x et y ne sont pas des nombres entiers.

14 Généralités sur les fonctions

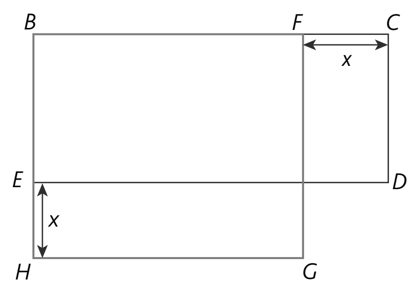
(livre élève pages 55 et 56)

Capacités
- Définir une fonction par son expression algébrique
- Utiliser la représentation graphique d'une fonction

1 Écrire l'expression algébrique d'une fonction

Quand l'aire d'un rectangle varie

On considère un rectangle *BCDE* tel que $BC = 12$ m et $BE = 4$ m.



1. Calculer son périmètre : $(12 + 4) \times 2 = 32$ m.

2. Calculer son aire : $12 \times 4 = 48$ m^2.

Soit x un nombre compris entre 0 et 12. On considère le rectangle *BFGH*. Le point *F* est entre *B* et *C* ; le point *E* est entre *B* et *H*. On sait que $FC = EH = x$ (en mètres).

3. Vérifier que le périmètre du rectangle *BFGH* est le même que celui du rectangle *BCDE*.

$BF = 12 - x$; $BH = 4 + x$.

Périmètre $= (12 - x + 4 + x) \times 2 = 16 \times 2 = 32$ m.

4. Exprimer l'aire A du rectangle *BFGH* en fonction de x : $A = (12 - x)(4 + x)$.

5. Vérifier que l'on obtient après développement et réduction : $A = -x^2 + 8x + 48$.

$A = 12 \times 4 + 12 \times x - x \times 4 - x \times x = 48 + 12x - 4x - x^2 = -x^2 + 8x + 48$.

La formule $A = -x^2 + 8x + 48$ établit une relation qui permet, pour chaque valeur de x, de calculer l'aire A. Elle définit une **fonction** que l'on désigne par la lettre f, par exemple. La fonction f est donnée par son **expression algébrique** : $-x^2 + 8x + 48$.

On écrit : $f : x \mapsto -x^2 + 8x + 48$ ou $f(x) = -x^2 + 8x + 48$. La valeur de x est comprise entre 0 et 12. On dit que la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 12].

2 Déterminer une image ou un antécédent

On utilise les données et les résultats de l'activité 1.

1. Calculer, en mètres carrés, l'aire du rectangle *BFGH* pour $x = 7$: $-7^2 + 8 \times 7 + 48 = 55$.

On dit que 55 est l'**image** de 7 par la fonction f et on écrit : $f(7) = 55$.

Inversement, le nombre 7 est un **antécédent** de 55 par f. On a donc : $f : 7 \mapsto 55$

antécédent de 55 — image de 7

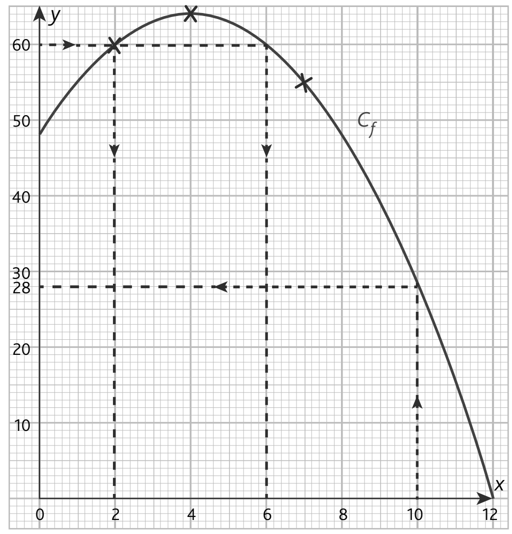
2. Calculer l'image de 2 par f : $-2^2 + 8 \times 2 + 48 = 60$.

3. Calculer $f(4)$: $-4^2 + 8 \times 4 + 48 = 64$.

4. Déduire des calculs précédents un antécédent de 60 par f : 2 est un antécédent de 60 car $f(2) = 60$

3 Utiliser la représentation graphique d'une fonction

La courbe C_f ci-contre représente la fonction f définie précédemment.



1. Placer sur ce graphique les points de coordonnées $(7 ; f(7))$; $(2 ; f(2))$; $(4 ; f(4))$.

2. Que constate-t-on ? Ils sont sur C_f.

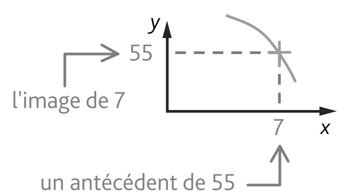
On admet que tout point de coordonnées $(x ; f(x))$ appartient à C_f et, réciproquement, tout point de C_f a pour coordonnées $(x ; f(x))$.

3. Trouver graphiquement l'image de 10 par f : 28

4. Donner, à l'aide du graphique, les antécédents de 60 par f : 2 et 6

Une lecture graphique donne une valeur approchée.

On lit sur le graphique que l'image de 7 par f est 55.
On peut aussi dire qu'un antécédent de 55 par f est 7.



Comment calculer une image ?

Soit la fonction f définie pour tout nombre x par f : $x \mapsto 2x^2 - 5x + 2$.

Calculer l'image de -3 par f.

- Rappeler l'expression de $f(x)$: $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$
- Remplacer x par sa valeur dans $f(x)$: $f(-3) = 2 \times (-3)^2 - 5 \times (-3) + 2$
- Calculer en respectant les règles de priorité : $f(-3) = 18 + 15 + 2$

  L'image de -3 par f est 35

RÉPONSES

Exercices

1 a.

x	-5	-1	0	2	5
$g(x)$	**-71**	**1**	**4**	**-8**	**-75**

b. Un antécédent de 4 est 0.

2 a. L'image de -1 est 0. L'image de -2 est 2.

b. $f(0) = -2$; $f(2) = -0{,}4$; $f(4) = 1$.

c. Les antécédents de 4 sont -1 et 2,5.

3 a. $g(3) = 9$; $g(-2) = 14$; $g(0) = 0$.

b. Un antécédent de 14 est -2 car $g(-2) = 14$.

15 Sens de variation

Capacité
- À partir de la représentation graphique d'une fonction :
  – donner le sens de variation de la fonction
  – établir son tableau de variation

(livre élève pages 57 et 58)

1 Reconnaître graphiquement une fonction croissante et une fonction décroissante

On reprend l'activité 1 de la fiche 14. Le rectangle *BFGH* a pour dimensions, en mètres, $(12 - x)$ et $(4 + x)$. Son aire, en mètres carrés, est $A = -x^2 + 8x + 48$. La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 8x + 48$ définie sur l'intervalle [0 ; 12].

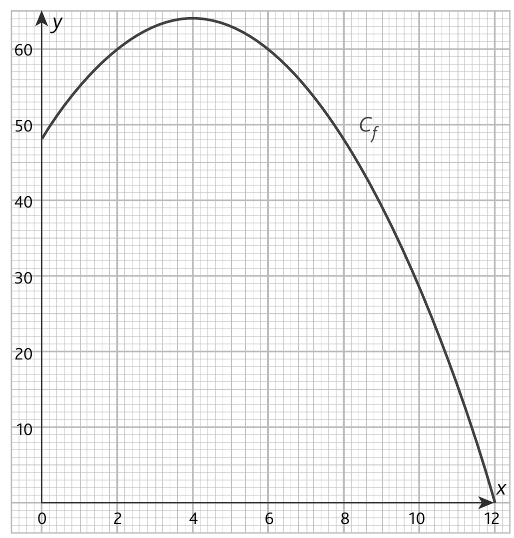
1. Quand x varie de 0 à 4, les valeurs de $f(x)$ augmentent-elles ou diminuent-elles ?

Elles augmentent.

2. Quand x varie de 4 à 12, les valeurs de $f(x)$ augmentent-elles ou diminuent-elles ?

Elles diminuent.

On dit que la fonction f est **croissante** sur l'intervalle [0 ; 4] et **décroissante** sur l'intervalle [4 ; 12].



3. Donner la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle *BFGH* semble maximale : 4

4. Donner la valeur de ce maximum : 64

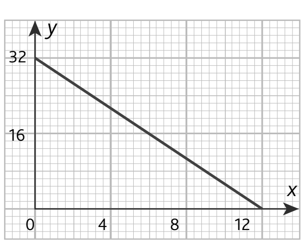
5. Quelle est la particularité du rectangle *BFGH* dans ce cas ? C'est un carré.

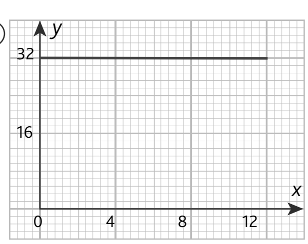
2 Reconnaître graphiquement une fonction constante

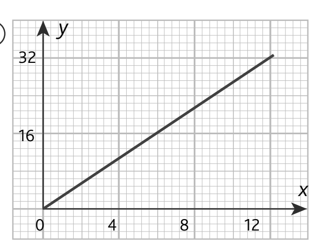
On a vu dans la fiche 14 que le périmètre *P* du rectangle *BFGH* est égal, en mètres, à 32 quel que soit x dans l'intervalle [0 ; 12]. Il ne varie pas avec x : il est constant. Soit g la fonction qui à x fait correspondre le périmètre *P*.

1. Compléter : $g(2) =$ 32 ; $g(5) =$ 32 ; $g(12) =$ 32

2. Parmi les trois graphiques ci-après, désigner celui qui représente la fonction g : ②

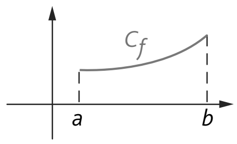
①


②


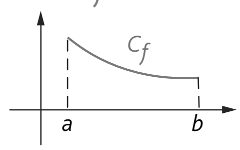
③


On dit que la fonction g est **constante**.

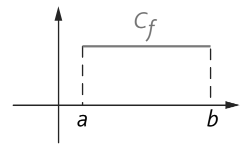
Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a ; b]$ et C_f sa courbe représentative.



f est **croissante** sur $[a ; b]$.



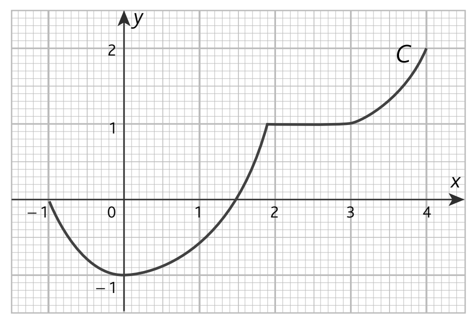
f est **décroissante** sur $[a ; b]$.



f est **constante** sur $[a ; b]$.

Comment construire le tableau de variation d'une fonction à partir de sa courbe représentative ?

C est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1 ; 4]$. Construire le tableau de variation de g.



Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est dire sur quels intervalles la fonction est croissante, décroissante ou constante. Le tableau de variation d'une fonction résume son sens de variation à l'aide de flèches.

- Placer sur la première ligne du tableau les valeurs particulières de x repérées sur le graphique.
- Tracer les flèches sur la deuxième ligne :
  - ↘ sur les intervalles où g est décroissante ;
  - ↗ sur les intervalles où g est croissante ;
  - → sur les intervalles où g est constante.
- Porter aux extrémités de ces flèches les images des valeurs particulières de x.

x	– 1	0	1,9	3	4
$g(x)$	0 ↘	– 1 ↗	1 →	1 ↗	2

Exercice

RÉPONSES

a. La fonction f est décroissante sur [0 ; 1].

b. La fonction f est constante sur [2 ; 3].

c. f est croissante sur [– 1 ; 1] et sur [3 ; 3,5], par exemple.

d. f est décroissante [0 ; 0,5] et sur [1 ; 2], par exemple.

e. f est constante sur [2 ; 2,3] et sur [2,6 ; 3] par exemple.

f. Le minimum de f sur [– 1 ; 4] est – 1,7.
Le maximum de f sur [– 1 ; 4] est 1,6.

g. Le minimum de f sur [– 1 ; 1] est 0.
Le maximum de f sur [– 1 ; 1] est 1.

h. Tableau de variation de f :

x	– 1	0	2	3	4
Sens de variation de f	0 ↗	1 ↘	– 1,7 →	– 1,7 ↗	1,6

16 Fonction linéaire – Fonction affine

(livre élève pages 59 et 60)

Capacités
- Reconnaître une fonction linéaire et une fonction affine
- Représenter graphiquement une fonction linéaire et une fonction affine

1 Écrire l'expression algébrique d'une fonction linéaire

Utilisation d'un réservoir

Un réservoir fermé contient 540 litres d'eau. Une pompe puise de l'eau dans ce réservoir à raison de 4,5 litres par minute. x désigne la durée de fonctionnement de la pompe, en minutes ; x est compris entre 0 et 120.

1. Calculer le volume d'eau prélevé en 15 minutes :

$4,5 \times 15 = 67,5$ litres.

2. Exprimer, en fonction de x, le volume d'eau prélevé en x minutes.

$4,5x$ (en litres)

3. Y a-t-il proportionnalité entre la durée de fonctionnement de la pompe et le volume prélevé ? Oui

Justifier : le rapport (volume prélevé)/(nombre de minutes) est constant et égal à 4,5.

On appelle f la fonction qui, à tout nombre x, fait correspondre le nombre $4,5x$.

On a $f : x \mapsto 4,5x$ ou $f(x) = 4,5x$.

On dit que f est une fonction linéaire car $f(x)$ est de la forme : constante $\times\, x$.

4. Calculer l'image de 10 par f : $f(10) = 4,5 \times 10 = 45$

2 Écrire l'expression algébrique d'une fonction affine

On reprend les données de l'activité 1.

1. Calculer le volume d'eau restant dans la cuve :
- au bout de 40 minutes : $540 - 180 = 360$ L
- au bout de 15 minutes : $540 - 67,5 = 472,5$ L
- au bout de x minutes : $540 - 4,5x = 4,5x$ (en litres)

2. Y a-t-il proportionnalité entre la durée de fonctionnement de la pompe et le volume restant ? Non

Justifier : $\dfrac{472,5}{15} \neq \dfrac{360}{40}$ (par exemple)

On appelle g la fonction qui, à tout nombre x, fait correspondre le nombre $-4,5x + 540$.

On a $g : x \mapsto -4,5x + 540$ ou $g(x) = -4,5x + 540$.

On dit que g est une fonction affine car $g(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -4,5$ et $b = 540$.

3. Calculer l'image de 10 par g : $g(10) = -4,5 \times 10 + 540 = 495$

3 Utiliser la représentation graphique d'une fonction affine

On a représenté sur l'intervalle [0 ; 120] les fonctions *f* et *g* des deux activités précédentes.

1. Décrire la représentation graphique C_f de f :

C_f est un segment de droite qui passe par l'origine.

Il « monte » de gauche à droite.

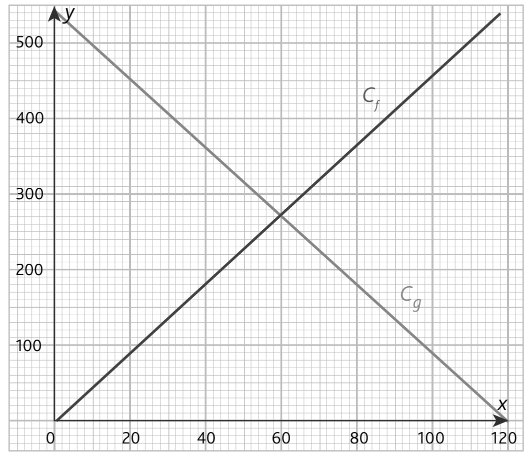
2. Décrire la représentation graphique C_g de g :

C_f est un segment de droite qui ne passe pas par l'origine.

Il « descend » de gauche à droite.

3. Donner le sens de variation des fonctions f et g :

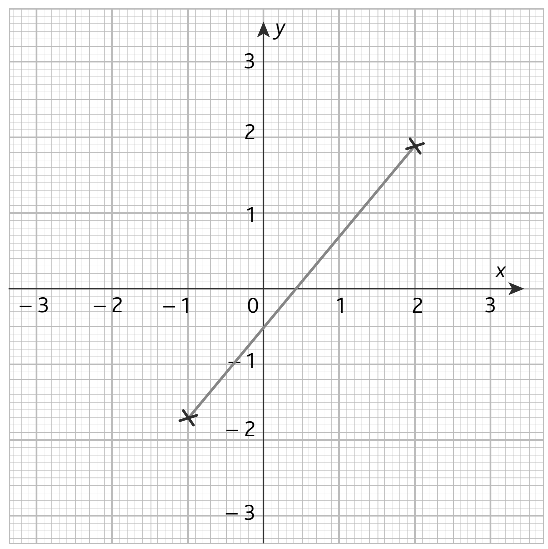
f est croissante ; g est décroissante.



Comment représenter graphiquement une fonction affine ?

Tracer dans le repère ci-dessous la représentation graphique de la fonction *f* définie par $f(x) = 1{,}2x - 0{,}5$ sur l'intervalle [– 1 ; 2].

- On examine la nature de la fonction f.
  f est une fonction affine car $f(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 1{,}2$ et $b = -0{,}5$.
  Donc la représentation graphique de f est un segment de droite.
- On calcule les ordonnées des extrémités du segment.
  Calculer $f(-1)$: $f(-1) = -1{,}7$ et $f(2)$: $f(2) = 1{,}9$
- Placer les points de coordonnées $(-1 ; f(-1))$ et $(2 ; f(2))$.
  Joindre ces points par un segment.
- On vérifie le tracé. Vérifier que le segment passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$, c'est-à-dire ici $(0 ; -0{,}5)$.



RÉPONSES

Exercices

1 **a.** Les fonctions affines sont f, h, j, k, l, m.
b. Les fonctions linéaires sont h et k.
c. Les fonctions constantes sont j et m.

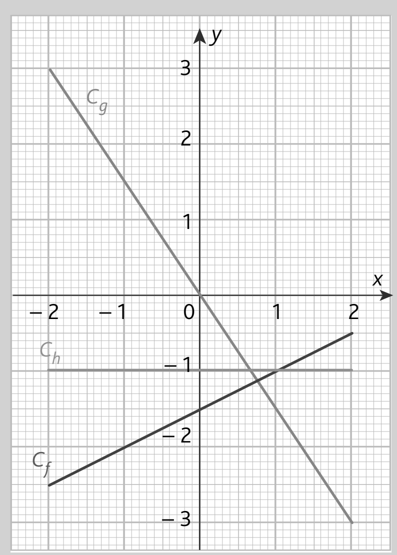
2 et **3**

Fonctions	a	b	Sens de variation
f	– 1	3	décroissante
h	1	0	croissante
j	0	4	constante
k	– 0,3	0	décroissante
l	4	5	croissante
m	0	– 1	constante

4 $f(1) = 1{,}7$; $f(0) = 1{,}8$; $f(-0{,}1) = 1{,}81$; $f(10) = 0{,}8$.

5

x	– 2	2
$f(x)$	– 2,5	– 0,5
$g(x)$	3	– 3
$h(x)$	– 1	– 1



17 Résolution graphique de problèmes

(livre élève pages 61 et 62)

Capacité
- **Résoudre graphiquement un problème du premier degré à une inconnue**

1 Résoudre un problème qui se traduit par une égalité

Remplissage de deux cuves

Une cuve A, de capacité 200 litres, contient 50 litres d'eau. On la remplit avec un robinet qui débite 4 litres par minute. Une cuve B, de capacité 200 litres également, contient 32 litres d'eau. On la remplit avec un robinet qui débite 5,5 litres par minute. Le remplissage commence au même moment dans les deux cuves.
On veut déterminer graphiquement quand les deux cuves contiendront la même quantité d'eau.

1. Calculer le volume d'eau dans la cuve A au bout de 10 minutes de remplissage.

$50 + 4 \times 10 = 90$ litres

2. Calculer le volume d'eau dans la cuve B au bout de 10 minutes de remplissage.

$32 + 5,5 \times 10 = 87$ litres

On veut savoir au bout de combien de temps le volume sera le même dans les deux cuves.

On choisit de résoudre ce problème graphiquement.

On note x la durée de remplissage en minutes.

3. Exprimer, en fonction de x, le volume d'eau dans la cuve A au bout de x minutes : $50 + 4x$

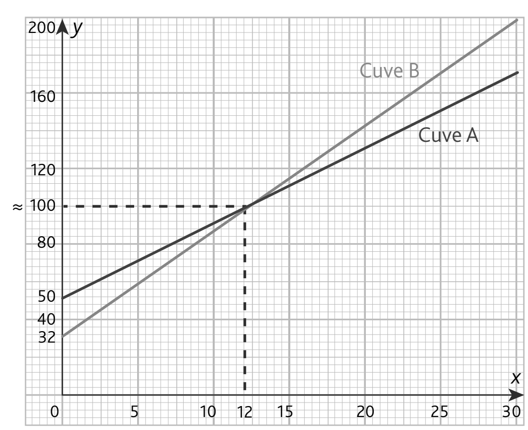
4. Exprimer, en fonction de x, le volume d'eau dans la cuve B au bout de x minutes : $32 + 5,5x$

Soient f et g les fonctions affines définies par $f(x) = 4x + 50$ et $g(x) = 5,5x + 32$ sur $[0 ; 30]$.

5. Dans le repère ci-contre, tracer la représentation graphique D_1 de la fonction f et la représentation graphique D_2 de la fonction g.

Points de D_1 : $(0 ; 50)$; $(30 ; 170)$

Points de D_2 : $(0 ; 32)$; $(30 ; 197)$



6. Soit M le point d'intersection de D_1 et D_2.

L'abscisse de M est 12 (environ).

L'ordonnée de M est 100 (environ).

Que représentent ces nombres par rapport au problème posé ?

Au bout de 12 minutes, les deux cuves contiennent 100 litres d'eau.

2 Résoudre un problème qui se traduit par une inégalité

On reprend les données de la partie 1. On veut savoir pour quelles valeurs de *x* la cuve B contient plus d'eau que la cuve A. On va résoudre ce problème en utilisant le graphique précédent.

1. Lorsque la cuve B contient plus d'eau que la cuve A, les points de la droite D_2 sont :

☒ au-dessus ❑ au-dessous des points correspondants de la droite D_1.

2. Le nombre de minutes est alors : ❑ inférieur ☒ supérieur à 12

3. La cuve B contient plus d'eau que la cuve A pour un nombre de minutes compris entre

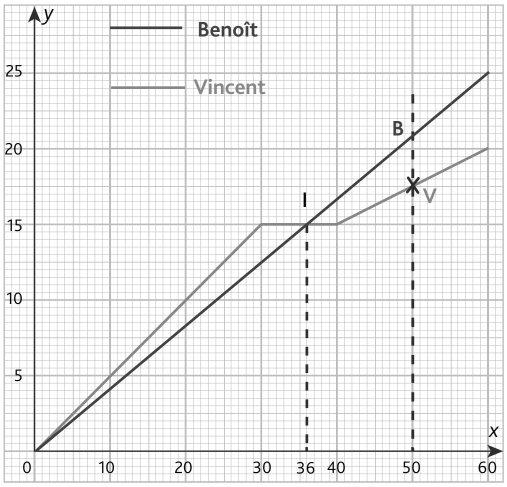
12 et 30 minutes

Comment lire un graphique pour comparer des quantités ?

Benoît et Vincent partent en même temps pour une balade en vélo.
Le graphique ci-dessous donne la distance parcourue (en km) en fonction du temps *x* (en min).

a. Lire graphiquement au bout de combien de temps la distance *y* parcourue par chacun est la même.

- Marquer le point d'intersection *I* des deux courbes.
- Tracer le pointillé vertical qui passe par *I*.
- Lire l'abscisse de *I*.
- La distance parcourue est la même au bout de 36 minutes



b. Lire graphiquement qui a parcouru le moins de kilomètres au bout de 50 minutes.

- Tracer un pointillé vertical passant par le point de coordonnées (50 ; 0). Il coupe la courbe verte en *V* et la courbe bleue en *B*.
- L'ordonnée de *B* est ☒ supérieure ❑ inférieure à celle de *V*.

  Donc la distance parcourue par Benoît est supérieure à celle parcourue par Vincent.
- Celui qui a parcouru le moins de kilomètres au bout de 50 minutes est Vincent.

RÉPONSES
Exercices

1 **a.** $f(-2) < g(-2)$. **b.** $f(0) < g(0)$. **c.** $f(1) > g(1)$. **d.** $f(2) > g(2)$.

2 **a.** La solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est 0,55.

b. Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les nombres x tels que $-2 \leqslant x < 0,55$.

c. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sont les nombres x tels que $0,55 \leqslant x \leqslant 2$.

18 J'utilise une calculatrice

Afficher le tableau de valeurs d'une fonction et tracer sa courbe représentative

L'utilisation de quelques calculatrices est résumée en fin d'ouvrage p. 185.

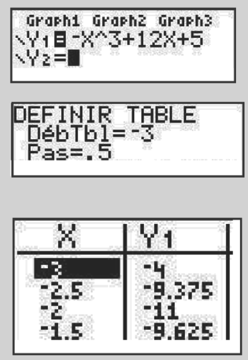
1. Édition sur la calculatrice de la fonction étudiée

On donne la fonction f définie par : $x \mapsto -x^3 + 12x + 5$ sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.

- **Éditer cette fonction sur la calculatrice.**

Casio

Texas Instruments



2. Tableau de valeurs

a. Construction de la table

- **En utilisant la fonction de table de la calculatrice, faire varier x de -3 à 3 avec un pas de 0,5.**
- **Afficher la table des valeurs de $f(x)$.**

b. Utilisation de la table

- Lire et donner l'image de – 0,5 par f : – 0,875 .
- Compléter le tableau de valeurs.

x	– 3	– 1,5	– 1	0	1	2	2,5	3
$f(x)$	– 4	– 9,625	– 6	5	16	21	19,375	14

- **Dans la table de la calculatrice, ajouter la valeur 1,2 dans la colonne de x.**
- Donner l'image de 1,2 par f : 17,672

3. Courbe représentative

- **Régler la fenêtre d'affichage de la calculatrice :**

  x varie de – 3 à 3 ; le pas de graduation de l'axe est 1 ;
  y varie de – 15 à 25 ; le pas de graduation de l'axe est 5.

Casio

Texas Instruments

- **Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.**
- À l'aide de la courbe obtenue, dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	– 3		– 2		2		3
$f(x)$	– 4	↘	– 11	↗	21	↘	14

Si nécessaire, relisez le *Comment* de la page 58.

A Appelez le professeur pour lui présenter la méthode utilisée pour répondre à cette question.

J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Étudier les droites d'équation $y = ax + b$

Voir fichier « 04_equation_droite_video.avi. »

L'équation d'une droite *D* non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $y = ax + b$.

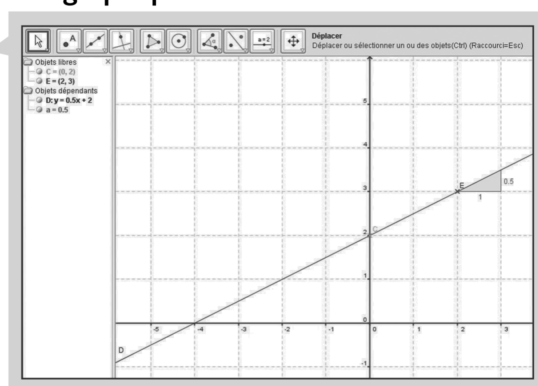
C'est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

***a* est le coefficient directeur de *D*, *b* est son ordonnée à l'origine.**

Exemple : la droite d'équation $y \quad -3x + 2$ a pour coefficient directeur -3 et pour ordonnée à l'origine 2.

L'activité suivante, avec le logiciel Geogebra, donne une illustration graphique de ces nombres.

Ouvrir le fichier « 04_equation_droite.ggb ».



1. Coefficient directeur

a. ■ **Lire à gauche de l'écran l'équation de *D* :** $y = 0{,}5x + 2$

■ Donner son coefficient directeur *a* : 0,5

■ Comment est-il matérialisé sur le graphique ?

Par un « escalier » de largeur 1 et

de hauteur $a = 0{,}5$.

b. ■ Noter les coordonnées des points *C* et *E*, puis calculer $\dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C}$: $C\,(0\,;2)$; $E\,(2\,;3)$. $\dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C} = \dfrac{3-2}{2-0} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

■ Comparer *a* et $\dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C}$: $a = \dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C}$

■ **Déplacer le point *E* à l'aide de la souris.**

■ Relever la nouvelle valeur du coefficient *a* de la droite *D* : Pour $E\,(1\,;5)$, on note $a = 3$

■ Calculer $\dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C}$ avec les nouvelles coordonnées de *E* : $\dfrac{5-2}{1-0} = 3$

■ Faire ce travail deux ou trois fois. La remarque concernant *a* et $\dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C}$ est-elle confirmée ? Oui

c. Tout en déplaçant le point *E*, observer le signe du nombre *a* et l'inclinaison correspondante de la droite *D*.

■ Comment est la droite *D* quand *a* est positif ? La droite « monte » (si on se déplace de gauche à droite).

■ Comment est la droite *D* quand *a* est négatif ? La droite « descend ».

■ Comment est la droite *D* quand *a* est nul ? La droite est horizontale.

2. Ordonnée à l'origine

■ Noter l'ordonnée à l'origine de la droite *D* : 2

■ **Déplacer le point *C* sur l'axe des ordonnées.**

■ Comparer, pour différentes positions du point *C*, l'ordonnée de *C* et l'ordonnée à l'origine de la droite *D* : il y a égalité.

■ Écrire une phrase de conclusion : L'ordonnée à l'origine *b* de la droite d'équation $y = ax + b$ est égale à l'ordonnée du point d'intersection de *D* avec l'axe des ordonnées.

Exercices & Problèmes

Ⓡ *Exercices avec réponses en fin d'ouvrage.* ✱ / ✱ ✱ *Exercices plus difficiles.*

Exercices p. 67 à 69

1. QCM

a. 2,5

b. 0

c. – 1,5

d. [– 1 ; 0] ; [0 ; 1]

2. QCM

a. $x \mapsto 0{,}5x + 2$

b. $x \mapsto 0{,}5x$

c. – 7

d. $\frac{5}{3}$

3. Vrai - Faux

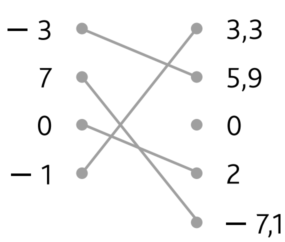
a. Faux

b. Vrai

c. Faux

d. Vrai

4. Associer



› Déterminer une image et un antécédent

5. a. L'image de 5 par f est – 7.

b. $f(1) = 5$, $f(0) = 8$ et $f(-4) = 20$.

6. a. $f(-3) = 21$; $f(0) = 3$; $f(1{,}5) = 12$.

b. Un antécédent de 3 est 0.

7. a. $g(-2) = 11{,}5$; $g(0) = 0{,}7$; $g(1) = -1{,}1$

b. Un antécédent de – 1,1 est 1.

8. a.

x	– 2	– 1	0	3
$f(x)$	**– 8**	**– 9**	**– 4**	**– 13**

b. Un antécédent de – 9 est – 1.

9. a. $g(1) = -3$; $g(-3) = 33$; $g(0) = 0$

b. 1 est un antécédent de – 3.

10. $i(1) = \frac{3}{7}$; $i(-1) = -1$; $i(0) = -\frac{1}{6}$.

11. a. $f(4) = 48$; $f(-3) = 27$; $f(0) = 0$. **b.** $f(x) = 3x^2$.

12. a. $g(-2) = -16$; $g(3) = 54$; $g(0) = 0$.

b. $g(x) = 2x^3$.

13. a. 6 est **image** de – 4 par la fonction h.

b. – 4 est **antécédent** de 6 par la fonction h.

c. 6 a pour **antécédent** – 4 par la fonction h.

d. – 4 a pour **image** 6 par la fonction h.

14. a. L'image de – 1 par f est – 1.

b. $f(-2) = -1{,}5$; $f(0) = -0{,}5$; $f(1) = 0$.

c. L'antécédent de 0,5 par f est 2.

15. a. $f(3) = 2$.

b. $f(0) = 2$; $f(1{,}5) = 0$; $f(-0{,}5) = 2{,}7$.

c. 0,8 ; 1,9 et 4 ont pour image 1.

d. – 0,4 et 2,5 sont des antécédents de 2,5.

e. 3 n'a pas d'antécédent.

› Donner le sens de variation d'une fonction

16. a. f est croissante sur [– 1 ; 1,5] et sur [3,5 ; 5].
Elle est décroissante sur [1,5 ; 3,5] et constante sur [5 ; 6].

b. 1 et – 0,5 sur [0 ; 4], ; 2,5 et – 1 sur [– 1 ; 6].

c.

x	– 1	1,5	3,5	5	6
Sens de variation de f	– 1 ↗	1 ↘	– 0,5 ↗	2,5 →	2,5

17. a. $g(0) = 15$. La balle est au moment du lancement à 15 m au-dessus du sol. $g(2{,}6) = 7$. La balle est à 7 m du sol 2,6 s après son lancement.

b. Les antécédents de 18 par g sont 0,35 et 1,6.
La balle est à 18 m du sol 0,35 s et 1,6 s après son lancement.

c. Le maximum de g sur [0 ; 4] est 20 ; son minimum est 0.
d.

x	0	1	3
Sens de variation de g	15 ↗	20	↘ 0

Étudier une fonction affine

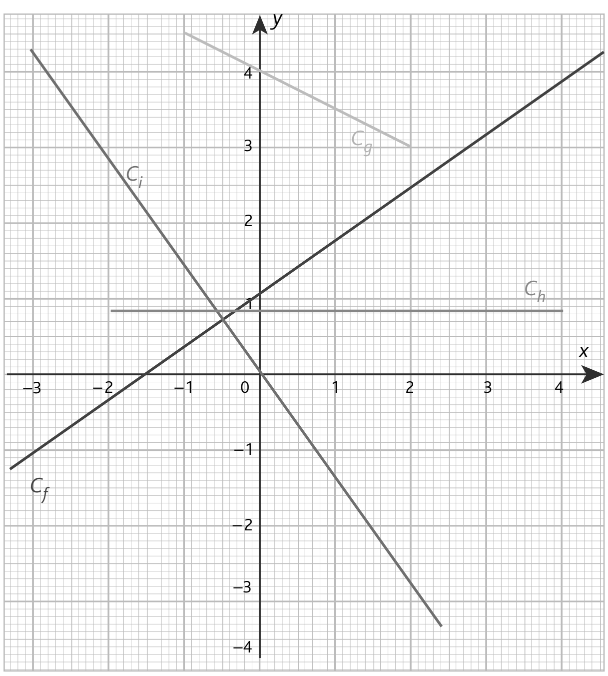
18. a. L'image de 0 est – 5. L'image de $\frac{4}{3}$ est – 1.
b. La solution est 4. Un antécédent de 7 par g est 4.
c. Un antécédent de – 1 est $\frac{4}{3}$ d'après la question **a.**.

19. a. L'image de – 0,5 est 1,5. **b.** – 1,25 a pour image 3.
c. Un antécédent de – 1 est 0,75.

20.

x	– 2	**1**	0,5	$-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$
$f(x)$	– **7**	2	**0,5**	– 5

21. a, b, c, d.



22. f est croissante ; g est décroissante ; h est constante ; i est décroissante.

23. $f \rightarrow D_3$; $g \rightarrow D_1$; $h \rightarrow D_4$; $j \rightarrow D_2$.

24. Le point B appartient à la droite d'équation $y = 3x – 0,8$.

Problèmes p. 69 et 70

› Problème 1
Comparaison de deux tarifs

Partie A

1. $C_A = 70 + 4 \times 12 = 118$ € pour 12 km.

2. $C_A = 4x + 70$; $C_B = 2,5x + 100$.

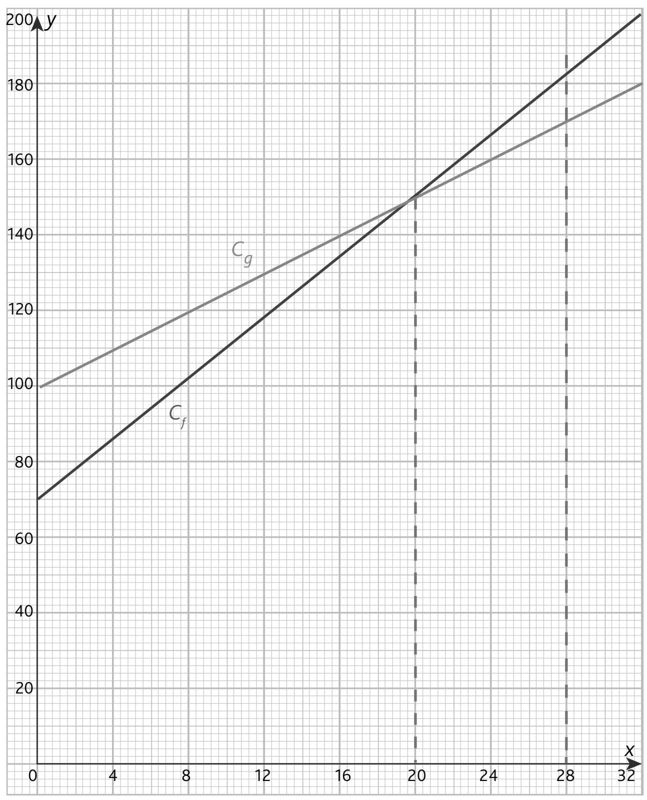
Partie B

1. $x > 20$. Pour quelles distances la société A est-elle plus chère que la société B ?

2. La société B est la plus économique.

Partie C

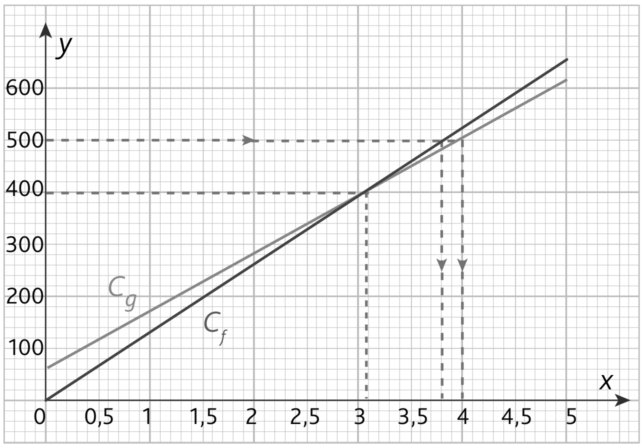
1. **2.** Voir graphique



› Problème 2
Sur la route des vacances

Partie A

1. a.



b. On lit x ≈ 3,85 heures, soit 3 h 50 min. La famille Chapon arrive à 10 h 50 min.

c. La durée du voyage de la famille Canut est d'environ 4 heures. Elle arrive environ à 11 h.

d. 3,1 h = 3 h 06 min. Les deux véhicules se doublent à 10 h 06 min.

Partie B

1. On résout l'équation $130x = 110x + 62$.
On obtient $x = 3{,}1$.

2. Les affirmations a et e sont exactes.

› Problème 3
Le niveau baisse

1. a. La piscine a la forme d'un parallélépipède rectangle.

b. Volume de la piscine : 375 m^3.

2. a. $V(x) = 250(1{,}5 - 0{,}01x)$.

b. $V(x) = -2{,}5x + 375$.
L'expression algébrique de la fonction V est de la forme $ax + b$ avec $a = -2{,}5$ et $b = 375$. Donc V est une fonction affine.

c. Au bout de 5 jours, il reste 362,5 m^3 dans la piscine.

d. La piscine est à moitié remplie au bout de 75 jours.

Démarche d'investigation

› Problème 4
Récit d'une promenade

Le graphique exact est le graphique D.
Les graphiques A et C sont à exclure car il n'y a pas de temps d'arrêt. Le graphique C représente la distance parcourue, et non la distance du point de départ, en fonction du temps.

Je me teste

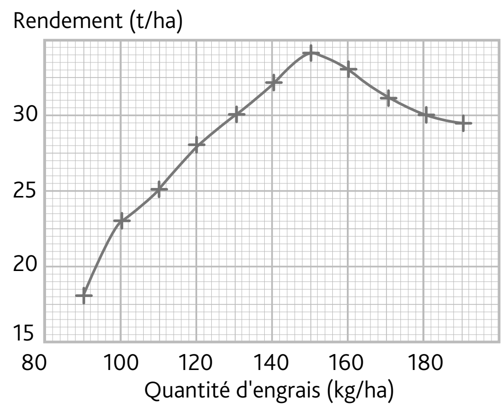
(livre élève pages 71 et 72)

EXERCICE 1 Rendement d'une culture avec un engrais biologique

On répand différentes quantités d'un même engrais biologique sur plusieurs champs de pommes de terre.On étudie la masse de pommes de terre récoltée.

On note *x* la quantité d'engrais répandue, exprimée en kg par hectare, et *y* le rendement en pommes de terre, exprimé en tonnes par hectare. Les résultats sont donnés par le graphique ci-contre.

Répondre aux questions à l'aide du graphique. Laisser les traits de lecture apparents.



1 **a.** Donner le rendement, en t/ha, d'un champ sur lequel on a répandu 110 kg d'engrais par hectare : 25 t/ha

b. À quelle(s) quantité(s) d'engrais, en kg/ha, correspond un rendement de 32 tonnes de pommes de terre par hectare ? 140 kg/ha

2 On note R la fonction qui, à chaque valeur de x, associe y, pour x variant de 90 à 190.

a. Donner l'image de 100 par R : 23 ; donner $R(190)$: 29,5

b. Donner le ou les antécédents de 28 par R : 120

c. Donner deux intervalles où la fonction R est croissante : [19 ; 150] ; [100 ; 120]

Donner deux intervalles où la fonction R est décroissante : [150 ; 190] ; [150 ; 170]

A

Appelez le professeur pour expliquer vos choix à la question 2. c.

d. Donner le maximum de la fonction R sur l'intervalle [90 ; 190] : 34

e. Dresser le tableau de variation de la fonction R.

x	90	150	190
$R(x)$	18 ↗	34	↘ 29,5

EXERCICE 2 La course

Alice (en vélo) et son frère Melvin (en fauteuil roulant) sont sportifs et font la course ensemble. Alice, avec son vélo, roule à la vitesse de 150 mètres par minute. Melvin, avec son fauteuil roulant, se déplace à la vitesse de 100 mètres par minute.
Pour faire une course équitable, Alice laisse 125 mètres d'avance à Melvin au départ.
On note *D* la position d'Alice au moment du départ.

Au départ :

1 a. Calculer la distance parcourue par Alice en 5 minutes : $150 \times 5 = 750$ mètres

b. À quelle distance de *D* se trouve Melvin au bout de 5 minutes ? $125 + 100 \times 5$
$= 125 + 500 = 625$ mètres

2 Soit x le nombre de minutes écoulées depuis le départ. Les distances sont en mètres.

a. Exprimer, en fonction de x, la distance parcourue par Alice : $150\,x$

b. Expliquer pourquoi la distance entre Melvin et le point *D* est égale à $125 + 100x$.

En x minutes, Melvin parcourt $100\,x$ (en mètres). On ajoute la distance entre D et son point de départ.

3 On définit, sur l'intervalle [0 ; 4], la fonction f telle que $f(x) = 150x$ et la fonction g telle que $g(x) = 100x + 125$.

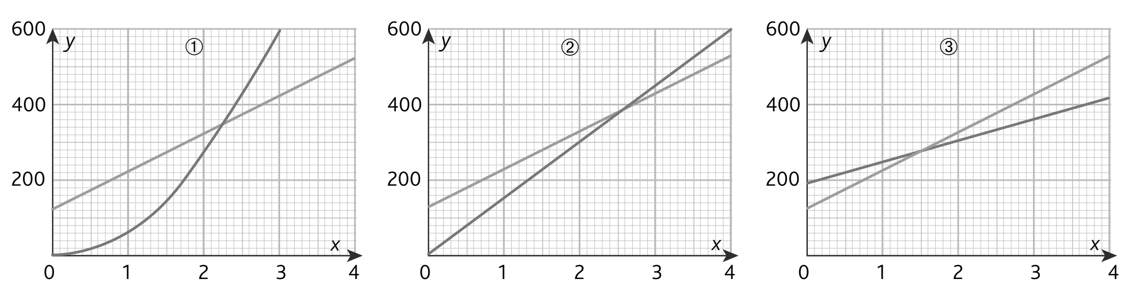
a. La fonction f est-elle affine ? Oui linéaire ? Oui Justifier.

L'expression algébrique de la fonction est de la forme $ax + b$ avec $a = 150$ et $b = 0$.

b. La fonction g est-elle affine ? Oui linéaire ? Non Justifier.

L'expression algébrique de la fonction est de la forme $ax + b$ avec $a = 100$ et $b = 125$.

c. Parmi les trois graphiques ci-dessous, quel est celui où les fonctions f et g sont représentées ? Graphique ②



4 Déterminer le temps nécessaire à Alice pour rattraper Melvin.

$150x = 100x + 125$; $50x = 125$; $x = 2{,}5$

Alice rattrape Melvin au bout de 2 minutes et demie.

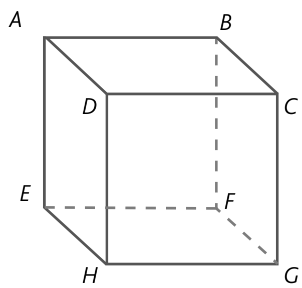
19 Représentation d'un solide

(livre élève pages 73 et 74)

Capacités
- Représenter un solide usuel en perspective cavalière
- Lire et interpréter une représentation en perspective cavalière

1 Lire la représentation d'un cube en perspective cavalière

La perspective cavalière est une technique de dessin qui permet de représenter un solide sur une feuille. Elle déforme ce qui n'est pas en vue frontale, c'est-à-dire vu de face.
Voici une représentation du cube *ABCDEFGH* en perspective cavalière.



1. Lecture de la représentation

a. Cocher la bonne réponse pour chaque phrase.

Le cube a ❑ 4 ☒ 6 ❑ 8 ❑ 12 faces.
Le cube a ❑ 4 ❑ 6 ☒ 8 ❑ 12 sommets.
Le cube a ❑ 4 ❑ 6 ❑ 8 ☒ 12 arêtes.
Un sommet est commun à ❑ 2 ☒ 3 ❑ 4 faces du cube.
Une arête est commune à ☒ 2 ❑ 3 ❑ 4 faces du cube.

b. Sur quelle face le cube est-il posé ? *EFGH*

c. Nommer une face en vue frontale : *ABFE*, *CDHG*

d. Nommer la face arrière du cube : *ABFE*

e. Pourquoi l'arête [*FG*] est-elle en pointillé ? Elle est cachée par la face *CDHG*.

2. Conséquences de la perspective cavalière dans le dessin

Compléter le tableau suivant par oui ou non.

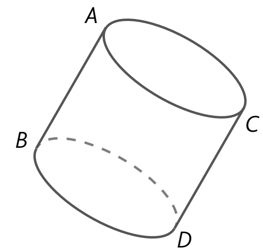
	Sur le cube réel	Sur le dessin en perspective cavalière
a. La face *ABFE* est un carré.	Oui	Oui
b. La face *ADHE* est un parallélogramme.	Non	Oui
c. Les arêtes [*AB*] et [*BC*] ont la même longueur.	Oui	Non
d. Les arêtes [*DC*] et [*CG*] ont la même longueur.	Oui	Oui
e. Les arêtes [*CG*] et [*DH*] sont parallèles.	Oui	Oui
f. Les arêtes [*EF*] et [*HG*] sont parallèles.	Oui	Oui
g. Les arêtes [*FG*] et [*BF*] sont perpendiculaires.	Oui	Non
h. Les arêtes [*EF*] et [*BF*] sont perpendiculaires.	Oui	Oui
i. Les points *A*, *D* et *G* sont alignés.	Non	Oui

2 Lire la représentation d'un cylindre en perspective cavalière

Voici une représentation d'un cylindre de révolution en perspective cavalière.

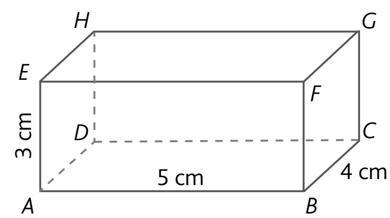
Compléter le tableau suivant par oui ou non.

	Sur le cube réel	Sur le dessin en perspective cavalière
a. (*AB*) est parallèle à (*CD*).	Oui	Oui
b. Les bases sont des disques.	Oui	Non
c. Les bases ont le même rayon.	Oui	Oui



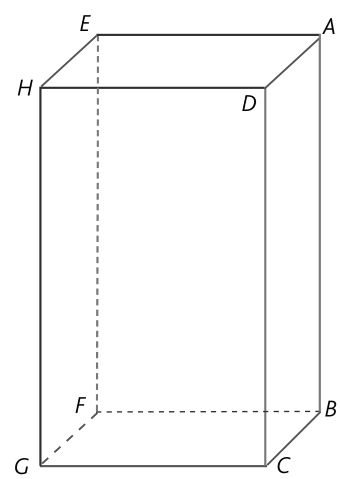
Comment construire un pavé droit en perspective cavalière ?

Voici une représentation d'un pavé droit *ABCDEFGH* de dimensions 3 cm, 4 cm, 5 cm.
Dessiner une représentation en perspective cavalière de ce pavé, posé sur la face *BCGF* et telle que *HGCD* soit la face avant. Utiliser l'arête [*GC*] déjà tracée.



Travaillez au crayon à papier : vous aurez à gommer.

- Dessiner la face avant *HGCD* : c'est un rectangle de dimensions 5 cm par 3 cm.
- Dessiner la face du dessous *BCGF* : elle est représentée par un parallélogramme.
- Tracer les deux autres arêtes verticales. Elles ont pour dimension 5 cm.
- Terminer le tracé. Faire des pointillés pour les arêtes cachées.



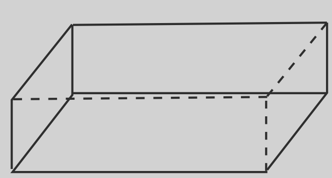
RÉPONSES

Exercices

1 **a.** Les arêtes cachées sont [*LH*], [*EH*] et [*HG*].
b. Seul le sommet *H* est caché.
c. Les faces cachées sont *EHLI*, *LHGK* et *EHGF*.

2 **a.** Le sommet *K* appartient aux faces *ILKJ*, *HGKL* et *FGKJ*.
b. L'arête [*LH*] appartient aux faces *EHLI* et *GHLK*.

3



20 Solides usuels

Capacités
- Reconnaître un solide usuel
- Nommer des solides usuels dans des solides complexes

(livre élève pages 75 et 76)

1 Décrire un parallélépipède rectangle et une pyramide

1. Parallélépipède rectangle

Voici une représentation en perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle (ou pavé droit).

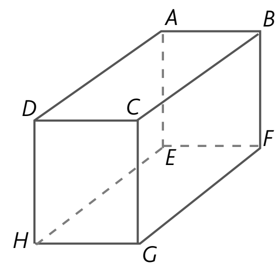
a. Donner le nombre de faces de ce solide : 6

b. Donner le nombre d'arêtes : 12

c. Donner le nombre de sommets : 8

d. Donner la nature de chacune des faces : rectangle.

e. Comment s'appelle un parallélépipède rectangle dont toutes les faces sont des carrés ?
C'est un cube.

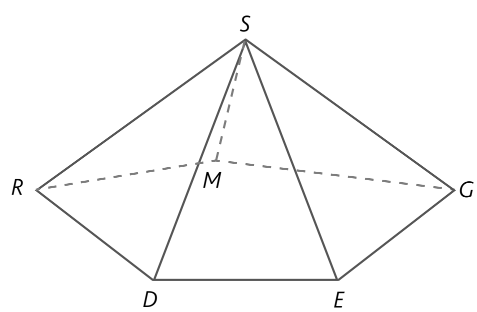


2. Pyramide

Le solide *SDEGMR* est une pyramide.

Compléter les phrases suivantes à l'aide d'un de ces mots :
le sommet, une face latérale, la base, une arête.

– Le triangle *SRD* est une face latérale.
– Le point *S* est le sommet.
– Le segment [*SE*] est une arête.
– Le pentagone *DEGMR* est la base.



La **base** d'une pyramide est un polygone (triangle, quadrilatère…). Ses **faces latérale**s sont des triangles ; elles ont un sommet commun appelé **sommet** de la pyramide.

2 Créer un solide de révolution

1. Solide 1

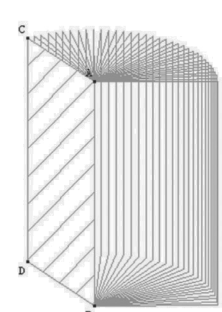
Ouvrir le fichier « 05_solide1.g3w ».

a. Donner la nature de la figure plane *ABDC* dessinée à l'écran : un rectangle

b. On va faire tourner cette figure autour de l'axe (*AB*) pour engendrer un solide. Pour cela :

- **Activer le mode Trace dans le menu Afficher.**
- **Utiliser le pavé fléché du clavier pour faire tourner la figure *ABDC* autour de (*AB*).**

Donner le nom du solide obtenu : on obtient un cylindre de résolution.

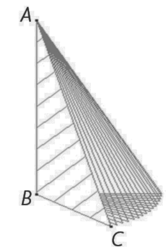


c. Bouger ce solide pour en observer différentes vues. Pour cela :

- **Utiliser les flèches du pavé fléché du clavier tout en gardant appuyée la touche MAJ.**
- **Désactiver le mode Trace pour retrouver la figure plane initiale.**

2. Solide 2

Ouvrir le fichier « 05_solide2.g3w ».



a. Donner la nature de la figure plane *ABC* dessinée à l'écran : un triangle rectangle.

- **Faire tourner cette figure autour de l'axe (*AB*) pour engendrer un solide après avoir activé le mode Trace.**

b. Donner le nom du solide obtenu : on obtient un cône de révolution.

- **Bouger ce solide pour en observer différentes vues.**

3. Solide 3

Ouvrir le fichier « 05_solide3.g3w ».

a. Donner la nature de la figure plane dessinée à l'écran : un demi-disque

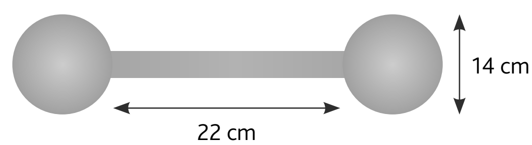
- **Faire tourner cette figure autour de l'axe (*AB*) pour engendrer un solide après avoir activé le mode Trace.**

b. Donner le nom du solide obtenu : on obtient une boule.

- **Bouger ce solide pour en observer différentes vues.**

Comment reconnaître des solides usuels dans un solide complexe ?

Voici un dessin d'haltère.
De quels solides semble-t-il constitué ?
Donner la longueur totale de l'haltère.



- On « imagine » le dessin dans l'espace.
  Les solides des deux extrémités sont des boules.
  La tige centrale est un cylindre.
- On suppose que les solides des deux extrémités ont le même diamètre.
  La longueur de l'haltère est : $14 + 22 + 14 = 50$ cm.

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** Noms de solides : cône, cube, cylindre, parallélépipède rectangle, pyramide, boule.
b. Noms de figures planes : carré, parallélogramme, rectangle, triangle.

2 Les bâtons de craie sont des cylindres ; la plaquette de beurre est un parallélépipède rectangle ; la balle de tennis est une boule ; le chapeau pointu est un cône.

3 **a.** La borne est constituée d'un parallélépipède rectangle et d'un demi-cylindre.
b. Demi-cylindre : rayon : $36 \div 2 = 18$ cm ; longueur : 24 cm.
Parallélépipède rectangle : largeur : 36 cm ; profondeur : 24 cm ; hauteur : $57 - 18 = 39$ cm.

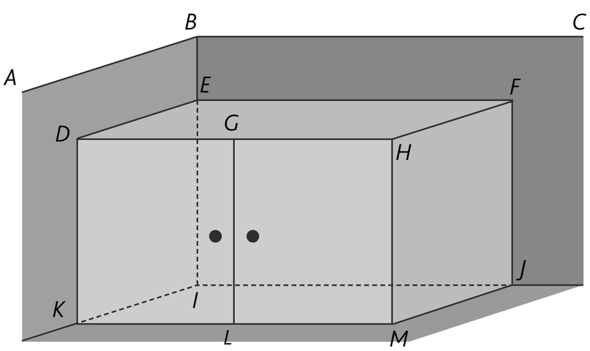
21 Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

(livre élève pages 77 et 78)

Capacités
- Nommer des droites parallèles et des droites orthogonales de l'espace
- Nommer une droite perpendiculaire à un plan et une droite parallèle à un plan

1 Comparer des directions de droites et de plans

Le schéma ci-contre est celui de l'angle d'une pièce occupé par un meuble de rangement parallélépipédique. Les deux pans de mur sont perpendiculaires.



1. Droites parallèles

a. Nommer deux droites sécantes, c'est-à-dire deux droites qui ont un point commun :

(*BE*) et (*DE*)

Dans l'espace, deux droites non sécantes ne sont pas forcément parallèles : par exemple, (*FJ*) et (*AB*) ne sont pas sécantes et ne sont pas parallèles.

b. Nommer deux autres droites non sécantes et non parallèles : (*FJ*) et (*IM*)

c. Nommer deux droites parallèles : (*DE*) et (*HF*)

2. Droites orthogonales

a. Nommer deux droites appartenant à un même plan et perpendiculaires : (*HF*) et (*HM*)

b. Les droites (*FJ*) et (*DH*) sont-elles sécantes ? Non

c. Nommer une droite parallèle à la droite (*FJ*) et perpendiculaire à la droite (*DH*) : (*HM*)

d. Nommer une droite parallèle à la droite (*DH*) et perpendiculaire à la droite (*FJ*) : (*EF*)

On dit que les droites (*FJ*) et (*DH*) sont **orthogonales**. Elles ne sont pas sécantes, mais leurs directions sont perpendiculaires.

e. Nommer deux autres droites orthogonales : (*DK*) et (*EF*)

3. Droites et plans

a. Nommer deux droites parallèles au plan *DEF* : (*BC*) et (*AB*)

b. Nommer deux droites parallèles au plan *FHM* : (*DK*) et (*EK*)

c. Nommer deux droites passant par *M* et perpendiculaires à (*HM*) : (*MJ*) et (*MI*)

La droite (*HM*) est perpendiculaire au plan (*KMJ*).

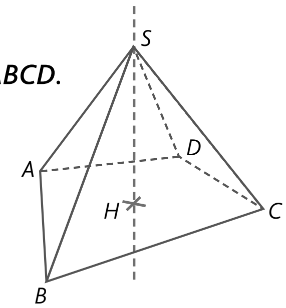
Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

d. Nommer deux droites ne passant ni par *H*, ni par *M*, et orthogonales à (*HM*) : (*KI*) et (*EF*)

2 Utiliser la hauteur d'une pyramide ou d'un cône de révolution

1. Hauteur d'une pyramide

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. $SABCD$ est la pyramide de sommet S et de base $ABCD$.
H est le point de la base tel que la droite (SH) est perpendiculaire à cette base.
(SH) est la hauteur de la pyramide.

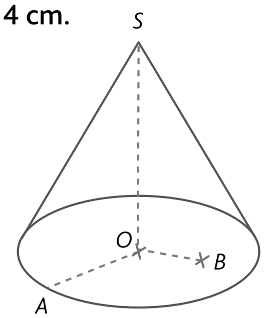


a. Nommer une droite perpendiculaire à la droite (SH) : (CH).

b. Nommer une droite orthogonale à la droite (SH) : (BC).

2. Hauteur d'un cône de révolution

Voici un cône de révolution de sommet S. Sa base est un disque de centre O et de rayon 4 cm.
Les points A et B appartiennent à ce disque ; $OA = 4$ cm ; $OB = 3$ cm.
$[SO]$ est la hauteur du cône ; elle est perpendiculaire à la base.



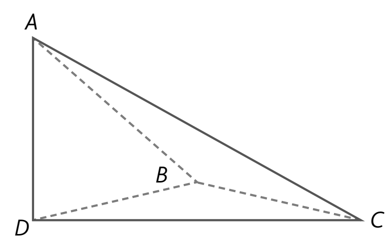
a. Nommer une droite perpendiculaire à (SO) : (OB).

b. Nommer une droite ne passant pas par O et orthogonale à (SO) : (AB).

c. Nommer un triangle rectangle en O : SAO, SBO.

Comment extraire une figure plane d'un solide usuel ?

(AD) est la hauteur de la pyramide $ABCD$ de base BCD. Nommer deux triangles rectangles. Justifier.



- Les triangles ADB et ADC sont rectangles en D.
- On utilise la définition de la hauteur d'une pyramide pour justifier.
  (AD) est la hauteur de la pyramide.
  Donc elle est perpendiculaire au plan BCD.
- On applique le résultat du cours : si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
- Par conséquent, on a : (AD) orthogonale à la droite (DB) et à la droite (DC).
- Donc les triangles ADB et ADC sont rectangles en D.

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** Les droites (DE) et (HK) ne sont pas sécantes.
b. Les droites (DH) et (JF) sont parallèles.
c. Les droites (HJ) et (HD) sont perpendiculaires.
d. Les droites (HJ) et (KG) sont orthogonales.
e. Les droites (HJ) et (JE) sont perpendiculaires.

2 **a.** Rectangle dont l'un des côtés est [AC] : $ACGE$.
b. On a (AE) parallèle à (CG) et $AE = CG$. Donc le quadrilatère $ACGE$ est un parallélogramme.
La droite (AE) est perpendiculaire au plan $ABCD$, donc elle est perpendiculaire à la droite (AC).
Le parallélogramme $ACGE$ a un angle droit. C'est donc un rectangle.

(livre élève pages 79 et 80)

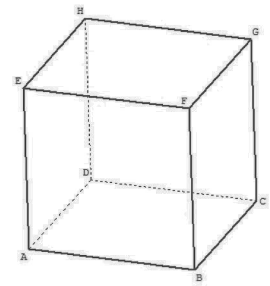
22 J'utilise un logiciel (Geoplan-Geospace)

Isoler des figures planes dans un cube

Ouvrir le fichier « **05_cube.g3w** ».

Le cube *ABCDEFGH* est représenté en perspective cavalière.

Le nombre *a* donné en haut de l'écran est la mesure de l'arête du cube.



1. Observation du cube

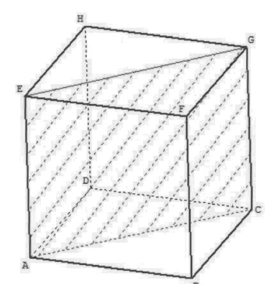
- **Faire tourner le cube. Pour cela, utiliser les flèches du pavé fléché du clavier tout en gardant appuyée la touche MAJ.**

  Que remarque-t-on concernant les arêtes en pointillés lorsque le cube tourne ?

  Lorsqu'on fait tourner le cube, les arêtes en pointillés ne sont plus les mêmes.

- **Retrouver la figure initiale en activant la combinaison de touches CTRL F1.**

2. Nature du quadrilatère *AEGC*



- **Appuyer sur la touche q pour dessiner le quadrilatère *AEGC*.**

a. Conjecturer la nature de ce quadrilatère : carré, rectangle, parallélogramme…

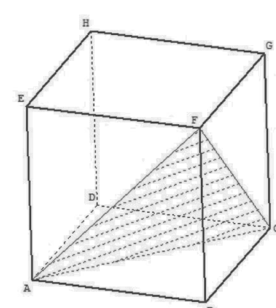
Le quadrilatère *AEGC* semble être un rectangle.

- **Appuyer sur la touche 1 : cette commande fait tourner le cube et amène le plan *AEGC* de face.**

b. La conjecture faite semble-t-elle vérifiée ? Oui

- **Appuyer sur la touche q pour cacher le quadrilatère *AEGC*.**
- **Retrouver la figure initiale en activant la combinaison de touches CTRL F1.**

3. Nature du triangle *AFC*



- **Appuyer sur la touche t pour dessiner le triangle *AFC*.**

a. Conjecturer la nature du triangle *AFC* : isocèle, équilatéral, rectangle, quelconque.

Le triangle *AFC* semble équilatéral.

- **Appuyer sur la touche 2 pour afficher la mesure des côtés du triangle *AFC*.**

b. Que remarque-t-on ? D'après les mesures affichées, on a $AC = FC = AF$.

- **Faire varier la mesure de l'arête du cube avec les flèches ↓ et ↑ du clavier.**
- **Vérifier à l'écran que l'on a toujours $AC = FC = AF$.**

c. La conjecture faite précédemment est-elle vérifiée ? Oui

Remarque : l'affichage de mesures (qui de plus sont des valeurs approchées) n'est pas une démonstration.

Appelez le professeur pour lui présenter votre conclusion.

J'utilise un logiciel (Geoplan-Geospace)

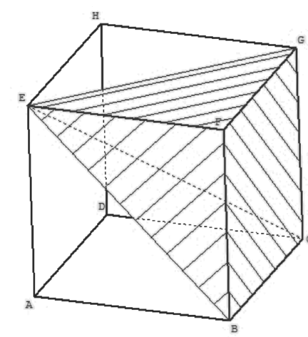
Remplir un cube avec trois pyramides

Voir fichier « 05_cube_pyramide_corrige.gw3 »

Ouvrir le fichier « **05_cube_pyramide.g3w** ».

On peut faire tourner le cube en appuyant simultanément sur la touche MAJ et une des flèches du pavé fléché. La touche 1 permet de retrouver la position initiale du cube.

Les flèches du pavé fléché font varier la mesure de l'arête du cube.



1. Description de la pyramide *EBCGF*

Le sommet de la pyramide *EBCGF*, hachurée en bleu, est *E*.

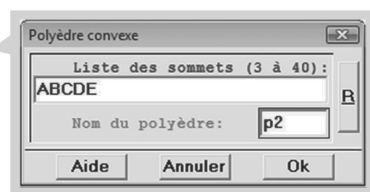
a. Nommer sa base : le carré *BCGF*

b. Nommer sa hauteur : [*EF*]

2. Tracé de deux autres pyramides de sommet *E*

a. Construction de la pyramide *EABCD* de sommet *E*

- **Cliquer successivement sur *Créer, Solide, Polyèdre convexe, Défini par ses sommets*.**
- **Compléter les champs comme indiqué à droite. Cliquer sur Ok.**
- **Hachurer en rouge la pyramide obtenue.**



Nommer la base de cette pyramide : le carré *ABCD* ; nommer sa hauteur : [*EA*]

b. Construction de la pyramide *ECDHG* de sommet *E*

- **Suivre la même procédure qu'au a.. La liste des sommets est *CDHGE* ; le nom du polyèdre est p3.**
- **Hachurer en vert la pyramide obtenue.**

Nommer la base de cette pyramide : le carré *CDHG* ; nommer sa hauteur : [*EH*]

- **Faire tourner la figure pour vérifier que le cube est rempli par les trois pyramides construites.**

3. Comparaison de volumes

- **Appuyer sur la touche a pour faire apparaître la mesure, en cm, de l'arête du cube.**

a. Calculer, en cm³, le volume du cube : $V_{cube} = 4{,}1^3 = 68{,}921\text{ cm}^3$

b. Expliquer pourquoi les trois pyramides construites ont le même volume, sans calculer ce volume.

Les 3 pyramides ont pour base des faces du cube qui sont égales, et pour hauteur des arêtes du cube, qui sont égales. Elles sont « fabriquées pareilles ».

A

Appelez le professeur pour lui présenter votre raisonnement.

c. Déduire des questions **a.** et **b.** le volume de chaque pyramide : $V_{pyramide} = V_{cube} \div 3 \approx 22{,}974\text{ cm}^3$.

- **Appuyer sur la touche v pour vérifier les résultats des questions 3.a. et 3.c.**

Exercices & Problèmes

R *Exercices avec réponses en fin d'ouvrage.* ✷/✷✷ *Exercices plus difficiles.*

Exercices p.83 à 85

1. QCM

a. Arrière

b. Perpendiculaires

c. Orthogonales ; non sécantes

d. Parallèles ; dans un même plan

2. Vrai - Faux

a. Faux

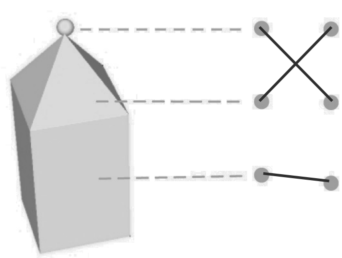
b. Faux

c. Vrai

d. Vrai

3. Associer

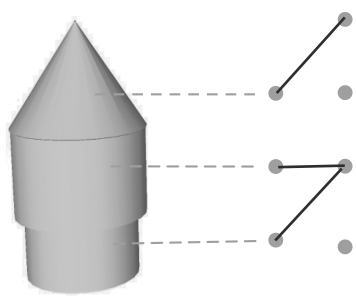
Retrouver les solides usuels qui composent ce dessin.



- Cylindre
- Pyramide
- Boule
- Parallélépipède rectangle
- Cône

4. Associer

Retrouver les solides usuels qui composent ce dessin.

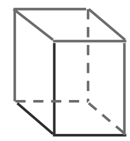


- Cône
- Boule
- Cylindre
- Parallélépipède rectangle
- Pyramide

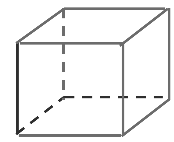
› Dessiner et interpréter une représentation en perspective cavalière

5.

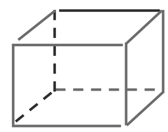
a.



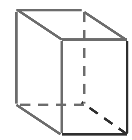
b.



c.

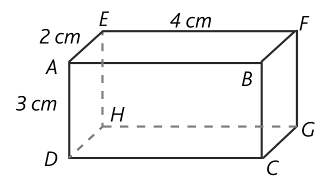


d.

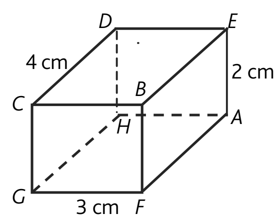


6. Seul le dessin a. est correct.

7. a. La face avant est la face *ABCD*.

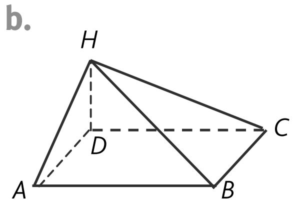


b. La face avant est la face *BCGF*.

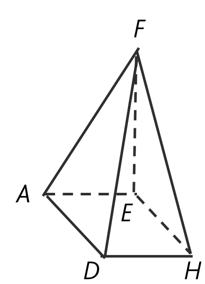


8. a. La base de la pyramide *HABCD* est le rectangle *ABCD*.

b.



c.



› Reconnaître un solide usuel

9. La pyramide a 7 faces (1 base et 6 faces latérales) et 12 arêtes.

10. a. Les parallélépipèdes sont les dessins 1 et 5.

b. Les pyramides sont les dessins 2 (base : quadrilatère), 8 (base : quadrilatère) et 12 (base : pentagone).

c. Les cônes de révolution sont les dessins 3 et 9.

d. Le dessin 4 est une boule ; les dessins 6 et 10 sont des cylindres de révolution.

e. Le solide 11 a deux bases parallèles ; c'est un prisme droit.

11. ① → boule ; ② → cylindre ; ③ → tronc de cône.

12. a. *A, F* et *C* sont sur la sphère de centre *B* et de rayon *BC*.

b. *E*, *H*, *G* et *F* sont sur la sphère de centre *J* et de rayon *JF*.

c. *E*, *H*, *G* et *F* sont sur la sphère de centre *I* et de rayon *IF*.

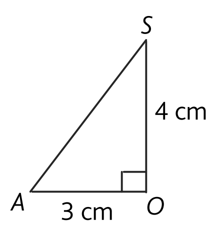
d. *C*, *H* et *F* sont sur la sphère de centre *A* et de rayon *AF*.

› Extraire une figure plane d'un solide usuel

13. a. Carré de côté [*AD*] : *ADHE*.
b. Rectangle qui n'est pas un carré : *DCFE*.
c. Triangle isocèle de sommet *H* : *DHG*.
d. Triangle rectangle en *G* : *FGH*.
e. Triangle équilatéral : *DEG*.

14. a. Le triangle *ASO* est rectangle en *O*.

b.



15.

Nature du triangle	*ABC*	*SBC*	*SAI*
Ni rectangle ni isocèle	Faux	Faux	Faux
Rectangle et isocèle	Vrai	Faux	Faux
Isocèle mais non rectangle	Faux	Vrai	Faux
Rectangle mais non isocèle	Faux	Faux	Vrai

› Décomposer un solide complexe

16. Cette tour est constituée d'un cylindre et d'une pyramide à base carrée.

17. Cette lanterne est constituée d'un parallélépipède rectangle et d'une pyramide à base rectangulaire.

18. Ce tube à essai est constitué d'un cylindre et d'une demi-sphère.

19. Cette balise est constituée d'un cône de révolution et d'une demi-boule.

› Voir dans l'espace

20. a. Vraie.

b. Vraie.

c. Fausse.

d. Vraie.

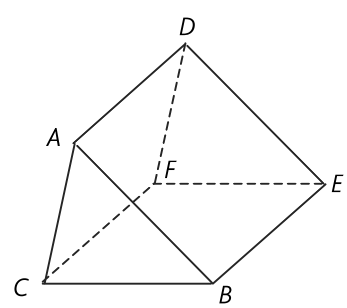
e. Vraie.

21. a. Plan parallèle au plan *JABI* : *FGHK*.
b. Droite parallèle au plan *FGCL* : (*KH*).
c. Droite perpendiculaire au plan *DEFG* : (*FK*).
d. Droite du plan *ABCL* orthogonale à (*FK*) : (*AB*).
e. Droite du plan *DEFG* parallèle à (*AB*) : (*FG*).

Problèmes p. 86

› Problème 1

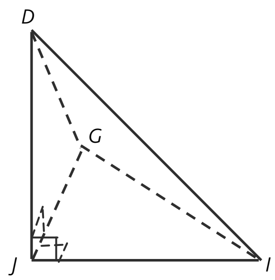
1. Ce solide a 5 faces, 6 sommets et 9 arêtes.
2. Les droites (*DE*) et (*CB*) ne sont pas sécantes. Elles ne sont même pas dans le même plan.
3. La droite (*AB*) répond à la question. On peut proposer aussi la droite (*DE*).
4.



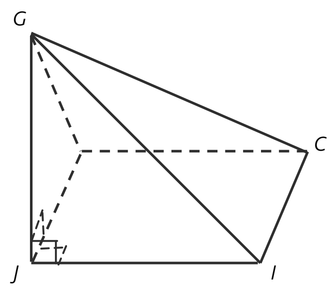
› Problème 2

A. 1. Les segments [*GI*], [*ID*] et [*GD*] sont les diagonales de trois carrés de côté 3 cm. Ils ont donc la même longueur.
2. La base de la pyramide est le triangle *GID*. Il est équilatéral.
3. Les autres faces de la pyramide sont des triangles rectangles isocèles.

4.



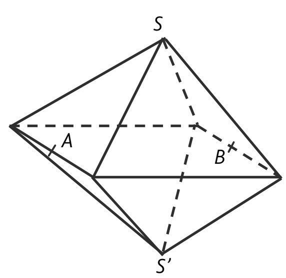
B. 1. La base de cette pyramide est le carré *CDIJ*.
2. Les faces *GJI* et *GJD* sont des triangles rectangles isocèles. Les faces *GDC* et *GIC* sont des triangles rectangles.
3.



4. La hauteur de cette pyramide est [*GJ*].

› Problème 3

1.

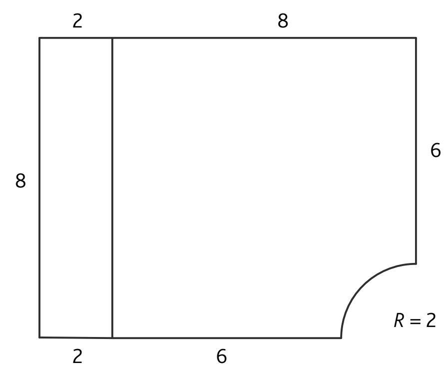


2. Nombre de sommets : 6 ; nombre de faces 8 ; nombre d'arêtes : 12
3. Le quadrilatère *SAS'B* est un losange : ses côtés sont les hauteurs de 4 triangles isocèles égaux. Ils sont donc de même longueur. De plus, ils sont dans le même plan.

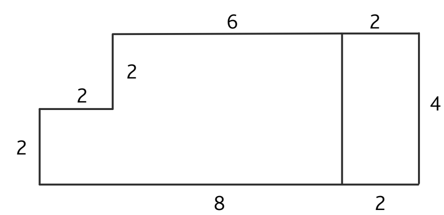
Démarche d'investigation

› Problème 4

1.



2.



Je me teste

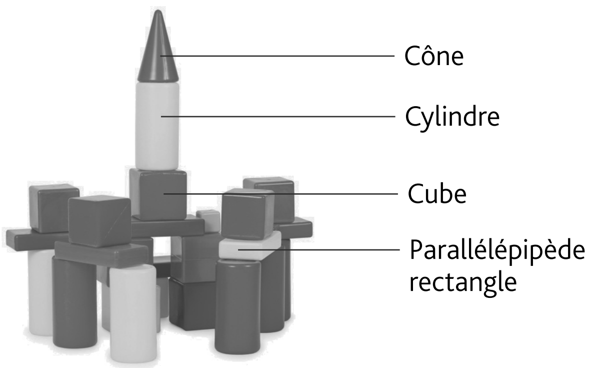
(livre élève pages 87 et 88)

EXERCICE 1 Jeu de construction

1 Citer quatre solides usuels parmi les pièces de ce jeu de construction.

Cube, parallélépipède rectangle, cylindre, cône.

2 Indiquer sur l'illustration ci-dessous, à l'aide d'une flèche et d'une légende, où se trouvent ces solides.

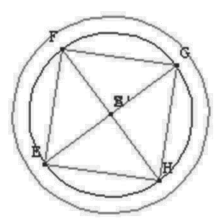


Une seule flèche et une seule légende par type de solide.

EXERCICE 2 Solide composé de solides usuels

Ouvrir le fichier « 05_je_me_teste.g3w ».

L'image qui apparaît à l'écran est celle d'un objet vu de dessus.
Pour obtenir d'autres vues de cet objet, utiliser une des touches du pavé fléché du clavier tout en gardant appuyée la touche **MAJ**.
La touche **I** permet de retrouver la vue initiale.
Donner le nom des solides usuels qui composent cet objet.



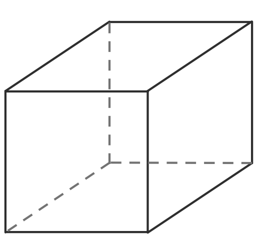
Pyramide, cylindre, cône.

Appelez le professeur pour présenter les solides reconnus.

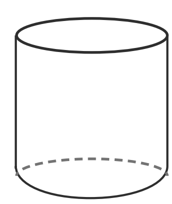
EXERCICE 3 Dessins en perspective cavalière

Chacun des deux dessins ci-dessous est le début de la représentation d'un solide usuel. Les compléter en appliquant les règles de la perspective cavalière.

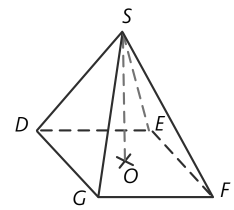
1 Cube



2 Cylindre de révolution

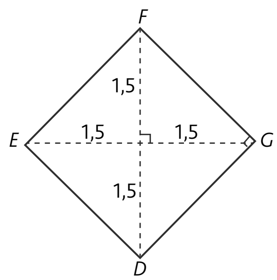


EXERCICE 4 Figures planes dans une pyramide



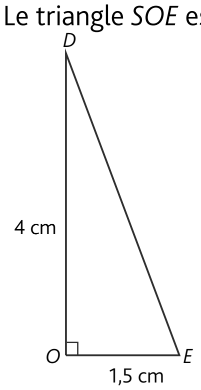
Le quadrilatère *DEFG* est un carré de centre *O* tel que *EG* = 3 cm.
La pyramide *SDEFG* a pour sommet *S* et pour base *DEFG*.
Sa hauteur [*SO*] est telle que *SO* = 4 cm.

1 Dessiner en vraie grandeur le carré *DEFG*.

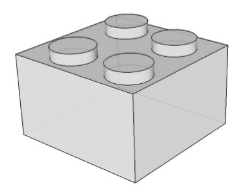


2 Dessiner en vraie grandeur le triangle *SOE*.

Le triangle *SOE* est rectangle en *O*.

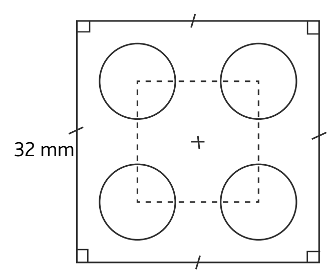


EXERCICE 5 Des briques pour construire



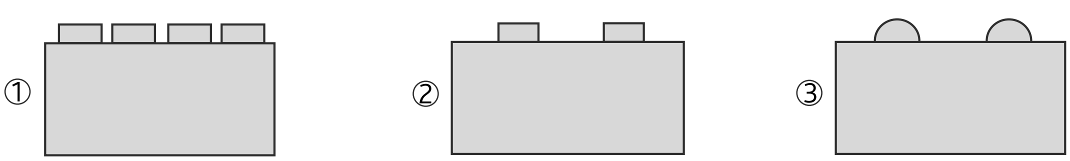
Cette illustration est celle d'une brique, de forme parallélépipédique, d'un jeu de construction pour enfants. Les plots cylindriques de la face supérieure permettent d'assembler les briques en hauteur.

1 La vue de dessus de cette brique est un carré de 16 mm de côté. Le diamètre des plots est 5 mm.
Les centres des plots forment un carré de 8 mm de côté.
Construire cette vue de dessus à l'échelle 2.



2 On représente une des faces latérales de la brique en vue frontale.
Les dessins ne sont pas à l'échelle.

Quel est le dessin exact ? Dessin ② .

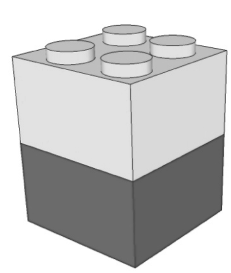


A

Appelez le professeur pour expliquer votre choix.

3 La hauteur d'une brique, plots compris, est 11,2 mm. On assemble deux briques de mêmes dimensions. La hauteur totale est alors 20,8 mm.

Montrer que la hauteur d'un plot est 1,6 mm :



Soit x la hauteur d'une brique sans les plots et y la hauteur d'un plot.

$\begin{cases} x+y=11{,}2 \\ 2x+y=20{,}8 \end{cases}$ D'où $x=9{,}6$ et $y=1{,}6$.
La hauteur d'un plot est 1,6 mm.

6. FLUCTUATION D'UNE FRÉQUENCE

23 Échantillon aléatoire

Capacités
- Expérimenter la prise d'échantillon
- Distinguer fréquence dans la population et fréquence dans l'échantillon

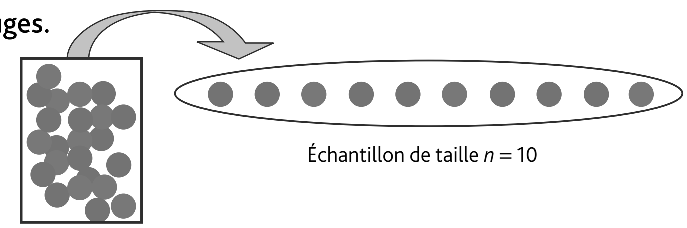
(livre élève pages 89 et 90)

1 Définir les notions de population et d'échantillon aléatoire de taille *n*

Tirages avec remise dans une urne de composition connue

Une urne contient 30 boules, $\frac{1}{3}$ de bleues et $\frac{2}{3}$ de rouges.

On effectue des tirages au hasard avec remise : on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne.
On effectue ainsi 10 tirages.
On obtient 3 boules bleues et 7 boules rouges.



Échantillon de taille $n = 10$

1. Compléter les phrases suivantes par « un échantillon », « la taille » ou « la population ».

Les 30 boules de l'urne constituent ...la population..................... ; les 10 boules tirées constituent ...un échantillon :..................... ; ......la taille............................ de l'échantillon est 10.

2. Calculer la fréquence des boules bleues dans l'échantillon : $f =$ ......0,3..................

3. Comparer avec la fréquence p des boules bleues dans la population : ... $f \neq p$ car $p = \frac{1}{3}$ ....

Prendre **au hasard** un élément d'une population signifie que chaque élément a les mêmes chances d'être tiré
Un **échantillon aléatoire de taille *n*** est obtenu lorsqu'on prend au hasard *n* éléments de la population.

2 Expérimenter la prise d'échantillon à l'aide d'un dé

Avec un dé cubique, on considère l'urne de l'activité 1. On possède un dé et on remplace les 10 tirages par 10 lancers de dé. Si l'on obtient 1 ou 6, on considère qu'on a tiré une boule bleue. Si l'on obtient 2, 3, 4 ou 5, on considère qu'on a tiré une boule rouge.

1. Vérifier que cette règle permet de respecter les proportions des boules dans l'urne.

Les proportions sont respectées : $\frac{1}{3}$ des faces correspond à « boule bleue » et $\frac{2}{3}$ à « boule rouge »..........

On a obtenu la suite de résultats suivants avec 10 lancers de dé : 2, 3, 6, 4, 2, 1, 1, 5, 3, 5.

2. Calculer la fréquence des boules bleues dans l'échantillon : $f =$ ..0,3..................

3. À l'aide du dé, prélever un nouvel échantillon aléatoire de taille 10. Noter les résultats.

Le résultat dépend du hasard...........................

4. Calculer la fréquence des boules bleues dans ce nouvel échantillon : ....

Le résultat dépend du hasard...........................

5. Comparer le résultat avec ceux d'autres élèves. Que constate-t-on ? ....

Les résultats sont variables. ....

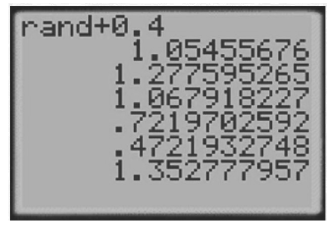
6. Comparer les fréquences des boules bleues observées dans les échantillons avec leur proportion dans l'urne.

> Ne pas confondre populations et échantillons.

Les fréquences observées « fluctuent » autour de la proportion dans l'urne. ....

Comment expérimenter à l'aide de la calculatrice ?

La fonction « random » (notée rand, NbrAléat ou Ran#) de la calculatrice fournit un nombre décimal au hasard dans l'intervalle [0 ; 1[. Comment peut-on utiliser l'instruction rand+0.4 ou Ran#+0.4 pour simuler un tirage au hasard dans une urne contenant 40 % de boules rouges et 60 % de boules bleues ?

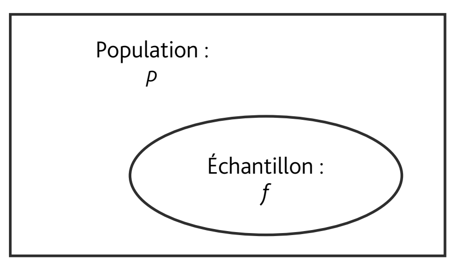


- Consulter les fiches calculatrice pour l'utilisation de la fonction « random ».
  Ajouter 0,4 a pour effet de décaler l'intervalle [0 ; 1[de 0,4 vers la droite.
  L'instruction rand+0.4 fournit donc un nombre au hasard dans l'intervalle ...[0,4 ; 1,4[...............
- La longueur de l'intervalle [0,4 ; 1,4[est ...1............... . La longueur de l'intervalle [1 ; 1,4[est ...0,4............ qui correspond à ...40............ % de la longueur de l'intervalle [0,4 ; 1,4[.
- Parmi les deux intervalles [0,4 ; 1[et [1 ; 1,4[, quel est celui dont les nombres comportent le chiffre 1 avant le virgule ? ...[1 ; 1,4[............
- Si l'instruction rand+0.4 fournit un nombre avec le chiffre 1 devant la virgule, on considère que la boule tirée est rouge. ....

Comment distinguer fréquence dans la population et fréquence dans l'échantillon ?

En interrogeant au hasard 60 élèves d'un lycée, on trouve 42 demi-pensionnaires. On sait qu'il y a 65 % de demi-pensionnaires dans l'établissement. Quelles sont les fréquences de demi-pensionnaires dans la population considérée et dans l'échantillon ?

- On peut s'aider du schéma ci-contre et utiliser des lettres différentes :
  p pour la fréquence dans la population et f pour la fréquence dans l'échantillon.
- La « population » est l'ensemble des individus où a été prélevé l'échantillon (tous les élèves du lycée).
  D'après l'énoncé, $p =$ ...0,65................
- L'échantillon est constitué des élèves interrogés au hasard.
  On a $f = \dfrac{42}{60} = 0{,}7$



RÉPONSES

Exercices

1 **a.** On lance 20 fois les deux pièces. On obtient, par exemple : PF, PP, PF, FF, FF, FF, PF, PF, PF, PP, PF, PF, FF, PF, PP, PF, PF, PF, PF, PP.

b. Sur l'échantillon précédent, la fréquence de l'événement « pile et face » est $\dfrac{12}{20} = 0{,}6$.

2 **a.** La fréquence des boules noires dans l'urne est $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$. Celle des boules blanches est 0,75.

b. On peut utiliser l'instruction rand + 0,25 et considérer que lorsque la partie entière est 1, la boule est noire, lorsqu'elle est 0, la boule est blanche.

24 Fluctuation selon les échantillons

(livre élève pages 91 et 92)

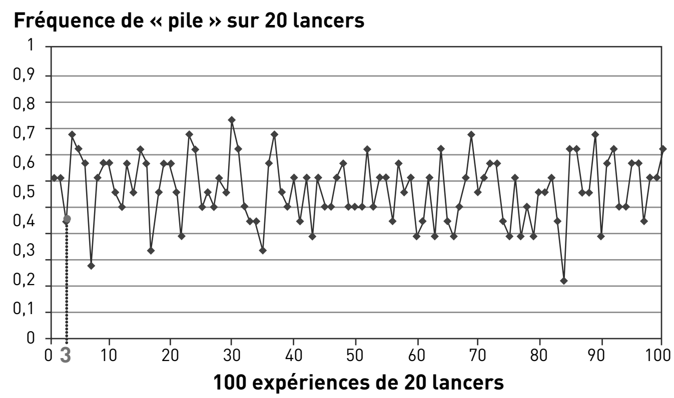
Capacités
- Étudier la fluctuation d'une fréquence
- Tenir compte de la fluctuation pour faire preuve d'esprit critique

1 Observer la fluctuation d'une fréquence

Dans un village en Chine en 2000, il est né 20 enfants dont 16 garçons. La question qui se pose est de savoir si le hasard seul peut raisonnablement expliquer cette observation. Pour cela, nous supposerons qu'habituellement un enfant a une chance sur deux d'être une fille ou un garçon.

Pour simuler le résultat d'une naissance, on peut utiliser le lancer d'une pièce de monnaie, par exemple « pile » pour « garçon » et « face » pour « fille ».

On a réalisé 100 expériences de 20 lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Le graphique ci-contre indique la fréquence de « pile » obtenue sur ces 100 échantillons de taille 20.



1. L'échantillon n° 3 (point en rouge) a fourni une fréquence de pile égale à 0,4. Combien de fois la pièce est-elle tombée sur pile durant les 20 lancers ? $0,4 \times 20 = 8$ fois.

2. Pourquoi la fréquence de pile varie-t-elle ? En raison du hasard.

3. Autour de quelle valeur la fréquence de pile semble-t-elle varier ? Autour de 0,5.

Les variations observées se nomment **fluctuations** selon les échantillons de taille 20.

2 Mesurer la fluctuation à l'aide de l'étendue

On reprend la situation précédente, pour étudier le rôle du hasard dans les naissances en Chine.

1. Quelle est la plus petite fréquence de pile sur les 100 expériences ? 0,2

La plus grande ? 0,75

2. Calculer la différence *e* de ces deux fréquences : $e =$ 0,75 − 0,2 = 0,55

Cette différence se nomme l'**étendue**. Elle permet de mesurer la fluctuation.

3. Quelle est la fréquence des garçons nés en 2000 dans le village chinois ? $\frac{16}{20} = 0,8$

4. Le hasard seul peut-il raisonnablement expliquer l'observation faite en Chine ?

Le hasard fournit très rarement une fréquence aussi élevée. Ce n'est sans doute pas la seule explication.

Comment déterminer l'étendue des fréquences d'une série d'échantillons ?

Une machine fabrique des pièces en grande série. Pour contrôler la qualité, on prélève régulièrement des échantillons aléatoires dans la production.
Le nombre de pièces acceptables pour 5 échantillons de taille 10 est : 9, 9, 10, 9 et 8.
Le nombre de pièces acceptables pour 5 échantillons de taille 100 est : 90, 90, 92, 91 et 89.
Calculer la fréquence des pièces acceptables dans chaque échantillon, puis comparer l'étendue des fréquences pour les échantillons de taille 10 et pour ceux de taille 100.

- Pour obtenir les fréquences, on divise l'effectif par la taille de l'échantillon.

  Les fréquences observées pour les échantillons de taille 10 sont :

  0,9 ; 0,9 ; 1 ; 0,9 ; 0,8.

  Les fréquences observées pour les échantillons de taille 100 sont :

  0,9 ; 0,9 ; 0,92 ; 0,91 ; 0,98.

- Pour calculer l'étendue des fréquences, on effectue la soustraction de la plus grande et de la plus petite.

  Pour les échantillons de taille 10 : 1 – 0,8 = 0,2

  Pour les échantillons de taille 100 : 0,92 – 0,89 = 0,03

Comment utiliser la fluctuation pour faire preuve d'esprit critique ?

D'après le graphique de la page précédente, lorsqu'on lance 20 fois une pièce de monnaie équilibrée, la fréquence de pile fluctue habituellement entre 0,3 et 0,7.

Une entreprise emploie 20 personnes, 7 femmes et 13 hommes.

Peut-on considérer que cette répartition est uniquement due au hasard ?

- On calcule la fréquence de femmes parmi les 20 employés : $f = \frac{7}{20} = 0{,}35$
- Lorsque les résultats observés sont compris dans les fluctuations habituelles des échantillons de taille *n*, le « hasard » peut servir d'explication. Sinon, une autre explication que le « hasard » est à rechercher.

  Répondre à la question posée.

  0,35 est compris entre 0,3 et 0,7.

  On peut considérer que cette répartition est due au hasard.

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** Non, car le hasard intervient lors de la prise d'échantillon.
b. L'étendue des fréquences est 3 %.

2 **a.** La fréquence observée est $\frac{35}{250} = 0{,}14$.
b. Comme 14 % n'est pas compris entre 0,8 % et 11,2 %, on peut considérer que cette fréquence est inquiétante.

Compléments pour le professeur permettant le recul sur l'essentiel du chapitre « Fluctuation d'une fréquence »

Le contenu de ce paragraphe est uniquement destiné aux enseignants.

1. Échantillon aléatoire de taille *n*

❒ Depuis la classe de troisième, l'élève doit savoir que l'expression « prendre au hasard » signifie que chaque élément à la même probabilité d'être tiré. L'expression « équiprobabilité », qui n'est pas explicitement au programme de troisième, peut être, ou ne pas être, connue.

Dans l'expression « échantillon aléatoire », le terme « **aléatoire** » signifie que l'échantillon est obtenu par tirage « au hasard » (éventuellement avec remise). L'intérêt d'un échantillon aléatoire, par rapport à un échantillon « choisi », est d'éviter les biais. Par exemple, dans un laboratoire de recherche médicale, prendre une souris « au hasard » ne signifie pas prendre la première souris que l'on peut attraper dans la cage. Il y a fort à parier que la souris qui se laisse ainsi prendre est moins vive que les autres, peut-être plus faible, ce qui constitue un biais pour tester un médicament. Il faut numéroter les souris et tirer le numéro au hasard.

❒ Dans son sens premier, un **échantillon** est un sous-ensemble de la population. Par exemple, un échantillon de 1 000 personnes, issues de la population française, ayant répondu à un sondage. Mais cette situation n'est pas la seule.

Tout d'abord, lorsque la population est d'effectif faible, par exemple quelques dizaines de boules dans une urne, on effectue des tirages avec remise. Dans cette situation (qui est le « modèle » à avoir en tête), l'échantillon n'est pas réellement un sous-ensemble de l'urne. De plus, dans ce cas, l'échantillon peut avoir une taille supérieure à celle de la population (on peut tirer 100 boules avec remise dans une urne contenant 10 boules).

Ensuite, la population peut être « virtuelle ». Par exemple, 5 lancers d'un dé est un échantillon de taille 5 d'une population constituée de tous les lancers que l'on peut faire avec ce dé (si le dé est bien équilibré, la fréquence du 6 dans la population est $p = 1/6$, c'est la probabilité de faire un 6, la fréquence f du 6 sur un échantillon de 5 lancers est bien sûr variable).

Il est inutile de troubler les élèves avec tout cela, mais il faut l'avoir à l'esprit.

2. Fréquence d'un caractère dans un échantillon aléatoire

Il est très important de distinguer, par les notations, la fréquence p du caractère dans la population, qui est fixe (et, dans ce chapitre, supposée connue), et la fréquence f obtenue sur un échantillon (ou les fréquences f_1, f_2... obtenues sur différents échantillons), qui est variable et dépend du tirage au hasard.

L'exemple de l'urne (cette urne bicolore est historiquement celle de **Jacques Bernoulli**, auquel on doit le premier énoncé de la loi des grands nombres) est essentiel. Il constitue une image mentale que l'on peut invoquer dans de très nombreuses situations.

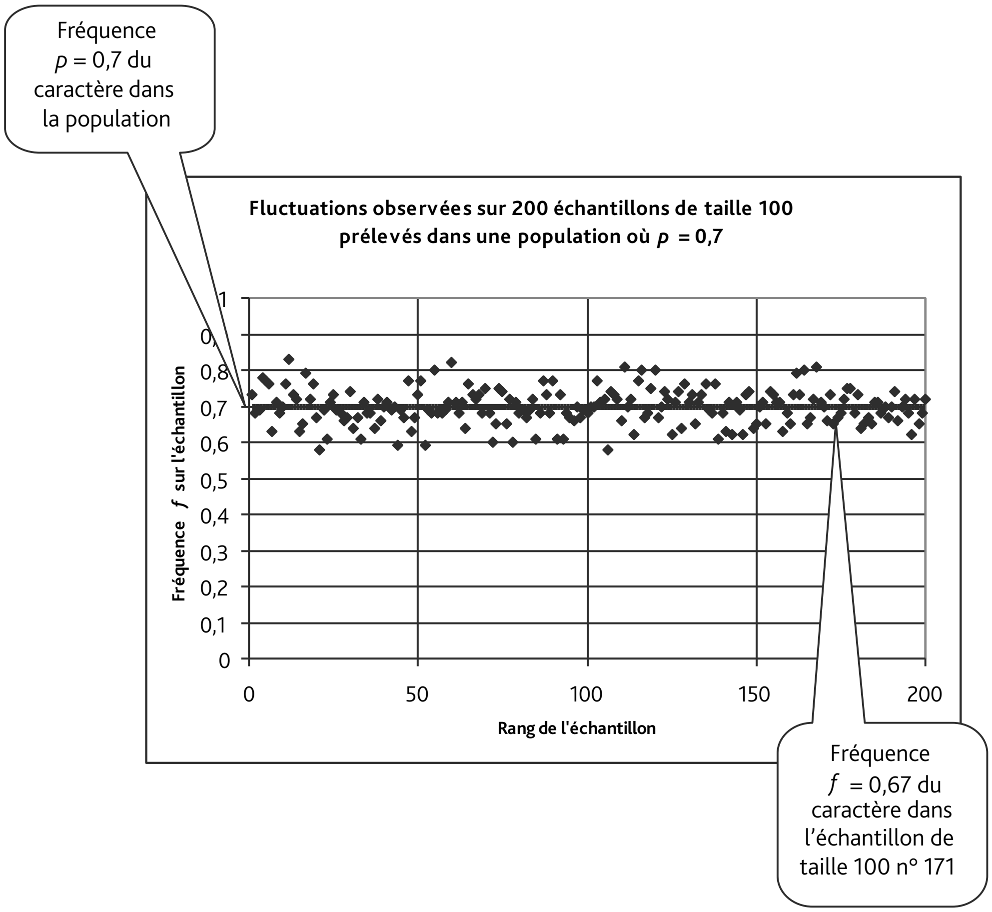
Dans ce chapitre, **on connaît la structure de l'urne**, c'est-à-dire que l'on connaît la valeur de p, et on étudie comment varient les valeurs de f sur les échantillons aléatoires de taille n fixée que l'on prélève. Cette situation peut sembler vaine, voire stupide. Il n'en est rien, comme le montrent les exemples. Très souvent en effet, la valeur de p, supposée connue, n'est qu'une hypothèse. Dans le cas de l'activité 3 par exemple (les naissances dans le village chinois), on suppose que $p = 0{,}5$. On observe, sous cette hypothèse, les variations de la fréquence f obtenue sur des échantillons de taille 20. On se prononce ensuite sur l'hypothèse que l'on a formulée.

3. Fluctuations d'une fréquence selon les échantillons

En seconde, on observe les fluctuations d'une fréquence selon les échantillons aléatoires de taille fixée n, prélevés dans une population où la fréquence du caractère étudié est p. Il s'agit de prendre conscience de la variabilité « naturelle » (due à l'effet du hasard) d'une fréquence, pour une taille d'échantillon donnée.

En première, on constatera (lorsque n est supérieur ou égal à 30, np et $n(1-p)$ supérieurs ou égaux à 5) que plus de 95 % des échantillons fournissent une fréquence f comprise dans l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Ainsi, plus l'échantillon est grand, moins la fréquence qu'il fournit fluctue, mais le gain en précision est en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ On a là une quantification de la « loi des grands nombres ».



Voici, sur l'image ci-dessus, une expérimentation de ce résultat, réalisée par simulation sur un tableur. La fréquence du caractère étudié sur la population est $p = 0{,}7$. On a prélevé 200 échantillons aléatoires de taille $n = 100$ chacun. On constate que l'immense majorité des fréquences f observées sur ces échantillons fluctue dans l'intervalle :

$$0{,}7-\frac{1}{\sqrt{100}};0{,}7+\frac{1}{\sqrt{100}} = 0{,}6;0{,}8.$$

Sur l'image, on constate que 8 échantillons sur les 200 fournissent une fréquence f en dehors de l'intervalle [0,6 ; 0,8], autrement dit, 96 % des échantillons ont fourni une fréquence f comprise dans l'intervalle $p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

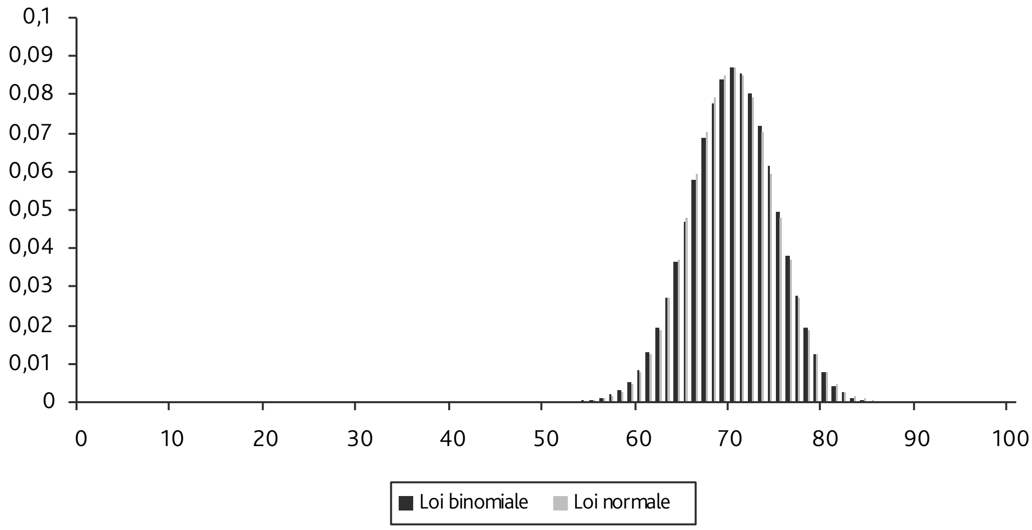
On peut, mathématiquement, justifier assez simplement cette observation.

Lorsqu'une urne contient une proportion p de boules rouges et que l'on prélève n boules avec remise dans cette urne, la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges obtenues (nombre de « succès ») sur cet échantillon de taille n suit la loi binomiale de paramètres n et p. On montre que l'espérance de cette **loi binomiale** vaut np et l'écart type $\sqrt{np(1-p)}$.

Si l'on s'intéresse non pas à l'effectif des boules rouges dans l'échantillon, mais à leur fréquence, il faut diviser par n les résultats précédents. On obtient que les échantillons de taille n fournissent une fréquence de boules rouges valant en moyenne $\frac{1}{n}\times np = p$ avec un écart type $\frac{1}{n}\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. C'est-à-dire que, sur un grand nombre de points comme ceux de l'image précédente, la valeur moyenne est $p = 0{,}7$ (on voit cette tendance moyenne sur le graphique) et leur dispersion se fait selon un écart type valant $\sqrt{\frac{0{,}7\times 0{,}3}{100}}\approx 0{,}046$.

Pour obtenir l'intervalle de fluctuation des fréquences, centré sur p, dans 95 % des cas, on utilise la loi normale (car il est plus simple de calculer avec la **loi normale** qu'avec la loi binomiale). On sait en effet que, sous certaines conditions (lorsque n est supérieur ou égal à 30, np et $n(1-p)$ supérieurs ou égaux à 5), l'histogramme correspondant à la distribution des résultats d'une loi binomiale est proche de la courbe en cloche de la loi de Gauss.

Comparaison de la distribution de la loi binomiale de paramètres $n = 100, p = 0,7$ avec la loi normale de même espérance et de même écart type



On sait que la loi normale a comme propriété qu'environ 95 % des observations se situent dans un intervalle de rayon deux écarts types autour de la moyenne (1,96 fois l'écart type pour être plus précis).
On pourra donc vérifier qu'environ 95 % des échantillons aléatoires de taille n fournissent une fréquence comprise dans l'intervalle :

$$p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} .$$

On peut donner une version simplifiée de cet intervalle (celle du programme de première professionnelle), en le majorant. La fonction $p \mapsto p(1-p)$ atteint son maximum pour $p = \frac{1}{2}$ donc, pour tout p, on a : $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

On en déduit que $1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, l'intervalle $p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ est inclus dans l'intervalle $p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}$, lequel contiendra donc, sur un grand nombre d'échantillons, plus de 95 % des fréquences observées.

 (livre élève pages 93 et 94)

25 J'utilise un logiciel (tableur)

Expérimenter les sondages à l'aide d'une simulation fournie

Voir fichier « 06_sondages_corrige.xls » ou « 06_sondages_corrige.ods ».

Le chef du gouvernement d'un pays lointain compte dans sa population 48 % d'opinions favorables. On suppose ce nombre inconnu et l'on interroge 1 000 personnes au hasard pour s'en faire une idée (on suppose qu'elles disent la vérité).

1. Simulation de quelques sondages

Ouvrir le fichier « 06_sondages.xls » ou « 06_sondages.ods ». Une feuille de calcul semblable à l'image d'écran ci-dessous apparaît, montrant la simulation d'un sondage de 1 000 personnes.

Appuyer sur la touche F9 pour simuler un autre sondage.

H5 | $f(x)$ Σ = | =NB.SI(B11:B1010;"favorable")/10

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	***Sondages de taille 1000***								
2									
3	Dans la population le chef du gouvernement compte			***48 %***	d'opinions favorables.				
4	On interroge 1000 personnes au hasard.								
5	La fréquence des personnes favorables au chef de gouvernement sur l'échantillon simulé est :							***49,1***	%
6	Appuyer sur la touche F9 pour prélever un autre échantillon.								
7									
8									
9									
10	Échantillon de 1000 personnes interrogées :								
11	personne n° 1	favorable							
12	personne n° 2	favorable							
13	personne n° 3	favorable							
14	personne n° 4	défavorable							

a. Quelle est la fréquence p d'opinions favorables dans la population ? $p = 0{,}48$.

b. Dans quelle plage de cellules se situent les réponses de l'échantillon ? De B11 à B 1010.

c. Dans quelle cellule est affichée la fréquence f d'opinions favorables dans l'échantillon ? H5.

d. Donner des exemples de fréquences d'opinions favorables pour cinq sondages simulés :

Par exemple, 46,2 ; 47,3 ; 45,9 ; 48,4 ; 50,2.

e. Bien qu'il y ait 48 % d'opinions favorables dans la population, un sondage peut-il donner une fréquence supérieure à 50 % ? Oui

2. Étude des fluctuations

On considère que pour un sondage de taille 1 000, on peut s'attendre à une fluctuation de plus ou moins 3 % autour de la fréquence inconnue que l'on cherche à estimer.

a. À quelle valeur basse et à quelle valeur haute, autour de 48 %, peut-on s'attendre ? basse : 45 % ; haute : 51 %.

b. En appuyant de nombreuses fois sur F9, vérifier que la plupart des sondages fournissent une fréquence comprise entre 45 % et 51 %.

Un sondage peut-il fournir un résultat en dehors de l'intervalle [45 % ; 51 %] ? Oui, mais très rarement.

J'utilise un logiciel (tableur)

Expérimenter une « preuve statistique »

Voir fichier « 06_partida_corrige.xls » ou « 06_partida_corrige.ods ».

En 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida, condamné à huit ans de prison, attaque le jugement au motif que la constitution des jurys est discriminante par rapport aux Américains d'origine mexicaine. Il fournit les statistiques suivantes : alors qu'environ 80 % de la population du comté est d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées dans des jurys les années précédentes, seulement 339 sont d'origine mexicaine.

1. Mise en place d'une simulation et observation des fluctuations

Dans cette question, on simule sur une feuille de tableur le prélèvement au hasard d'échantillons de taille 870 dans une population où 80 % est d'origine mexicaine.

a. La fonction ALEA() du tableur fournit un nombre décimal « au hasard » entre 0 et 1.

Entrer en A1 la formule = ALEA()+0,8 et faire plusieurs fois F9.

Entre quelles valeurs cette formule fournit-elle un nombre au hasard ? Entre 0,8 et 1,8.

b. La fonction ENT ne conserve que la partie devant la virgule d'un nombre positif.

Entrer maintenant en A1 la formule = ENT(ALEA()+0,8) et faire plusieurs fois F9.

Pourquoi l'affichage a 80 % de chances d'être 1 et 20 % de chances d'être 0 ? La longueur de [0,8 ; 1[est 0,2 celle de [1 ; 1,8] est 0,8.

Que peut symboliser le résultat 1 dans notre problème ? Un Américain d'origine mexicaine.

c. Pour constituer un échantillon de taille 870, effectuer les manipulations suivantes.

Recopier (pointeur de souris en forme de croix noire) vers le bas le contenu de la cellule A1 jusqu'à la ligne 870.

En cellule A871, entrer la formule = SOMME(A1:A870)/870.

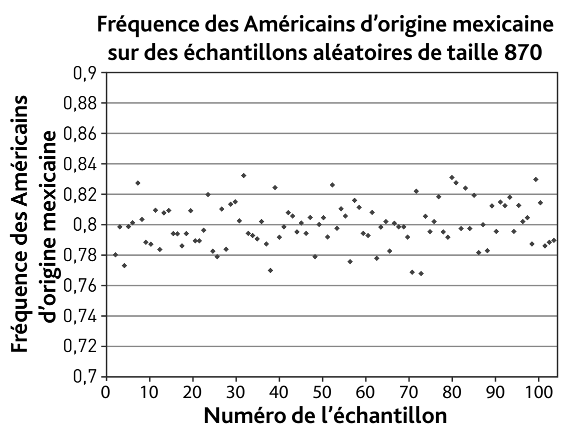
À quoi correspond le résultat affiché en cellule A871 ? La fréquence d'Américains d'origine mexicaine dans l'échantillon.

d. On souhaite représenter les résultats de 100 échantillons de taille 870.

Sélectionner les cellules de A1 à A871 puis recopier vers la droite jusqu'en colonne CV. Sélectionner la ligne 871 puis effectuer une représentation graphique en choisissant « nuage de points ». Appuyer sur F9 pour effectuer d'autres simulations.

Entre quelles valeurs fluctue l'immense majorité des fréquences d'Américains d'origine mexicaine obtenues sur vos échantillons aléatoires ?

Entre 0,76 et 0,84.



2. Application au cas du jury de Rodrigo Partida

a. Quelle est la fréquence des Américains d'origine mexicaine dans les jurys, selon les nombres cités par la défense de Partida ? $\frac{339}{870} \approx 0{,}39$

b. Pourquoi Partida a-t-il obtenu gain de cause (il sera rejugé) ? La fréquence observée, 0,39, n'est pas comprise entre 0,76 et 0,84.

A Appelez le professeur pour exposer votre argumentation.

Exercices & Problèmes

R *Exercices avec réponses en fin d'ouvrage.*

Exercices p. 97 à 99

1. QCM

a. On ne connaît pas à l'avance le nombre exact de « pile ». Il est presque impossible d'obtenir 100 « pile ».

b. Compte tenu des fluctuations, on ne peut pas suspecter la pièce.

c. La population est constituée de tous les élèves du lycée. La fréquence des élèves venant au lycée en transports en commun est $p = 0{,}4$ dans la population et $f = 0{,}36$ dans l'échantillon interrogé.

d. L'étendue des fréquences est 0,03.

e. La différence entre les deux fréquences sera probablement de moins de 6 %.

2. Vrai - Faux

a. Faux

b. Vrai

c. Vrai

d. Vrai

› Expérimenter la prise d'échantillons à l'aide de pièces ou de dés

3. a. On doit s'attendre à $p = 0{,}5$.
b. Pour obtenir f, on compte le nombre de « face » et on divise par 10. Il n'y a pas de raison d'avoir $f = p$.
c. Résultats variables, selon le hasard.

4. a. Par exemple :

Dé 1	Dé 2
1	6
5	2
2	5
2	5
3	5
5	6
1	5
1	1
6	4
6	1

b. Sur l'échantillon précédent, $f = 0{,}1$.
c. La fréquence varie.

› Expérimenter à l'aide d'une simulation

5. a. L'instruction =6*ALEA() fournit un nombre décimal au hasard dans l'intervalle [0 ; 6[.
b. Les résultats possibles de l'instruction =1+ENT(6*ALEA() sont 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
c. Le résultat est variable. Compter le nombre de 6 et diviser par 10.
d. Le résultat est variable. Compter le nombre de 6 et diviser par 10.

› Déterminer l'étendue des fréquences d'une série d'échantillons

6. L'étendue des fréquences est 0,05 – 0,02 = 0,03.

7. a.

Échantillon n°	1	2	3	4	5
Nombre de billes défectueuses	1	5	1	3	2
Fréquence de billes défectueuses	0,01	0,05	0,01	0,03	0,02

L'étendue de ces fréquences est 0,05 – 0,01 = 0,04.

b.

Échantillon n°	6	7	8	9	10
Nombre de billes défectueuses	37	39	43	38	47
Fréquence de billes défectueuses	0,037	0,039	0,043	0,038	0,047

L'étendue de ces fréquences est 0,047 – 0,037 = 0,01.
c. La série des échantillons qui fluctue le moins est celle des échantillons de taille 1 000.

8. 1. a. Par exemple : 0,1 ; 0 ; 0,1 ; 0,1 ; 0 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,1.
(Les résultats sont variables selon les simulations.)
b. Pour l'exemple précédent : 0,3 – 0 = 0,3.
2. a. L'étendue des fréquences pour les échantillons de taille 1 000 est beaucoup plus réduite que celle des échantillons de taille 10.
b. Les fréquences des échantillons de taille 1 000 fluctuent autour de la valeur 0,1.

3. Si le générateur de nombres aléatoires fonctionne correctement, la probabilité que le premier chiffre après la virgule soit un 0 vaut 0,1.

› Faire preuve d'esprit critique dans une situation aléatoire

9. On ne peut pas annoncer que Madame Y sera élue, car il n'y a pas de certitude.

10. a. On a $f_A = \dfrac{1}{12} \oplus 0,08$ et $f_B = \dfrac{3}{12} \oplus 0,25$
b. On a p = ≈ 0,17.
c. Des fréquences telles que f_A et f_B sont observées en grand nombre sur le graphique (alignements de points aux lignes 3 et 4).
d. Le classement des hôpitaux *A* et *B* n'est pas « significatif » car les fréquences observées dans ces deux hôpitaux peuvent facilement s'expliquer par le hasard (à partir de la même valeur de *p*).

11. a. Avec une incertitude de plus ou moins 3 %, on obtient, à partir de 18 %, l'intervalle [15 % ; 21 %] et, à partir de 14 %, l'intervalle [11 % ; 17 %].
b. Les deux fourchettes précédentes ayant une partie commune, elles ne permettent pas de prévoir l'ordre des candidats.
c. Les pourcentages obtenus lors de l'élection sont compris dans les fourchettes calculées au 2 : 16,18 % est compris dans l'intervalle [15 % ; 21 %] et 16,86 % est compris dans l'intervalle [11 % ; 17 %].

Problèmes p.99 et 100

› Problème 1

Défauts de peinture

1. a. La population est la production de capots de la journée.
La fréquence du défaut sur la population est $p = 0,2$.

b. La fréquence du défaut sur l'échantillon est
$f = \dfrac{9}{50} \approx 0,18.$

c. Tableau complété :

Échantillon n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de défauts	11	9	16	9	11	11	10	4
Fréquence des défauts	0,22	0,18	0,32	0,22	0,22	0,22	0,2	0,08

2. Compte tenu des résultats observés dans le tableau précédent (en particulier la fréquence de 32 % de défauts observée sur l'échantillon n° 3), on ne doit pas nécessairement conclure que la qualité a baissé.

Démarche d'investigation

› Problème 2

Démasquer un charlatan

1. Si le sourcier répond au hasard, il a une chance sur cinq de répondre correctement :
$p = \dfrac{1}{5} = 0,2.$

2. a. On a simulé 200 échantillons de taille 30.

b. De nombreux points sont situés en dessous de la droite horizontale correspondant à 0,25. Il n'est pas rare, en répondant au hasard, d'obtenir moins de 25 % de bonnes réponses.

c. Il est possible, même si on ne le voit pas sur ce graphique, d'obtenir 40 % de bonnes réponses en répondant au hasard, mais c'est très rare.

3. La fréquence des bonnes réponses du sourcier est $\dfrac{9}{30} = 0,3.$ Un résultat proche de 0,3 n'est pas rare sur le graphique, lorsqu'on répond au hasard. Il ne faut pas penser que le soucier possède un don.

› Problème 3

Santé et pesticides

1. On a $p = \dfrac{105}{205} \approx 0,512.$

2. a. Sur un échantillon de taille 227 extrait d'une population où $p = 0,512$, obtenir une fréquence de garçons de l'ordre de $f \approx 0,48$ est habituel (il y a beaucoup de points dans cette zone du graphique).

b. Sur un échantillon de taille 227 extrait d'une population où $p = 0,512$, obtenir une fréquence de garçons de l'ordre de $f \approx 0,6$ est très rare.

c. Sur un échantillon de taille 227 extrait d'une population où $p = 0,512$, obtenir une fréquence de garçons de l'ordre de $f \approx 0,56$ est rare.

3. a. La fréquence des garçons observée parmi les 227 enfants des personnes exposées aux pesticides est
$\dfrac{91}{227} \oplus 0,40.$
b. D'après le graphique, il s'agit d'une fréquence très rare dans des conditions habituelles. C'est inquiétant.

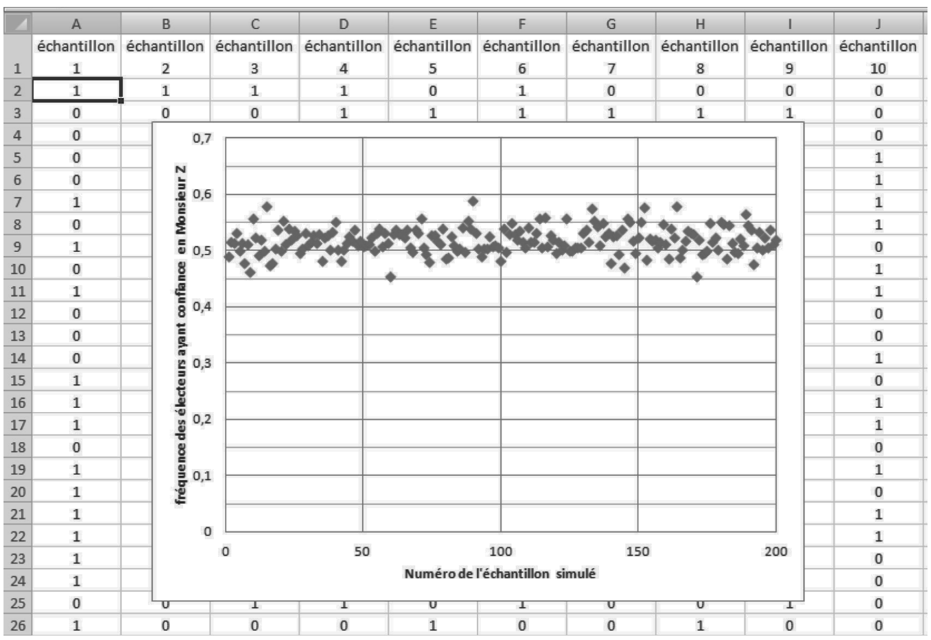
Je me teste

(livre élève pages 101 et 102)

EXERCICE 1 Question de confiance

Monsieur Z, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 500 électeurs au hasard et l'on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l'autre.

1 À l'aide d'un tableur, on a simulé 200 échantillons aléatoires de taille 500 extraits d'une population où la proportion de personnes ayant confiance en Monsieur Z est $p = 0{,}52$.



a. L'instruction ENT(ALEA()+0,52) affiche 1 dans 52 % des cas et 0 dans 48 % des cas. Interpréter cet affichage dans les termes du problème (confiance ou non en Monsieur Z).

1 signifie que la personne interrogée a confiance en monsieur Z ; 0 signifie que la personne n'a pas confiance en monsieur Z.

b. Le graphique montre les fréquences de « 1 » obtenues sur chacun des 200 échantillons de taille 500. Dans quel intervalle fluctuent ces fréquences ? (Donner le plus petit intervalle avec des bornes arrondies à 0,05).

[0,45 ; 0,6].

2 Sur les 500 électeurs interrogés au hasard, 223 déclarent avoir confiance en Monsieur Z. Peut-on considérer l'affirmation de Monsieur Z comme exacte ?

La fréquence observée est $\frac{223}{500} = 0{,}446$. Elle n'est pas dans l'intervalle [0,45 ; 0,6].

On ne peut pas considérer l'affirmation de monsieur Z comme exacte.

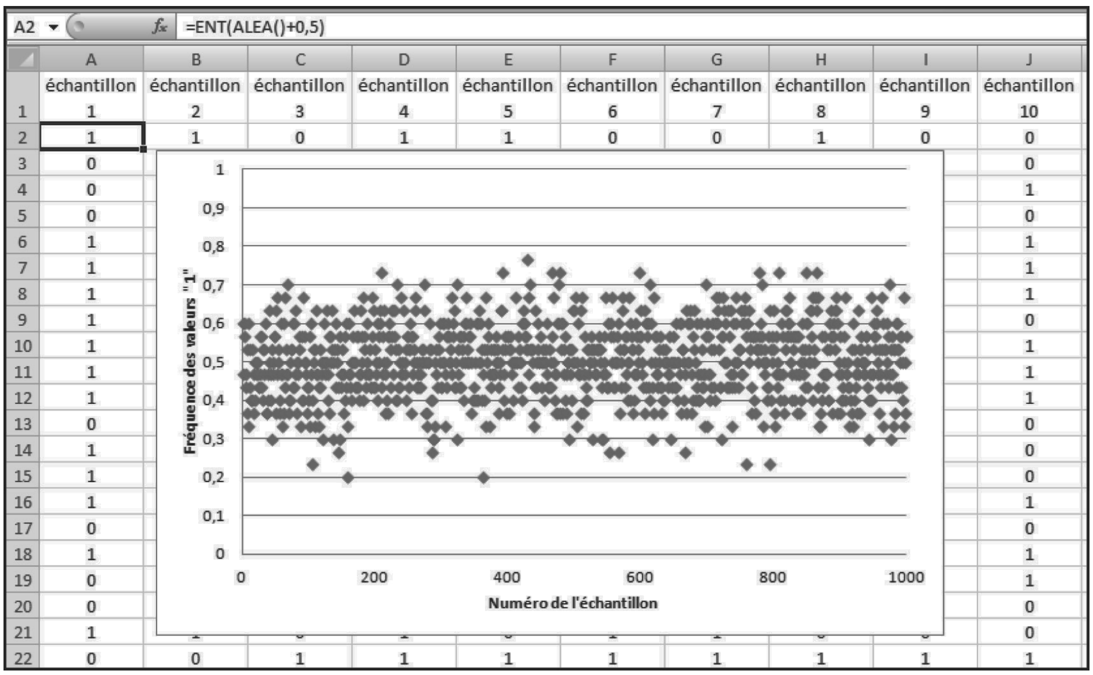
A

Appelez le professeur pour présenter votre argumentation.

EXERCICE 2 Indice de brunissement

Un laboratoire pharmaceutique fabrique une crème solaire dont il veut prouver l'efficacité. Pour cela, il engage 30 volontaires pris au hasard ; il leur enduit la moitié du dos avec sa crème et l'autre moitié sans crème. Il mesure ensuite l'indice de brunissement. On formule l'hypothèse : la crème n'apporte rien de plus que la protection naturelle. Sous cette hypothèse, on a autant de chance d'avoir un indice de noirceur avec crème supérieur à celui sans crème, que le contraire (on exclut le cas d'égalité).

1 À l'aide d'un tableur, on a simulé 1 000 échantillons aléatoires de taille 30 extraits d'une population comprenant autant d'individus dont l'indice de noirceur avec crème est supérieur à celui sans crème, que d'individus dont l'indice de noirceur avec crème est inférieur à celui sans crème.



a. L'instruction ENT(ALEA()+0,5) affiche 1 dans 50 % des cas et 0 dans 50 % des cas. Donner une interprétation de cet affichage dans les termes du problème (indice de noirceur avec crème supérieur ou non à celui sans crème).

1 signigie que l'indice de noirceur avec crème est supérieur et 0 signifie que cet indice n'est pas supérieur à celui sans crème.

b. Le graphique montre les fréquences de « 1 » obtenues sur chacun des 1 000 échantillons de taille 30. Dans quel intervalle fluctuent ces fréquences ? (Donner le plus petit intervalle avec des bornes arrondies à 0,1.)

[0,2 ; 0,8].

2 Sur les 30 personnes participant au test, 18 ont un indice de noirceur avec crème supérieur à celui sans crème. Que peut-on en conclure ?

$\frac{18}{30} = 0,6$ est dans l'intervalle précédent. L'efficacité de la crème n'est pas significatif.

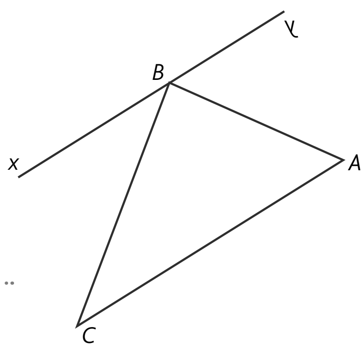
Appelez le professeur pour justifier votre conclusion.

26 Construction géométrique

(livre élève pages 103 et 104)

Capacités
- **Connaître la somme des angles d'un triangle**
- **Réaliser une construction géométrique**

1 Calculer la somme des angles d'un triangle



Soit *ABC* un triangle quelconque.

1. Mesurer au rapporteur les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

2. Calculer la somme des angles du triangle *ABC*.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$ ...... 56° .... + ... 87° .... + ... 37° .... = ... 180° ....

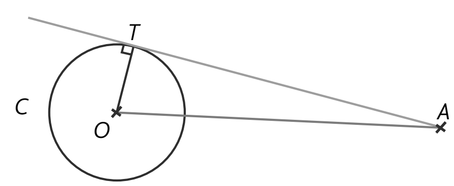
3. Tracer la droite (*xy*) parallèle à la droite (*AC*) passant par *B*.

D'après la propriété des angles alternes-internes, $\hat{A} =$ ..... $\widehat{yBA}$ .... et $\hat{C} =$ ... $\widehat{xBC}$ ....

4. Justifier pourquoi la somme $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ vaut 180° : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \widehat{yBA} + \hat{B} + \widehat{xBC} = \widehat{xBy}$ ....

Soit un angle plat valant 180°. ....

2 Construire une tangente à un cercle

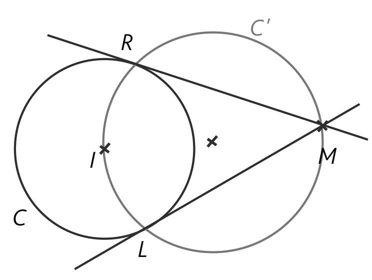


La droite (*AT*) est tangente en *T* au cercle *C* de centre *O*.
On a alors (*OT*) perpendiculaire à (*AT*).

1. a. Quelle est la nature du triangle *OAT* ? .... C'est un triangle rectangle en T. ....

b. Que représente le cercle de diamètre [*OA*] pour le triangle *OAT* ? C'est le cercle circonscrit au triangle OAT. ...

....



On donne un cercle *C* de centre *I* et un point *M* extérieur à ce cercle.
On veut construire une tangente à *C* passant par *M*.

2. a. Déduire, de la question **1.**, un programme de construction d'une telle tangente.

• Construire le cercle C' de diamètre [*IM*]. ....

• Nommer les points d'intersection entre *C* et *C'*. ....

• Tracer la droite passant par *M* et par un point d'intersection. ....

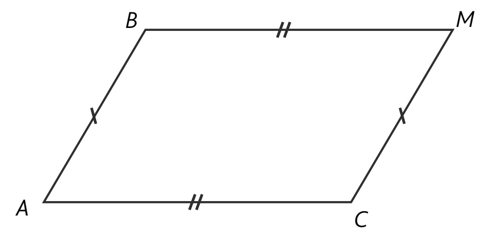
....

....

b. Construire une telle tangente. Combien y a-t-il de réponses possibles ? Il y a deux réponses possibles ....

car il y a deux points d'intersection *K* et *L*. ....

3 Écrire et appliquer un programme de construction géométrique

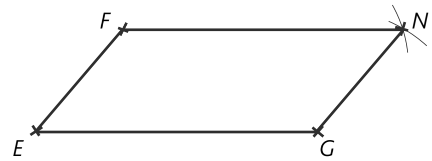


Le quadrilatère *ABMC* est un parallélogramme.
On a alors *AB* = *CM* et *AC* = *BM*.

1. a. *CM* = *AB*, on en déduit que le point *M* est sur le cercle de centre ..... *C* ..... et de rayon ..... *AB* .....

b. Déterminer un autre cercle sur lequel doit se trouver *M*.

Le cercle de centre *B* et de rayon *AC*.



Soient les trois points *E, F, G*. On veut construire le point *N* tel que *EFNG* soit un parallélogramme.

2. a. Déduire de ce qui précède un programme de construction pour le parallélogramme.

• Construire un arc de cercle de centre *G* et de rayon *EF*. • Construire un arc de cercle de centre *F* et de rayon *EG*.

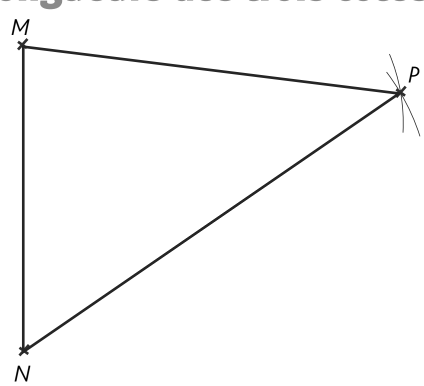
• Nommer *N* le point d'intersection et tracer le parallélogramme.

b. Construire le parallélogramme *EFNG*.

Comment tracer un triangle, connaissant les longueurs des trois côtés ?

Tracer un triangle *MNP* tel que *MN* = 4 cm ; *MP* = 5 cm ; *NP* = 6 cm.

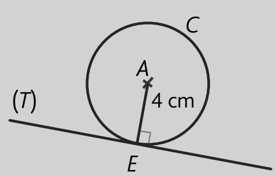
- Tracer l'un des côtés. On trace le segment *MN* = 4 cm.
- *P* se trouve à 5 cm de *M*, donc on trace l'arc de centre *M* et de rayon 5 cm.
- *P* se trouve à 6 cm de *N*, donc on trace l'arc de centre *N* et de rayon 6 cm.
- Ces arcs se coupent au point *P* qui est le troisième sommet.



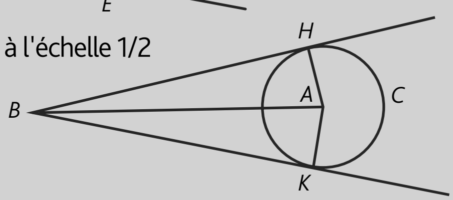
RÉPONSES
Exercices

1 Le troisième angle mesure 65°.

2

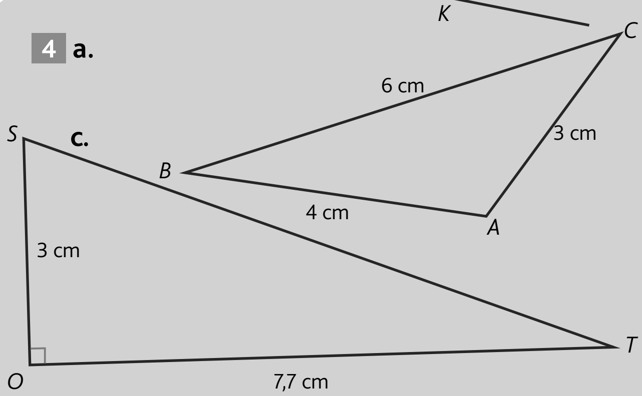


3 Figure à l'échelle 1/2

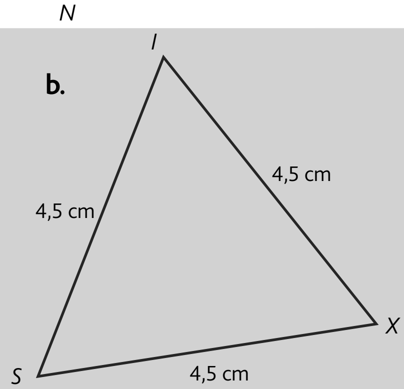


4 **a.**

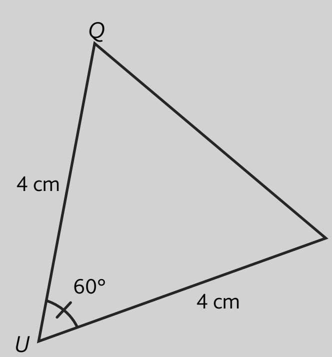
c.



b.



5 **a. b.** *QU* = 4 cm .
c. Le triangle *QUI* est équilatéral.
d. $\widehat{QIU} = 60°$ et $\widehat{UQI} = 60°$.
e. Cela confirme la réponse de la question **c.**



27 Droites remarquables d'un triangle

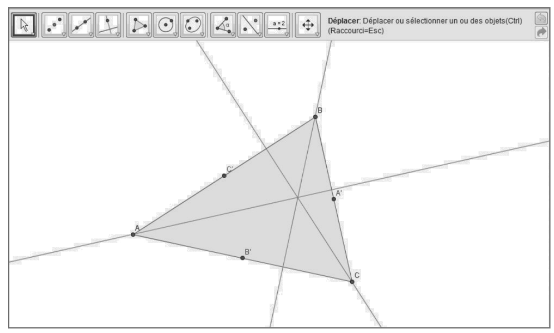
(livre élève pages 105 et 106)

Capacité
- Connaître les droites remarquables d'un triangle

Toutes les activités sont réalisées à l'aide du logiciel GeoGebra.

1 Étudier les hauteurs d'un triangle

Ouvrir le fichier « 07_hauteur.ggb ».



1. Rappeler la définition de la hauteur : c'est la droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé

2. Créer *H* le point d'intersection de deux hauteurs.

3. Déplacer *A*, *B* et *C*. Que peut-on dire des trois hauteurs du triangle *ABC* ? Elles se coupent toujours au même point *H*.

On admet que ce résultat est toujours vrai et on appelle *H* **l'orthocentre** du triangle *ABC*.

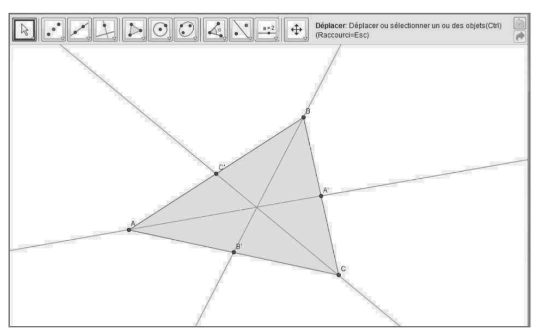
4. Déplacer *A*, *B* ou *C* pour avoir *H* à l'extérieur du triangle. Est-ce possible ? Oui

5. Faire passer la hauteur (*AH*) par *A'*. Quelle est alors la nature du triangle *ABC* ? Isocèle

6. Faire passer deux hauteurs par *A'* et *B'*. Quelle est alors la nature du triangle *ABC* ? Équilatéral

2 Étudier les médianes d'un triangle

Ouvrir le fichier « 07_mediane.ggb ».



1. Rappeler la définition de la médiane : c'est la droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé

2. Créer *G* le point d'intersection de deux médianes.

3. Déplacer *A*, *B* et *C*. Que peut-on dire des trois médianes du triangle *ABC* ? Elles se coupent toujours au même point *G*.

On admet que ce résultat est toujours vrai et on appelle *G* **le centre de gravité** du triangle *ABC*.

4. Déplacer *A*, *B* ou *C* pour avoir *G* à l'extérieur du triangle. Est-ce possible ? Non.

3 Étudier les médiatrices d'un triangle

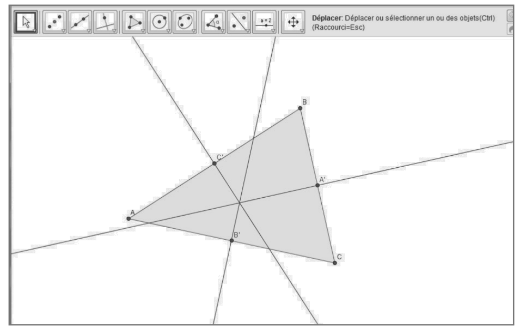
Ouvrir le fichier « 07_mediatrice.ggb ».

1. a. Rappeler la définition de la médiatrice : c'est la droite perpendiculaire à un côté en son milieu.

b. Créer O le point d'intersection de deux médiatrices.
Tracer le cercle de centre O passant par A.

c. Que peut-on dire du cercle de centre O passant par A ? Ils passe aussi par B et C.

d. Déplacer A, B et C. Que peut-on dire des trois médiatrices du triangle ABC ? Elles se coupent toujours au même point.



On admet que ces résultats sont toujours vrais et on appelle O le **centre du cercle circonscrit** au triangle ABC.

2. a. Déplacer A pour avoir O à l'extérieur du triangle. Est-ce possible ? Oui.

b. Que peut-on dire des angles du triangle ABC ? Un des angles est obtu.

c. Déplacer A pour avoir $\widehat{ABC} = 90°$. Le point O se situe au milieu de [AC] (hypoténuse).

d. Déplacer A pour que la médiatrice de [AC] passe par B. Le triangle ABC est un triangle isocèle.

e. Faire passer les trois médiatrices par les trois sommets. Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

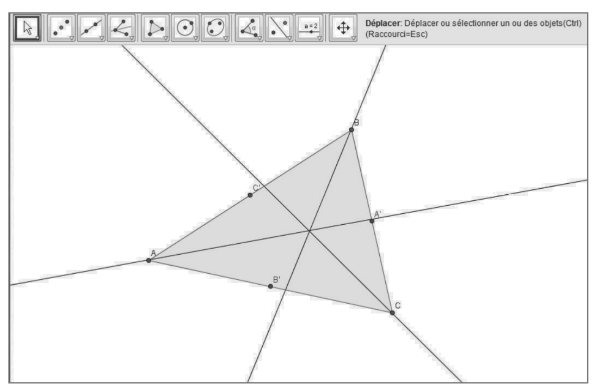
4 Étudier les bissectrices d'un triangle

Ouvrir le fichier « 07_bissectrice.ggb ».

1. a. Rappeler la définition de la bissectrice : c'est la demi-droite passant par le sommet d'un angle et qui le partage en deux angles égaux.

b. Créer I le point d'intersection de deux bissectrices.

c. Déplacer A, B et C. Que peut-on dire des trois bissectrices du triangle ABC ? Elles se coupent toujours au même point I.



On admet que ce résultat est toujours vrai.

2. a. Déplacer A, B et C pour avoir I à l'extérieur du triangle.
Est-ce possible ? Non

b. Tracer les perpendiculaires aux trois côtés du triangle ABC issues de I.

c. Nommer ces trois points d'intersection J, K et L.

d. Tracer le cercle de centre I et passant par J ou K ou L. Que constate-t-on ? Qu'il passe aussi par les 2 autres points.

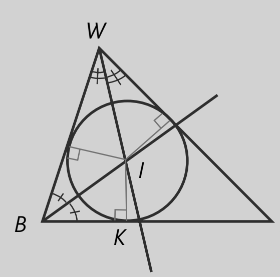
On appelle I le **centre du cercle inscrit** dans le triangle ABC.

Exercices

RÉPONSES

1 Graphiquement, on trace deux médiatrices du triangle RAT, puis on mesure la distance OR. En fonction de la précision, on trouve $OR \approx 3{,}8$ cm.

2 Graphiquement, on trace deux bissectrices du triangle WEB, puis on mesure la distance IK. En fonction de la précision, on trouve $IK \approx 3{,}1$ cm.



28 Le théorème de Pythagore et sa réciproque

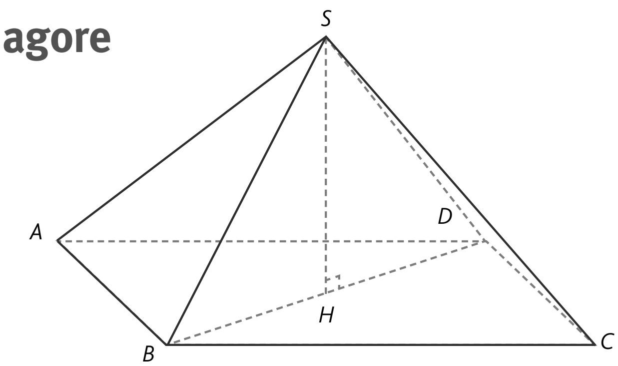
Capacité
- Connaître et utiliser la relation de Pythagore et sa réciproque

(livre élève pages 107 et 108)

1 Appliquer le théorème de Pythagore

Hauteur de la pyramide de Khéops

La pyramide de Khéops, près du Caire, en Égypte a la forme d'une pyramide régulière à base carrée de côté 232 m, dont les arêtes au sommet mesurent 220 m. On veut connaître la hauteur *SH* de cette pyramide.



1. Quelle est la nature du triangle *BCD* ? *BCD* est un triangle rectangle.

2. Écrire la relation de Pythagore dans le triangle *BCD* : $BD^2 = BC^2 + CD^2$

Calculer *BD* : $BD = \sqrt{232^2 + 232^2} = 232 \times \sqrt{2}$ $BD = 328{,}1$ m

3. En déduire *BH* : $BH = \dfrac{BD}{2} = 116\sqrt{2} \simeq 164{,}05$ m

Le triangle *SBH* est rectangle en *H*.

4. Calculer *SH* dans le triangle *SBH*. Arrondir le résultat au dixième :

$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{220^2 - 2 \times 116^2}$

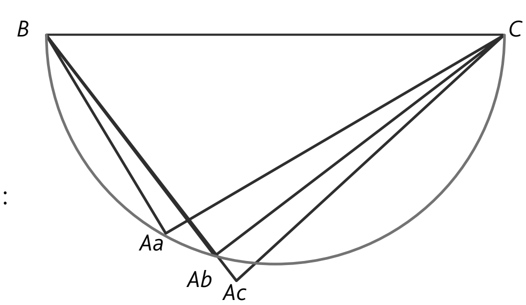
$SH \simeq 146{,}6$ m

2 Appliquer la réciproque du théorème de Pythagore

Soit *ABC* un triangle tel que *BC* = 6 cm et *AC* = 4,8 cm.

1. Construire le triangle *ABC* pour chacun des cas suivants :

a. *AB* = 3 cm ; **b.** *AB* = 3,6 cm ; **c.** *AB* = 4 cm.



2. Compléter le tableau, à l'exception de l'avant-dernière colonne :

	AB	*AC*	*BC*	AB^2	AC^2	AB^2+AC^2	≠ ou =	BC^2
Triangle **a.**	3	4,8	6	9	23,04	32,04	≠	36
Triangle **b.**	3,6	4,8	6	12,96	23,04	36	=	36
Triangle **c.**	4	4,8	6	16	23,04	39,04	≠	36

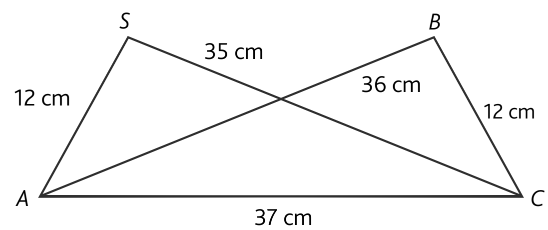
3. Comparer BC^2 et $AB^2 + AC^2$. Puis compléter l'avant-dernière colonne du tableau.

4. Tracer le cercle de diamètre [BC]. Quel triangle semble rectangle ? Le triangle **b.**

5. Est-ce conforme avec l'égalité trouvée dans le tableau ? Oui.

Comment reconnaître si un triangle est rectangle à partir des longueurs de ses côtés ?

Parmi les deux triangles *BAC* et *SAC* ci-contre, un seul est un triangle rectangle. Lequel ?



- Pour cela, on peut utiliser la réciproque de la propriété de Pythagore.

Pour le triangle *BAC*	Pour le triangle *SAC*
■ On détermine le plus grand côté.	
Le plus grand côté est [AC]	Le grand plus côté est [AC]
■ On l'élève au carré.	
$AC^2 = 37^2 = 1\,369$	$AC^2 = 37^2 = 1\,369$
■ On additionne les carrés des deux autres côtés.	
$AB^2 + BC^2 = 36^2 + 12^2$	$AS^2 + SC^2 = 12^2 + 35^2$
$AB^2 + BC^2 = 1\,440$	$AS^2 + SC^2 = 1\,369$
■ On compare ces deux résultats en entourant le symbole correct.	
$AC^2 \substack{\neq \\ =} AB^2 + BC^2$	$AC^2 \substack{\neq \\ =} AS^2 + SC^2$
■ On conclut.	
Le triangle *ABC* ~~est~~ n'est pas rectangle, car la propriété de Pythagore ~~est~~ n'est pas vérifiée.	La réciproque de la propriété de Pythagore s'applique. Donc le triangle *SAC* est rectangle en 5 et [AC] est l'hypoténuse.

Exercices

RÉPONSES

1 Compléter :

a. $DE^2 = DF^2 + EF^2$
donc le triangle *DEF* est rectangle en *F*.

b. $EU^2 = LE^2 + LU^2$
donc le triangle *LEU* est rectangle en *L*.

c. Le triangle *CAP* est rectangle en *A*,
Donc, $CP^2 = CA^2 + AP^2$.

d. Le triangle *NOM* est rectangle en *M*.
Donc, $ON^2 = OM^2 + NM^2$.

2 **a.** $SI^2 = SX^2 + IX^2$.
b. $FN^2 = FU^2 + NU^2$.

3 $BC^2 = 10{,}5^2 = 110{,}25$ et $AB^2 + AC^2 = 6{,}3^2 + 8{,}4^2 = 110{,}25$. $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Donc la réciproque du théorème de Pythagore s'applique. Le triangle *ABC* est rectangle en *A*.

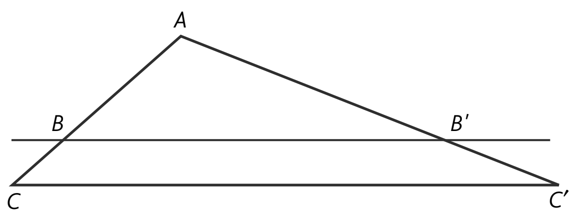
29 Le théorème de Thalès dans le triangle

(livre élève pages 109 et 110)

Capacité
- Connaître et utiliser le théorème de Thalès et sa réciproque

1 Appliquer le théorème de Thalès

Thalès de Milet (VIe siècle avant J.-C) serait le premier mathématicien de l'histoire, il était également philosophe. Il aurait mesuré, lors d'un voyage en Egypte, la hauteur de la pyramide de Kheops grâce à la propriété suivante.



1. Mesurer sur la figure les longueurs AC, AC' et CC' : $AC =$ ……3…… cm ; $AC' =$ ……5,4…… cm ; $CC' =$ ……7,2…… cm.

2. Placer le point B du segment $[AC]$ tel que $AB = 2$ cm.

3. Tracer la parallèle à (CC') passant par B, elle coupe $[AC]$ en B'.

4. Mesurer les côtés AB' et BB' du triangle ABB' : $AB' =$ ……3,6…… cm ; $BB' =$ ……4,8…… cm.

5. Écrire les rapports suivants sous forme d'une fraction simplifiée :

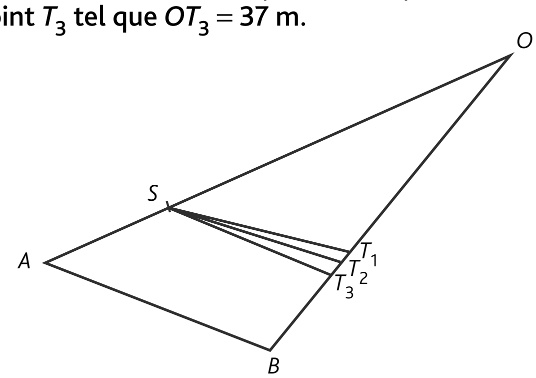
$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$; $\frac{AB'}{AC'} = \frac{3,6}{5,4} = \frac{2}{3}$; $\frac{BB'}{CC'} = \frac{4,8}{7,2} = \frac{2}{3}$.

6. Comparer ces trois rapports.

On a l'égalité : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$

2 Appliquer la réciproque du théorème de Thalès

Un champ est représenté ci-dessous à l'échelle 1/1 000. Avec : $OA = 70$ m ; $OB = 50$ m ; $OS = 49$ m ; $AB = 32,5$ m. On souhaite partager ce champ en deux parties à l'aide d'une séparation $[ST]$ tel que (ST) // (AB) et T appartient à $[OB]$. Sur $[OB]$, Malika place un point T_1 tel que $OT_1 = 33$ m, Sophia place un point T_2 tel que $OT_2 = 35$ m et Lucie place un point T_3 tel que $OT_3 = 37$ m.



1. Sur le schéma, par rapport à O, T_1 sera à ……3,3…… cm ; T_2 sera à ……3,5…… cm, et T_3 sera à ……3,7…… cm.

2. Placer les points T_1, T_2 et T_3 comme proposé, puis tracer les segments $[ST_1]$, $[ST_2]$, $[ST_3]$.

3. Déterminer, à l'aide d'une règle et d'une équerre, quelle droite semble parallèle à (AB) : (ST_2)

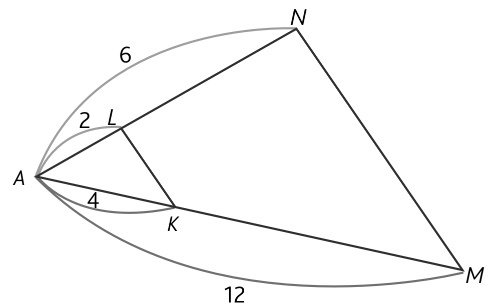
4. Calculer le rapport $\frac{OS}{OA} = \frac{49}{70} = 0{,}7$

5. Calculer les rapports $\frac{OT_1}{OB} = \frac{33}{50} = 0{,}66$; $\frac{OT_2}{OB} = \frac{35}{50} = 0{,}7$; $\frac{OT_3}{OB} = \frac{37}{50} = 0{,}74$

6. En appliquant la réciproque du théorème de Thalès que vous avez déjà étudiée, pouvez-vous dire avec certitude qui a placé le point T correctement ? Sophie car $\frac{OT_2}{OB} = \frac{OS}{OA}$

Comment utiliser la réciproque du théorème de Thalès ?

Dans la figure ci-dessous, montrer que les droites (KL) et (MN) sont parallèles.



- Décrire l'alignement des points sur chaque droite. Les points A, K et M sont alignés dans le même ordre que les points A, L et N.
- Calculer les rapports permettant d'appliquer la réciproque du théorème de Thalès.
  $\frac{AK}{AM} = \frac{4}{12} = 0{,}33$ et $\frac{AL}{AN} = \frac{2}{6} = 0{,}33$
- Constater l'égalité ou non des rapports pour conclure.
  $\frac{AK}{AM} = \frac{AL}{AN}$.
  Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (KL) et (MN) sont ~~ne sont pas~~ parallèles.

RÉPONSES

Exercices

1

a. $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$ **b.** $\frac{ON}{OR} = \frac{OM}{OS} = \frac{NM}{RS}$

2 Les conditions sont réunies pour utiliser le théorème de Thalès.

$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. D'où AB' = $AB' = \frac{AC' \times AB}{AC}$

$AB' = \frac{15 \times 8}{12} = 10 = 10$ cm.

3 Les segments [AK] et [AL] se coupent en A.

$$\left.\begin{aligned} \frac{AM}{AK} &= \frac{50}{80} = \frac{5}{8} \\ \frac{AN}{AL} &= \frac{40}{64} = \frac{5}{8} \end{aligned}\right\} \text{donc } \frac{AM}{AK} = \frac{AN}{AL}$$

Les points A, M, K et A, N, L sont dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (KL) sont parallèles.

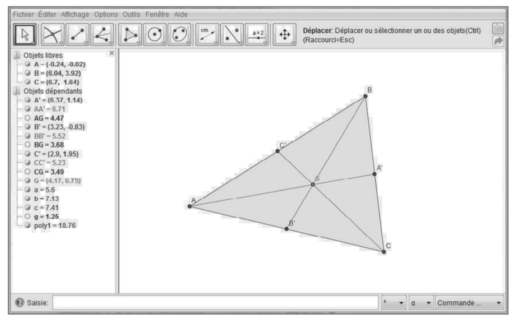
30 J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Utiliser une propriété des médianes du triangle

1. Établissement de la propriété

Voir fichier « 07_propriété_medianes_corrige.ggb ».

Ouvrir le fichier « 07_proprietes_medianes.ggb ».



a. Calcul du rapport des longueurs $\frac{AG}{AA'}$.

- **En utilisant la zone de saisie,** Saisie: kA=AG/AA' **taper : kA=AG/AA'.**
  La valeur se lit dans la "Fenêtre Algèbre", à gauche.
- **Calculer de même kB le rapport** $\frac{BG}{BB'}$ **et kC le rapport** $\frac{CG}{CC'}$.

b. Compléter : kA = 0,67, kB = 0,67 et kC = 0,67.

c. Quelle conjecture peut-on faire à propos des rapports kA, kB et kC ?

Les rapports *kA*, *kB* et *kC* sont égaux.

- **Déplacer *A*, *B* et *C* et observer les variations de *kA*, *kB* et *kC*.**

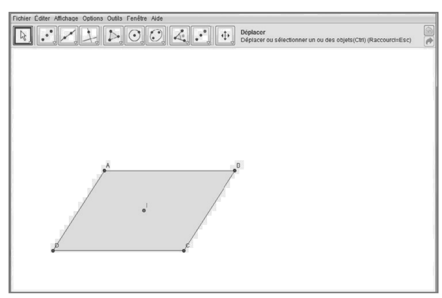
d. Que constate-t-on ?

Les rapports *kA*, *kB* et *kC* ne varient pas. Ils valent 0,67.

On peut démontrer que *G* se situe aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.

2. Application

Voir fichier « 07_application_medianes_corrigé.ggb ».



Soit *ABCD* un parallélogramme et *E* le symétrique de *D* par rapport à *B*.
Nous allons chercher quel est le centre de gravité du triangle *ACE*.

Ouvrir le fichier « 07_application_medianes.ggb ».

Le centre *I* du parallélogramme est déjà placé.

a. ■ **Construire le point *E* symétrique de *D* par rapport à *B*.**

- **Construire en rouge le triangle *ACE*.**

b. En vous aidant de la propriété vue en partie **1.**, déterminer le centre de gravité du triangle *ACE*.

Le point B est le centre de gravité du triangle *ACE*.

$BD = BE$ par construction. $IB = \frac{1}{2}BD$. Donc $EB = \frac{2}{3}EI$.

- **Si besoin d'une autre aide, tracer le segment [*IE*].**

J'utilise un logiciel (GeoGebra)

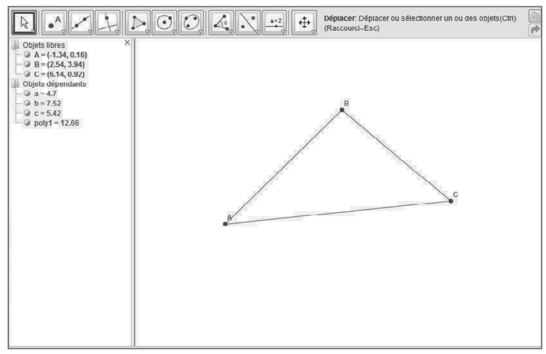
Faire des conjectures

Dans les problèmes suivants, à l'aide du logiciel GeoGebra, nous allons établir des conjectures et les démontrer par un raisonnement.

1. Relation liant deux longueurs

Voir fichier « 07_thales1_corrige.ggb ».

Ouvrir le fichier « **07_thales1.ggb** ».



a. ■ **Placer le point *I* milieu de [*AB*] et le point *J* milieu de [*BC*]**

- **Tracer le segment [*IJ*] et placer le point *K* milieu de [*IJ*].**
- **Tracer la droite (*AK*).**
- **Créer le point *L* intersection des droites (*AK*) et (*BC*).**
- **Afficher les longueurs des segments [*LJ*] et [*LC*].**
- **Déplacer les sommets du triangle *ABC*.**

b. Y-a-t-il une relation qui lie les longueurs *LJ* et *LC* ? Oui $LC = 4 \times LJ$.

c. Établir par un raisonnement cette relation.

D'après le théorème de Thalès dans *ABC*, $\frac{IJ}{AC} = \frac{BI}{BA} = \frac{1}{2}$.

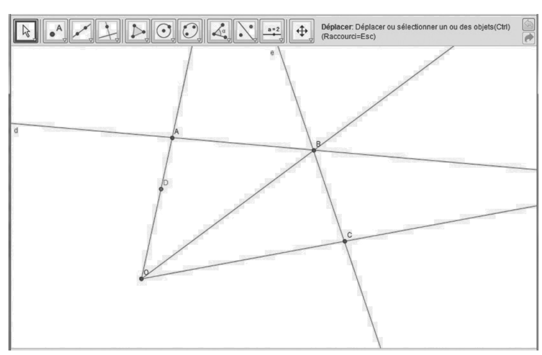
$KJ = \frac{1}{2}IJ$. D'où $KJ = \frac{AC}{4}$

D'après le théorème de Thalès dans *ALC*, $\frac{LJ}{LC} = \frac{KJ}{AC} = \frac{1}{4}$. D'où $LC = 4 \times LJ$.

2. Droites parallèles

Voir fichier « 07_thales2_corrige.ggb ».

Ouvrir le fichier « **07_thales2.ggb** ».



a. ■ **Tracer la parallèle à (*AB*) passant par *D*. La nommer d_1.**

- **Créer le point *E* intersection des droites (d_1) et (*OB*).**
- **Tracer la parallèle à (*BC*) passant par *E*. La nommer d_2.**
- **Créer le point *F* intersection des droites (d_2) et (*OC*).**
- **Tracer les droites (*AC*) et (*DF*). Les mettre dans une couleur différente.**
- **Déplacer les points *A*, *B*, *C* ou *D* et observer les droites (*AC*) et (*DF*).**

b. Quelle conjecture peut-on faire à propos des droites (*AC*) et (*DF*) ?

Les droites (*AC*) et (*DF*) semblent parallèles.

c. Justifier par un raisonnement cette conjecture.

D'après le théorème de Thalès dans *AOB*, on a $\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB}$. Dans *OBC*, on peut écrire $\frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC}$. Soit $\frac{OD}{OA} = \frac{OF}{OC}$.

O, *D*, *A* et *O*, *F*, *C* sont alignés dans le même ordre. La réciproque de Thalès permet de conclure (*DF*)//(*AC*).

Exercices & Problèmes

R *Exercices avec réponses en fin d'ouvrage.* *Exercices plus difficiles.*

Exercices p. 115 à 117

1. QCM

a. 2 **b.** la médiatrice de ce segment

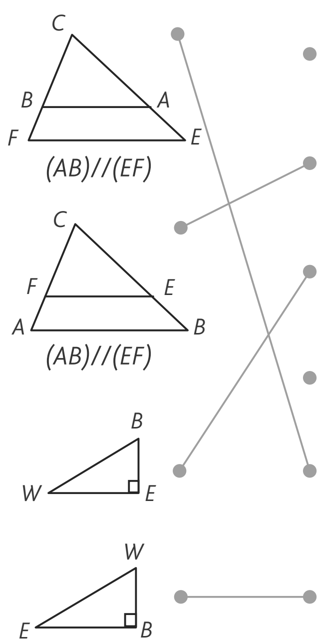
c. 2 **d.** *F*

e. 7,4 **f.** Vrai

2. Phrase à trous

Pour construire un ..rectangle..... connaissant un côté ($AD = 3$ cm) et la longueur de ses diagonales..... ($AC = BD = 6$ cm) il faut :
- Tracer un ...segment [AD] . de ...3 cm..... .
- Construire la perpendiculaire (d) en ....A..... à (AD) et la .perpendiculaire. (d') en D à (AD).
- Prendre une ouverture de compas de ..6 cm...... . Tracer un ...arc de cercle.. de centre A qui coupe (d') en C et un arc de cercle de centre D qui coupe ...(d). en B.

3. Associer



$\frac{CA}{CF} = \frac{CE}{CB}$

$\frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CB}$

$WB^2 = WE^2 + EB^2$

$EB^2 = WE^2 + WB^2$

$\frac{CB}{CF} = \frac{AB}{FE}$

$WE^2 = EB^2 + WB^2$

› Déterminer la mesure d'un angle

4. a. $\widehat{BCA} = 30°$; $\widehat{DAC} = 30°$; $\widehat{BDA} = 60°$.

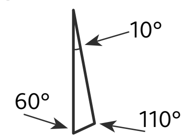
b. Le triangle ACD est isocèle et le triangle ABD est équilatéral.

5. Logo 1.

a. Chaque triangle est un triangle isocèle, car il a deux côtés de même longueur correspondant à un rayon.

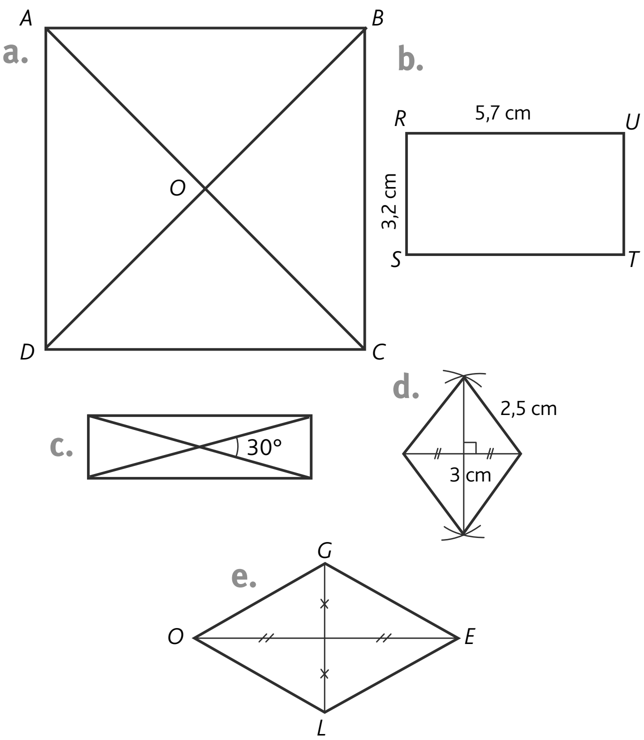
b. Chaque triangle possède deux angles de 54° et un angle au sommet O de 72°.

c. Les deux autres angles valent 60° et 110°.

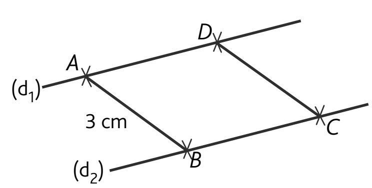


› Réaliser une construction géométrique

6. Figures faites à l'échelle ½

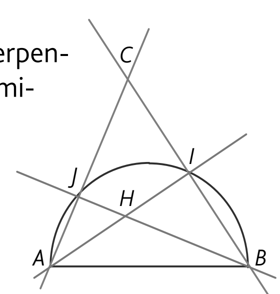


7. a. et **b.**



8.

a. Les droites (AC) et (BJ) sont perpendiculaires. Le point J est sur le demi-cercle de diamètre [AB], donc le triangle AJB est un triangle rectangle en J : l'angle $\widehat{AJB} = 90°$. Donc (AJ) ⊥ (BJ). J est sur la droite (AC) par construction, donc (AC) ⊥ (BJ).

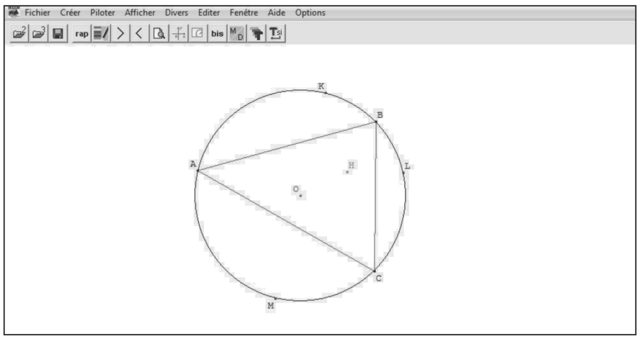


b. Raisonnement identique à **a.** Les droites (BC) et (BI) sont perpendiculaires. Le point I est sur le demi-cercle de diamètre $[AB]$, donc le triangle AIB est un triangle rectangle en I : l'angle $\widehat{AIB} = 90°$.
Donc $(AI) \perp (BI)$. I est sur la droite (BC) par construction, donc $(BC) \perp (AI)$.

c. H est l'orthocentre du triangle ABC, puisque c'est le point d'intersection de deux hauteurs.

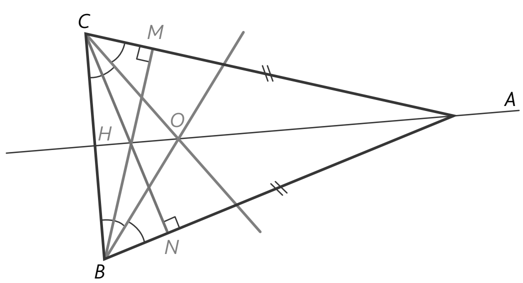
d. (CH) est la troisième hauteur du triangle ABC. Donc les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires.

9. a. Voir fichier **« 07_exo9_corrige.g2w »**.



b. Les points K, L et M sont aussi sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

10. a. et **c.**



b. Le triangle OBC est un triangle isocèle.
Les angles $\widehat{OCB}$ et $\widehat{OBC}$ sont égaux.
On a $\widehat{B} = \widehat{C}$ et $\widehat{OCB} = \frac{1}{2}\widehat{C}$ et $\widehat{OBC} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ .Donc $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$.

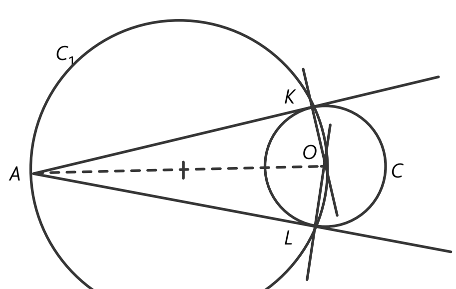
d. La droite (AH) est la médiatrice du segment $[BC]$. C'est également la hauteur du triangle issue de A.

e. On a $\widehat{BCH} = 180° - \widehat{N} - \widehat{B} = 180° - 90° - \widehat{B} = 90° - \widehat{B}$

On a $\widehat{CBH} = 180° - \widehat{M} - \widehat{C} = 180° - 90° - \widehat{C} = 90° - \widehat{C}$

Or, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont égaux. Donc $\widehat{BCH} = \widehat{CBH}$.
Le triangle BHC est bien isocèle.

11. a.



b. AOK est un triangle rectangle en K, car il est inscrit dans un cercle dont le diamètre $[OA]$ est l'hypoténuse. Donc $(OK) \perp (AK)$.

c. AOL est un triangle rectangle en L, car il est inscrit dans un cercle dont le diamètre $[OA]$ est l'hypoténuse. Donc $(OL) \perp (AL)$.

d. La droite (AK) et le rayon $[OK]$ sont perpendiculaires d'après **b.**, et (AK) n'a qu'un seul point commun K avec le cercle C. Donc (AK) est tangente à C.
La droite (AL) et le rayon $[OL]$ sont perpendiculaires d'après **c.**, et (AL) n'a qu'un seul point commun L avec le cercle C. Donc (AL) est tangente à C.

› Utiliser le théorème et la réciproque du théorème de Pythagore

12. a. $IE = \sqrt{182{,}25}$; $EI = 13{,}5$.

b. $HA = 2835$; $HA = 16{,}8$.

c. $QU = \sqrt{39}$; $QU = 6{,}2$.

13. a. On applique le théorème de Pythagore :
$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. D'où $d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

b. Tableau complété :

a	17,9	34,6	**38,9**	66	**21,9**
d	**25,3**	**48,9**	55	**93,3**	31

14. Triangle PAC : comme $PC^2 = PA^2 + AC^2$, la réciproque de la propriété de Pythagore s'applique.
Donc le triangle POC est rectangle en O.
Triangle BUS : Comme $BS^2 \neq BU^2 + US^2$, la réciproque de la propriété de Pythagore ne s'applique pas.
Donc le triangle BUS n'est rectangle

15. a. $AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ cm.

$BC = CH + HB$. Or, $HB = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = \sqrt{2{,}25}$

$= 1{,}5$ cm. Donc $BC = 4{,}5$ cm.

b. $BC^2 = 4{,}5^2 = 20{,}25$ et $AC^2 + AB^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + 2{,}5^2$

$= 19{,}25$. $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$. Donc la réciproque du théorème de Pythagore n'est pas vérifiée. Le triangle ABC n'est pas rectangle.

› Utiliser le théorème et la réciproque du théorème de Thalès

16. Pour chaque configuration, les conditions sont réunies pour utiliser le théorème de Thalès.

a. $\frac{AC}{AJ} = \frac{BC}{IJ}$; $\frac{4}{7{,}5} = \frac{3{,}2}{x}$.

$4 \times x = 3{,}2 \times 7{,}5$. D'où $x = \frac{3{,}2 \times 7{,}5}{4}$; $x = 6$.

b. $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{MN}{BC}$; $\dfrac{10}{12}=\dfrac{x}{8}$. $10\times 8=12\times x$.

D'où $x=\dfrac{10\times 8}{12}=\dfrac{80}{12}=\dfrac{20}{3}$; $x\approx 6{,}67$.

c. $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$; $\dfrac{10}{16}=\dfrac{12}{x}$. $10\times x=12\times 16$.

D'où $x=\dfrac{12\times 16}{10}$; $x=19{,}2$.

d. $\dfrac{AI}{AB}=\dfrac{AJ}{AC}$. $AB=AI+BI=10+2=12$.

$AJ=AC-CJ=16-x$. $\dfrac{10}{12}=\dfrac{16-x}{16}$; $10\times 16=12\times(16-x)$.

$10\times 16=12\times 16-12\times x$; $12\times x=12\times 16-10\times 16$.

$12\times x=32$; $x=\dfrac{32}{12}=\dfrac{8}{3}$; $x\approx 2{,}67$.

17. a. Les segments [*KM*] et [*LN*] se coupent en *A*.

$\dfrac{AM}{AK}=\dfrac{26{,}25}{15}=\dfrac{7}{4}$
$\dfrac{AN}{AL}=\dfrac{21}{12}=\dfrac{7}{4}$ donc $\dfrac{AM}{AK}=\dfrac{AN}{AL}$.

Les points *K*, *A*, *M* et *L*, *A*, *N* sont dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (*MN*) et (*KL*) sont parallèles.

b. Les segments [*AM*] et [*AN*] se coupent en *A*.

$\dfrac{AK}{AM}=\dfrac{40}{52}=\dfrac{10}{13}$
$\dfrac{AL}{AN}=\dfrac{30}{40}=\dfrac{3}{4}$ donc $\dfrac{AK}{AM}\uparrow\dfrac{AL}{AN}$

Les points *A*, *K*, *M* et *A*, *N*, *L* sont dans le même ordre, mais les rapports sont différents. Donc les droites (*MN*) et (*KL*) ne sont pas parallèles.

Problèmes p. 117 et 118

› Problème 1

D est le sommet principal du triangle isocèle *BCD*.
Donc $\hat{C}=72°$. $\hat{A}+\hat{C}=90°$. Donc l'angle = 90°.

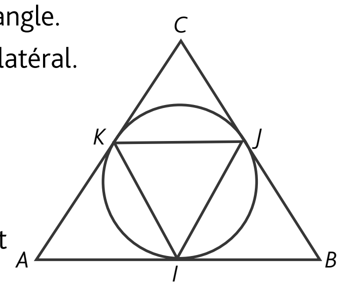
Le triangle *ABC* est bien rectangle en *B*.

› Problème 2

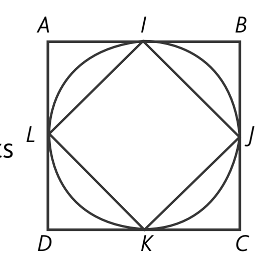
Dans le triangle rectangle *DAB*, $\widehat{BAD}=90°-24°=66°$.
$\widehat{DAE}$ est un angle plat. On en déduit que $\widehat{BAC}=180°-66°-54°=60°$. Dans le triangle *ACE*, $\widehat{ACE}=180°-54°-6°=120°$.

$\widehat{BCE}$ est un angle plat. On en déduit que $\widehat{BCA}=180°-120°=60°$. $\widehat{ABC}$ a au moins deux angles de 60°, donc il est équilatéral.

› Problème 3



1. a. Construction du triangle.
b. *IJK* est un triangle équilatéral.
c. Les droites (*IC*), (*KB*) et (*AJ*) sont respectivement les médiatrices des côtés [*KJ*], [*IJ*] et [*IK*]. Donc il existe un cercle circonscrit passant par *I*, *J* et *K*.
De plus, les droites (*IC*), (*KB*) et (*AJ*) sont les médiatrices des côtés du triangle *ABC*. Donc (*IC*) ⊥ (*AB*), (*KB*) ⊥ (*AC*) et (*AJ*) ⊥ (*BC*). Donc les côtés du triangle *ABC* sont tangents au cercle circonscrit du triangle *IJK*.
d. Il s'agit du cercle inscrit au triangle *ABC*.

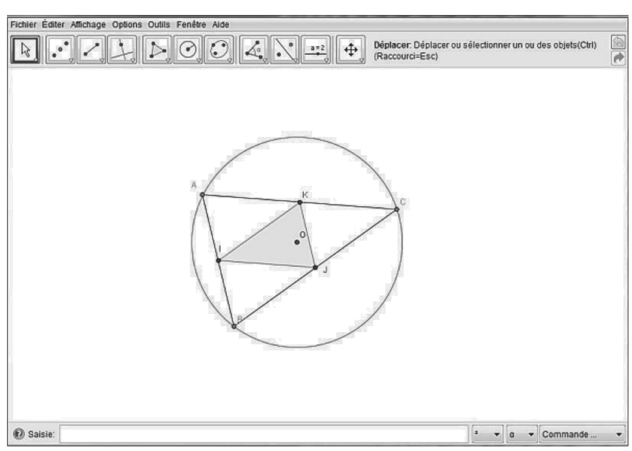


2. a. Construction du carré.
b. *IJKL* est un carré.
c. Il existe un cercle circonscrit au carré *IJKL* car tous les sommets sont à égale distance du centre du carré. (*IK*) ⊥ (*AB*). Donc (*AB*) n'a qu'un seul point commun *I* avec le cercle. Donc (*AB*) est tangente en I au cercle circonscrit à *IJKL*. De même, on montre que *J*, *K* et *L* sont sur un cercle tangent aux côtés *BC*, *CD* et *AD* du carré *ABCD*.
d. Il s'agit du cercle inscrit au carré *ABCD*.

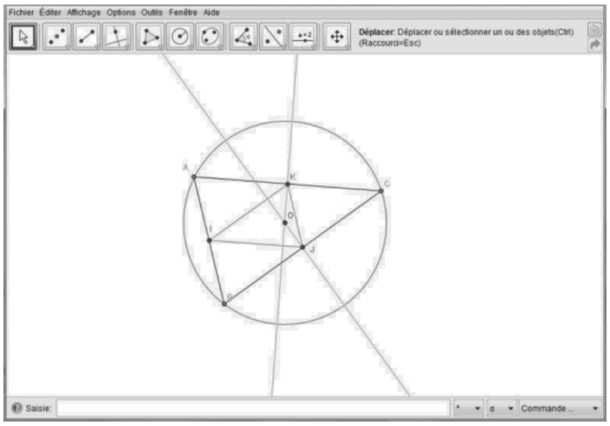
Problème 4

Voir fichier **« 07_pb4_corrige.ggb »**.

1.



2.

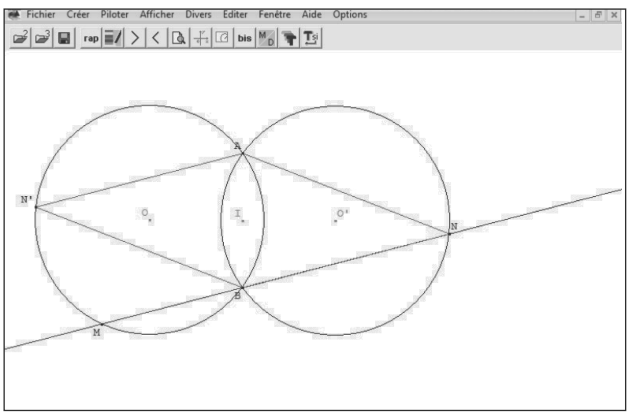


Le point O est l'orthocentre du triangle IJK.
Chaque hauteur de IJK est confondue avec chaque médiatrice du triangle ABC.

› Problème 5

Voir fichier **« 07_pb5_corrige.g2w »**.

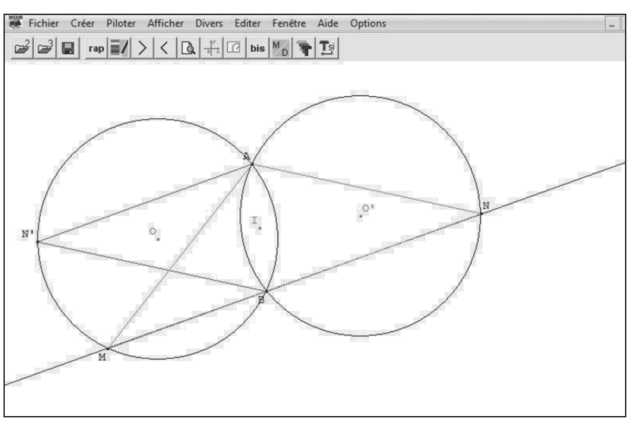
1. a.



b. Le quadrilatère $ANBN'$ est un parallélogramme.

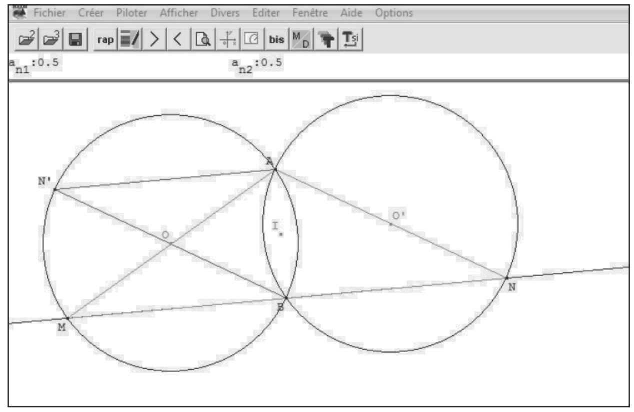
c. Le triangle ANM est un triangle isocèle.

2. a.



N' est le symétrique de N par symétrie de centre I.
Donc I est le milieu de $[NN']$. Or, I est aussi le milieu de $[AB]$ par construction. (I milieu de $[OO']$ avec $OAO'B$ un losange).

Un quadrilatère dont ses diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.



b. $\widehat{BMA} = \widehat{BN'A}$ car ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.

c. D'après **2. a.** $ANBN'$ est un parallélogramme.
Donc $\widehat{ANB} = \widehat{AN'B}$. On en déduit d'après **2. b.** que $\widehat{BMA} = \widehat{ANB}$. Un triangle qui possède deux angles égaux est un triangle isocèle.

› Problème 6

1. Le triangle ADE est rectangle en D.

Le triangle BCE est rectangle en C.

Le triangle ABE est isocèle de sommet A.

2. <u>Triangle *ADE* :</u>

D est droit, car il s'agit d'un « coin » du carton rectangulaire. Donc le triangle ADE est rectangle en D.

<u>Triangle *BCE* :</u>

C est droit, car il s'agit d'un « coin » du carton rectangulaire. Donc le triangle BCE est rectangle en C.

<u>Triangle *ABE* :</u>

Calcul de AE dans le triangle ADE :
On applique la relation de Pythagore :

$AE^2 = AD^2 + DE^2 = 6^2 + 8^2$.

$AE^2 = 100$; $AE = \sqrt{100}$; $AE = 10$ cm.

$AE = AB$, donc le triangle ABE est isocèle de sommet A.

› Problème 7

1. On peut utiliser la réciproque du théorème de Thalès.

2. $AI = \frac{1}{2}BC$.

3. À l'aide de Pythagore, on calcule $BC = 20$, d'où $AI = 10$.

4. $\frac{AC}{AK} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AI}{AJ} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

$\frac{AI}{AJ} = \frac{AC}{AK}$.

Les points A, I, J et A, C, K sont dans le même ordre.

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IC) et (JK) sont parallèles.

› Problème 8
Le porte-voix en buis

1. On applique le théorème de Thalès car le mat et la mire graduée sont parallèles.

$$\frac{h}{H} = \frac{l}{(l+L)}.$$

2. La distance L diminue lorsque h augmente.

Démarche d'investigation

› Problème 9 ✷
Construction d'un cercle

Oui c'est toujours possible si les points A, B et C ne sont pas alignés. Si les points sont alignés les médiatrices ne peuvent pas se couper.

› Problème 10 ✷ ✷
Une bissectrice sans sommet

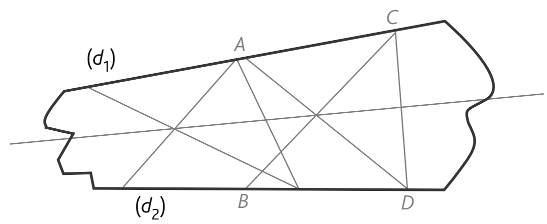
Ce problème est difficile. Il peut être destiné à être donné en activité de recherche à la maison.
Des indices peuvent être donnés au fur et à mesure des avancées des élèves.

<u>**Méthode utilisant les bissectrices :**</u>

Placer un point A sur (d_1) puis un point B sur (d_2).

Construire les bissectrices des angles A et B.

Recommencer avec un point C sur (d_1) puis un point D sur (d_2).



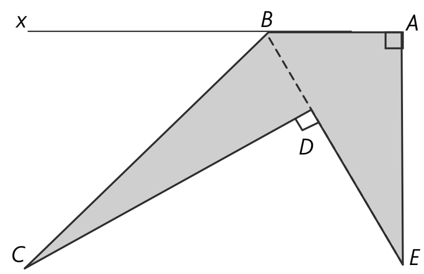
Je me teste

(livre élève pages 119 et 120)

EXERCICE 1 L'équerre d'onglet

L'instrument ci-contre est appelé équerre double onglet. C'est un outil de menuisier et d'ébéniste qui permet de tracer ou de vérifier des angles de mesures particulières.

La figure ci-contre en représente une vue schématique.



Nous allons nous interroger pour voir s'il est possible de mesurer un angle de 45° avec une équerre double onglet ?

Sachant que l'angle $\widehat{BCD}$ mesure 15° et l'angle $\widehat{AED}$ mesure 30°, déterminer les mesures des angles suivants :

1 L'angle $\widehat{ABD}$: B, D et E sont alignés. Le triangle ABE est rectangle en A.

Donc $\hat{A}+\widehat{ABD}+\widehat{AED}=180°$. Donc $\widehat{ABD}=180°-\hat{A}-\widehat{AED}$.

$\widehat{ABD}=180°-90°-30°=60°$

2 L'angle $\widehat{DBC}$: Le triangle BDC est rectangle en O.

Donc $\widehat{DBC}+\hat{D}+\widehat{BCD}=180°$. Donc $\widehat{DBC}=180°-\hat{D}-\widehat{BCD}$.

$\widehat{DBC}=180°-90°-15°=75°$

3 L'angle $\widehat{CBx}$: L'angle $\widehat{ABx}$ est un angle plat, d'où $\widehat{ABx}=\widehat{ABD}+\widehat{DBC}+\widehat{CBx}=180°$.

$\widehat{CBx}=180°-\widehat{ABD}-\widehat{DBC}=180°-60°-75°=45°$

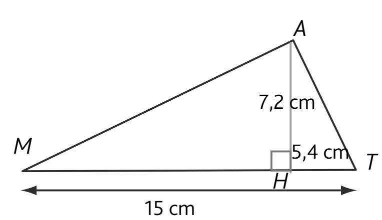
A

Appelez le professeur pour présenter votre démarche.

4 Conclure : oui c'est possible à l'aide de l'angle $\widehat{CBx}$.

EXERCICE 2

Le triangle *MAT* est-il rectangle ? Justifier votre réponse.



• Calcul de A dans le triangle MAH rectangle en H

à l'aide de Pythagore : $MA=$ $MA=\sqrt{AH^2+MH^2}=12$ cm.

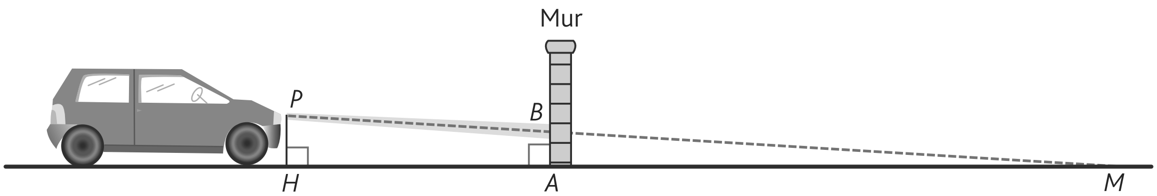
• Calcul de AT dans le triangle TAH rectangle en H

à l'aide de Pythagore : $MA=$ $AT=\sqrt{AH^2+HT^2}=9$ cm.

Comme $MT^2=DA^2+AT^2$, la réciproque de Pythagore nous permet de conclure que le triangle MAT est rectangle en A.

EXERCICE 3 Les feux de croisement

Pour régler les feux de croisement d'une automobile, on la place à 3 m d'un mur vertical sur un sol horizontal. Sur le croquis suivant, *P* désigne un phare de véhicule. Il est à 0,6 m du sol. En l'absence de mur, le rayon lumineux émis par le phare, atteindrait le sol en un point *M*. Il rencontre le mur en *B*. La distance *HM* est la portée du feu de croisement.



Consignes de sécurité

On admet que cette portée doit, à la fois, être :

– d'au moins 30 m, afin d'éclairer suffisamment loin ;

– d'au plus 45 m, pour ne pas éblouir les autres automobilistes.

Le rayon lumineux atteint le mur en *B* à une hauteur de 51 cm du sol.
On va déterminer si les feux de croisement de l'automobile nécessitent un réglage.

1 Compléter en utilisant les données de l'énoncé : HP = 0,6 m ; HA = 3 m.

2 Que peut-on dire des droites (AB) et (HP) ? Elles sont parallèles.

Justifier : (MP) et (AB) sont parallèles car elles sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AH).

3 Dans le cas où HM = 30 m, calculer AM, puis AB.

$AM = HM - AH = 30 - 3 = 27$. Soit $AM = 27$ m.

Les conditions sont réunies pour utiliser le théorème de Thalès.

$\frac{AM}{MH} = \frac{AB}{HP}$ d'où $AB = \frac{AM \times HP}{MH}$; $AB = \frac{27 \times 0{,}6}{30} = 0{,}54$

Soit $AB = 0{,}54$ m.

Appelez le professeur pour présenter vos résultats.

4 Dans le cas où HM = 45 m, calculer AM, puis AB.

$AM = HM - AH = 45 - 3 = 42$. Soit $AM = 42$ m.

Les conditions sont réunies pour utiliser le théorème de Thalès.

$\frac{AM}{MH} = \frac{AB}{HP}$ d'où $AB = \frac{AM \times HP}{MH}$; $AB = \frac{42 \times 0{,}6}{45} = 0{,}56$

Soit $AB = 0{,}56$ m.

5 Conclure sur la nécessité d'un réglage des feux de croisement de l'automobile.

51 n'est pas dans l'intervalle [54 ; 56], donc il y a nécessité de procéder à un réglage.

31 Fonctions de référence

Capacité

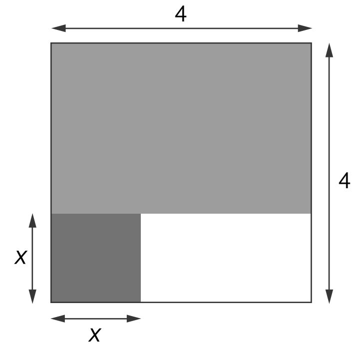
- **Sur un intervalle donné, étudier les variations et représenter les fonctions de référence $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$**

(livre élève pages 121 et 122)

1 Comparer l'aire d'un carré et l'aire d'un rectangle

Pour quelles valeurs du côté *x*, l'aire du carré rouge est-elle plus grande que l'aire du rectangle vert ?

Les dimensions sont en centimètres.



1. Méthode algébrique

a. Exprimer l'aire A_C du carré rouge en fonction de *x*.

L'aire A_c du carré rouge est x^2.

b. Exprimer l'aire A_R du rectangle vert en fonction de *x*.

L'aire A_R du rectangle vert est $4 \times (4 - x)$ soit $16 - 4x$.

c. Chercher pour quelles valeurs de *x*, l'aire du carré rouge est supérieure à l'aire du rectangle vert revient à résoudre :

$A_C < A_R$ $A_C = A_R$ $A_C > A_R$ (entourer la proposition exacte)

d. Écrire la proposition précédente en fonction de *x*. La résolution par le calcul est-elle possible ? Si oui, donner le résultat.

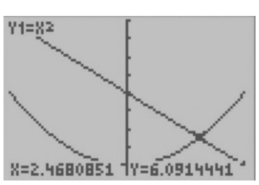
$x^2 > 16 - 4x$ ce qui peut s'écrire $x^2 + 4x - 16 > 0$.

On ne connaît pas la méthode pour résoudre ce type d'inéquation.

2. Méthode graphique

On considère les fonctions *f* et *g* telles que $f(x) = x^2$ et $g(x) = 16 - 4x$ définies sur $[-4 ; 4]$.

a. Sur la calculatrice, éditer les fonctions *f* et *g* puis, tracer leur courbe représentative en utilisant la fenêtre d'affichage ci-contre.



La fonction $x \mapsto x^2$ est appelée **fonction carré**, sa courbe représentative est une **parabole**.

b. Lire graphiquement le sens de variation des fonctions *f* et *g*.

La fonction *f* est décroissante sur $[-4 ; 0]$ et croissante sur $[0 ; 4]$.

La fonction *g* est décroissante sur $[-4 ; 4]$.

c. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ l'inéquation $f(x) > g(x)$.

Avec la fonction « *trace* » de la calculatrice, on trouve que $f(x) > g(x)$, pour $2,468 < x < 4$.

3. Résolution du problème

En utilisant les résultats précédents, dire pour quelles valeurs de x l'aire du carré rouge sera plus grande que l'aire du rectangle vert. Justifier la réponse.

A_C sera supérieure à A_R pour x compris entre 2,468 et 4 d'après l'étude précédente.

2 Étudier des fonctions de référence

On désire tracer dans un même repère, les représentations graphiques des fonctions de référence $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$. Comment procéder ?

1. Pour tracer la fonction $x \mapsto 1$, est-il nécessaire de passer par un tableau de valeurs ? Justifier.

Non, puisque pour cette fonction quelle que soit la valeur donnée à x, son image sera 1.

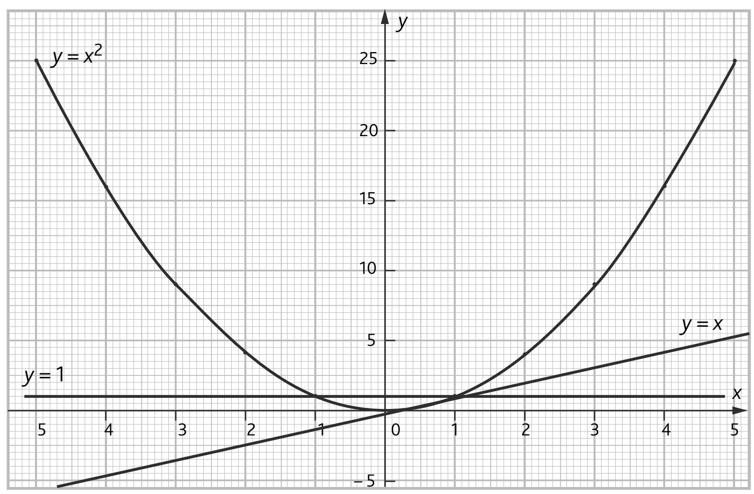
2. Quelle est la particularité des coordonnées des points appartenant à la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x$?

Les points de cette représentation graphique ont leur abscisse égale à leur ordonnée.

3. Pour obtenir la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle [– 5 ; 5], compléter le tableau de valeurs.

x	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
x^2	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

4. Tracer les représentations graphiques des trois fonctions dans le repère ci-dessous.



5. Établir le tableau de variation de ces trois fonctions sur l'intervalle [– 5 ; 5].

x	– 5	5
$x \mapsto 1$	1 →	1

x	– 5	5
$x \mapsto x$	– 5 ↗	5

x	– 5	0	5
$x \mapsto x^2$	25 ↘	0 ↗	25

6. Compléter les phrases suivantes.

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto 1$ est une droite horizontale.

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto x$ est une droite croissante.

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2$ est une parabole.

Exercice **RÉPONSES**

Les points A, E et H appartiennent à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 1$ car leurs ordonnées valent 1.
Les points B, C, E et F appartiennent à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x$ car leurs ordonnées sont égales à leurs abscisses.
Les points C, D, E et G appartiennent à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ car leurs ordonnées sont égales aux carrés de leurs abscisses.

32 Addition d'une constante à une fonction

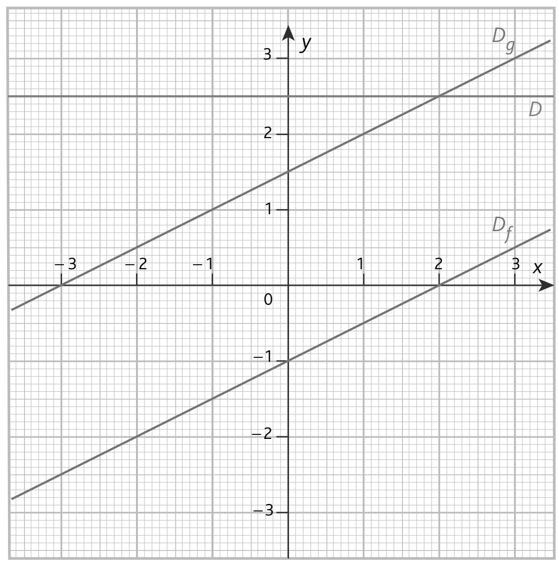
(livre élève pages 123 et 124)

Capacité
- **Déterminer le sens de variation d'une fonction se déduisant d'une fonction usuelle**

1 Ajouter une constante à une fonction affine

On considère la fonction affine f définie sur [– 3 ; 3] par $f(x) = 0{,}5x - 1$ et la constante $k = 2{,}5$.

On donne dans le repère ci-contre la droite D_f représentative de la fonction f et la droite D d'équation $y = 2{,}5$.
On appelle g la fonction définie sur [– 3 ; 3] par $g(x) = f(x) + 2{,}5$.



1. Donner l'expression de $g(x)$: $g(x) = 0{,}5\,x + 1{,}5$.

2. Donner la nature de la fonction g : affine.

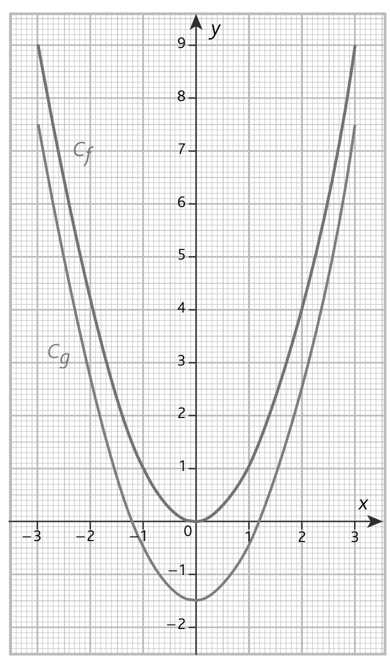
3. Tracer dans le même repère la courbe représentative D_g de la fonction g.

4. Comparer les coefficients directeurs des droites D_f et D_g.
D_f et D_g ont le même coefficient directeur.

5. En déduire le sens de variation de la fonction g.
La fonction g est croissante sur [– 3 ; 3].

2 Ajouter une constante à la fonction carré

On donne dans le repère ci-contre les représentations graphiques de deux fonctions f et g sur [– 3 ; 3].
C_f est la représentation graphique de la fonction carré sur cet intervalle.



1. Comparer les variations de la fonction g aux variations de la fonction f.
La fonction g a les mêmes variations que la fonction f.

2. Compléter, à l'aide des représentations graphiques, le tableau de valeurs.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)$	7,5	2,5	– 0,5	– 1,5	– 0,5	2,5	7,5

3. En observant les valeurs obtenues, compléter :
$g(x) = f(x) - 1{,}5$
La fonction g est obtenue par addition de la fonction f et d'une constante ($k = -1{,}5$).

4. Établir le tableau de variation de la fonction g.

Lorsque l'on **ajoute une constante k à une fonction f**, on obtient une fonction g qui a **le même sens de variation** que f.

x	-3	0	3
$g(x)$	7,5 ↘	$-1,5$	↗ 7,5

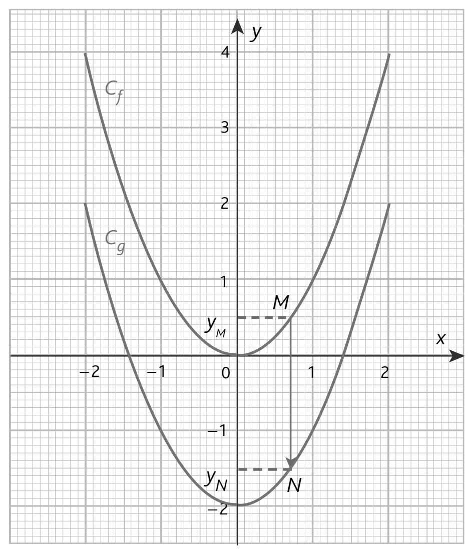
Comment étudier une fonction du type $x \mapsto f(x) + k$?

Soit la fonction g définie pour tout nombre x de l'intervalle $[-2 ; 2]$ par $g(x) = x^2 - 2$.
Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.

- Donner la fonction de référence f, à partir de laquelle g est obtenue : ....x^2..........
  Donc, la fonction g est obtenue par addition de la fonction f et de la constante ....-2.........
- Écrire le sens de variation de la fonction carré dans la 2^e^ ligne du tableau ci-contre.
- En déduire le sens de variation de la fonction g en complétant la 3^e^ ligne du tableau ci-contre.

x	-2	0	2
$f(x) = x^2$	4 ↘	0	↗ 4
$g(x)$	2 ↘	-2	↗ 2

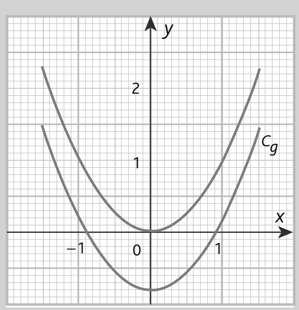
- À chaque point M de la courbe C_f représentative de la fonction carré, correspond un point N de la courbe C_g.
  Compléter l'égalité : $y_N = y_M$ ...-2......
- Tracer la courbe représentative C_g de la fonction g.



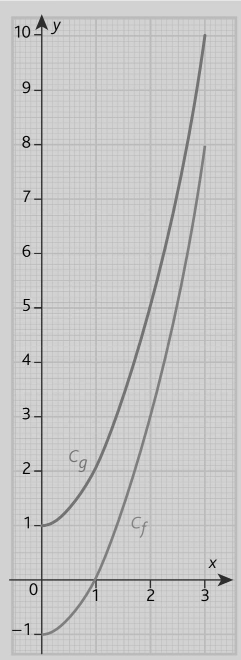
RÉPONSES

Exercices

1 **a.** La fonction f est décroissante sur $[-1,5 ; 0]$ et croissante sur $[0 ; 1,5]$.
La fonction g a les mêmes variations que la fonction f sur $[-1,5 ; 1,5]$.
b. Courbe sur graphique.



2 Les fonctions f et g sont croissantes sur l'intervalle $[0 ; 3]$; elles ont les mêmes variations que la fonction carré sur cet intervalle car elles sont obtenues par addition de la fonction carré et d'une constante (respectivement 1 et -1).



x	0	3
x^2	0 ↗	9
$f(x)$	1 ↗	10
$g(x)$	1 ↗	8

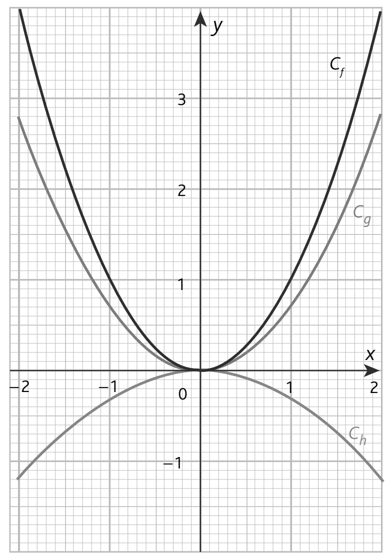
33 Multiplication d'une fonction par une constante

Capacité
- Déterminer le sens de variation d'une fonction se déduisant d'une fonction usuelle

(livre élève pages 125 et 126)

Multiplier une fonction par une constante

Dans le repère ci-contre, sont tracées les courbes représentatives des fonctions *f*, *g* et *h* définies sur l'intervalle [– 2 ; 2] par :
$f(x) = x^2$ $g(x) = 0,7x^2$ $h(x) = -0,3x^2$.



1. Tableaux de variation

Établir, sur l'intervalle [– 2 ; 2], les tableaux de variation des fonctions *f*, *g* et *h*.

x	– 2		0		2
$f(x)$	4	↘	0	↗	4

x	– 2		0		2
$g(x)$	2,8	↘	0	↗	2,8

x	– 2		0		2
$h(x)$	– 1,2	↗	0	↘	– 1,2

2. Comparaison de *f* et *g*

a. Comparer le sens de variation des fonctions *f* et *g* : *f* et *g* ont le même sens de variation.

b. Comment obtient-on l'ordonnée $g(1)$ à partir de $f(1)$? $g(1) =$ 0,7 × $f(1)$.

c. La fonction *g* est obtenue par multiplication de la fonction *f* telle que $f(x) =$ x^2 par la constante $k_1 =$ 0,7. De quel signe est k_1 ? k_1 est positive.

d. Comment obtient-on graphiquement, à partir de la courbe représentative de *f*, la courbe représentative de *g* ?
Pour chaque point de C_f, on multiplie son ordonnée par 0,7 pour obtenir l'ordonnée correspondante du point de C_g.

Lorsqu'**on multiplie une fonction *f* par une constante *k* positive**, on obtient une fonction *g* qui a le même sens de variation que *f*.

3. Comparaison de *f* et *h*

a. Comparer le sens de variation des fonctions *f* et *h* : les fonctions *f* et *h* varient en sens contraire.

b. Comment obtient-on l'ordonnée $h(1)$ à partir de $f(1)$? $h(1) =$ – 0,3 × $f(1)$.

c. La fonction h est obtenue par multiplication de la fonction f telle que $f(x) =$ .... x^2 .... par la constante $k_2 =$ .... $-0,3$ .... De quel signe est k_2 ? ..... k_2 est négative. ....

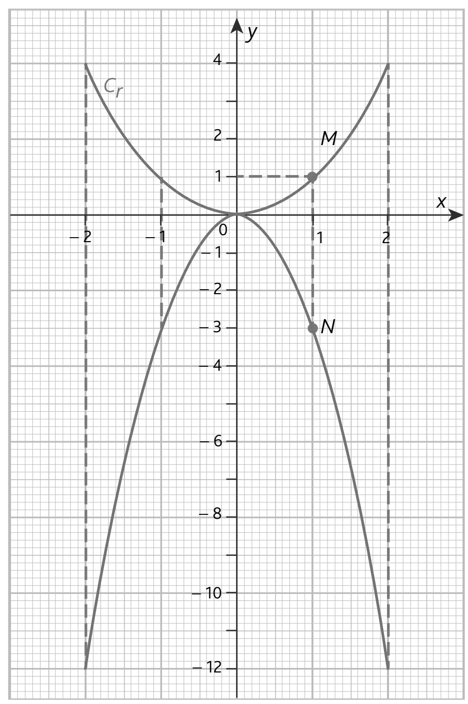
d. Comment obtient-on graphiquement, à partir de la courbe représentative de f, la courbe représentative de h ?

Pour chaque point de C_f, on multiplie son ordonneé par $-0,3$ pour obtenir l'ordonnée correspondante du point de C_h.

Lorsqu'**on multiplie une fonction *f* par une constante *k* négative**, on obtient une fonction g qui varie en sens contraire de f.

Comment étudier une fonction du type $x \mapsto k \times f(x)$?

Soit la fonction g définie pour tout nombre x de l'intervalle $[-2 ; 2]$ par $g(x) = -3x^2$.
Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.



- Donner la fonction de référence f, à partir de laquelle g est obtenue : ... x^2 ....
  Donc la fonction g est obtenue par multiplication de la fonction f par la constante $k =$ .... -3 ....
- Écrire le sens de variation de la fonction carré dans la 2e ligne du tableau ci-dessous.
- En déduire le sens de variation de la fonction g en complétant la 3e ligne du tableau ci-dessous.

x	-2		0		2
$f(x) = x^2$	4	↘	0	↗	4
$g(x)$	-12	↗	0	↘	-12

- Pour chaque point M de la courbe représentative C_f de la fonction carré , on obtient un point N de la courbe C_g tel que $y_N =$ ..... -3 .... $\times y_M$.
- Tracer la courbe représentative C_g de la fonction g.

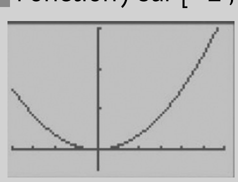
RÉPONSES

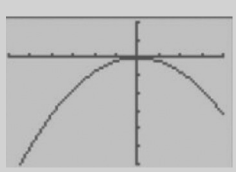
Exercices

1 Réponse **b.** [0 ; 50 [.

2 Réponse **a.** vrai.

3 Fonction f sur $[-2 ; 3]$. Fonction g sur $[-3 ; 2]$.





4 **a.** La fonction g se déduit de la fonction f par multiplication par la constante $-0,5$.

b. $g(x) = -0,5\, x^2$.

c.

x	-2		0		2
$g(x)$	-2	↗	0	↘	-2

34 Résolution graphique

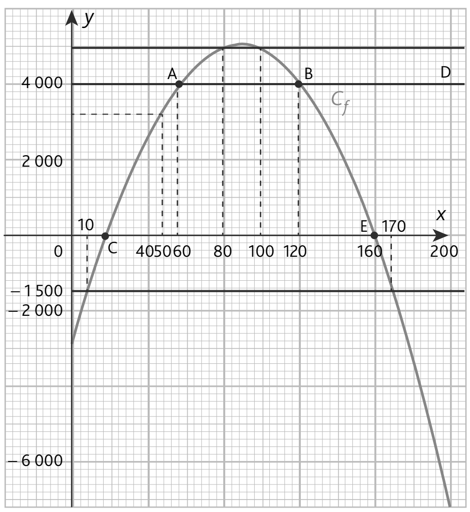
Capacités
- Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x)$ = constante
- Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = 0$

(livre élève pages 127 et 128)

1 Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x)$ = constante

Perte ou bénéfice ?

Dans une entreprise, le résultat dégagé par la vente d'un produit est un bénéfice s'il est positif, ou une perte s'il est négatif. Le résultat de la vente d'un produit, en euros, est donné par la relation $f(x) = -x^2 + 180x - 3\,200$ où x est la masse en kg de produit vendu. Soit C_f la courbe représentative de f sur l'intervalle [0 ; 200].



1. Calculer le résultat pour une vente de 50 kg de produit.

$f(50) = -50^2 + 180 \times 50 - 3\,200 = 3\,300.$

2. Vérifier le résultat sur le graphique.

On veut savoir quelle quantité de produit il faut vendre pour que le bénéfice soit égal à 4 000 €.

On doit donc résoudre l'équation $f(x) = 4\,000$ dans l'intervalle [0 ; 200].

3. Tracer la droite D d'équation $y = 4\,000$ sur le graphique donné : c'est une droite horizontale qui passe par le point de coordonnées (0 ; 4 000).

4. Noter A et B les points d'intersection de la droite D avec la courbe C_f.

5. Le point A a pour abscisse 60 ; le point B a pour abscisse 120.

6. Les solutions de l'équation $f(x) = 4\,000$ sont : 60 et 120 sur [0 ; 200].

7. Le bénéfice est égal à 4 000 € lorsqu'on vend 60 kg de produit ou 120 kg.

8. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 5\,000$.

Les solutions de l'équations $f(x) = 5\,000$ sont $x = 80$ et $x = 100$. *

9. Interpréter ce résultat sous la forme d'une phrase : Le bénéfice est égal à 5 000 € lorsque l'on vend 80 ou 100 kg de produit.

10. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -1\,500$. Les solutions sont 10 et 170.

11. Interpréter ce résultat sous la forme d'une phrase : La perte est de 1 500 € pour des ventes de 10 kg ou de 170 kg de produit.

* Compte tenu d'une erreur dans la représentation graphique de la fonction f, l'équation $f(x) = 5\,000$ admet 2 solutions lorsqu'on la résout graphiquement. Par le calcul, on trouve que cette équation n'a pas de solution.

2 Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = 0$

On utilise les données et le graphique de la première partie de la fiche. On veut savoir pour quelle quantité de produit vendu le résultat est nul, c'est-à-dire ni bénéfice, ni perte. On doit donc résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle [0 ; 200].

1. La droite d'équation $y = 0$ est l'axe des abscisses.

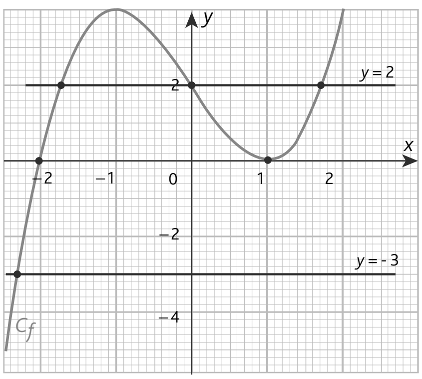
2. Noter C et E les points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

3. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 20 et 160.

4. Le bénéfice est égal à 0 lorsqu'on vend 20 kg de produit ou 160 kg.

Comment déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) =$ constante ?

On a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur [– 2,5 ; 2]. Déterminer le nombre de solutions des équations $f(x) = – 3$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$. Indiquer ces solutions.



On suit la méthode suivante : tracer la droite d'équation $y =$ constante et regarder le nombre de points d'intersection de cette droite avec C_f. Il y a autant de solutions que de points d'intersection. Les solutions sont les abscisses des points d'intersection.

- Nombre de solutions de l'équation $f(x) = – 3$:
  - • tracer la droite d'équation $y = – 3$;
  - • marquer les points d'intersection, s'il y en a, de la droite avec C_f.

  Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = – 3$ est : une solution.

  Les solutions de l'équation $f(x) = – 3$ sont : – 2,3.
- Nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$: deux solutions.

  Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont : – 2 et 1.
- Nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$: trois solutions.

  Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont : – 1,7 ; 0 et 1,7.

RÉPONSES

Exercices

1 $h(0) = 2$ et $h(2) = – 1$.

2 $h(x) = 2,5$ admet deux solutions.
$h(x) = 1,5$ admet trois solutions.
$h(x) = – 1,5$ n'admet pas de solution.

3 $h(x) = 0$ pour $x = 1,3$ et $x = 2,5$.
$h(x) = 3$ pour $x = 4$.
$h(x) = 2$ pour $x = 0$; $x = 3,5$ et $x = 4,5$.

35 J'utilise un logiciel (GeoGebra)

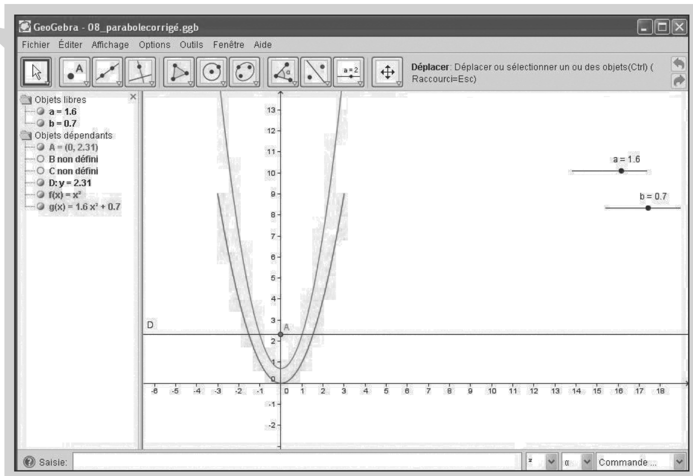
Étudier une fonction du type $x \mapsto ax^2 + b$

(livre élève pages 129 et 130)

La fonction carré est définie pour tout nombre x par $g(x) = x^2$.
Les courbes représentatives des fonctions définies par $f(x) = ax^2 + b$ sont des paraboles.

1. Étude de la fonction carré

Ouvrir le fichier « 08_parabole.ggb », déplacer le curseur « b » jusqu'à superposition des deux courbes.



a. Identifier pour la fonction carré les valeurs de a et de b : $a =$ ....1... , $b =$ ....0...

b. Établir, sur l'intervalle [– 3 ; 3], le tableau de variation de la fonction carré.

x	– 3	0	3
$g(x)$	..9.. ↘	..0..	↗ ..9..

2. Étude du sens de variation de f

Influence du paramètre a

- **Fixer le curseur « b » à zéro puis, déplacer le curseur « a ».**

a. Donner, à l'aide du graphique, le sens de variation de la fonction f dans les cas suivants.

Si $a > 0$ • • f est constante
Si $a = 0$ • • f est croissante sur [– 3 ; 0] et décroissante sur [0 ; 3]
Si $a < 0$ • • f est décroissante sur [– 3 ; 0] et croissante sur [0 ; 3]

b. Comparer, pour différentes valeurs de a, le sens de variation de la fonction f avec le sens de variation de la fonction carré.

Si $a > 0$, le sens de variation de f est ...le même.......... que celui de la fonction g.
Si $a < 0$, le sens de variation de f est ...contraire.......... à celui de la fonction g.

Influence du paramètre b

- **Déplacer le curseur « b ».**

c. Le nombre « b » a-t-il une influence sur les variations de la fonction f ? ....Non, aucune.....

d. Donner pour différentes positions de la courbe les coordonnées du sommet S de la parabole.

a	0,4	1,6	– 2,9	– 0,7	2,9
b	– 1,7	2,1	3	– 1	– 1
Coordonnées de S	(...0 ; –1,7)	(...0 ; 2,1..)	(..0.. ; ..3..)	(...0.. ; –1..)	(...0 ; – 1..)

e. On en déduit les coordonnées du sommet S de la parabole d'équation $y = ax^2 + b$: S (..0.. ; ..b..).

J’utilise un logiciel (GeoGebra)

Étudier une fonction du type $x \mapsto ax^2 + b$

Tableau de variation de la fonction *f*

f. Établir, sur l’intervalle [– 3 ; 3], les tableaux de variation des fonctions *f* telles que $f(x) = ax^2 + b$ lorsque *a* est positif et lorsque *a* est négatif.

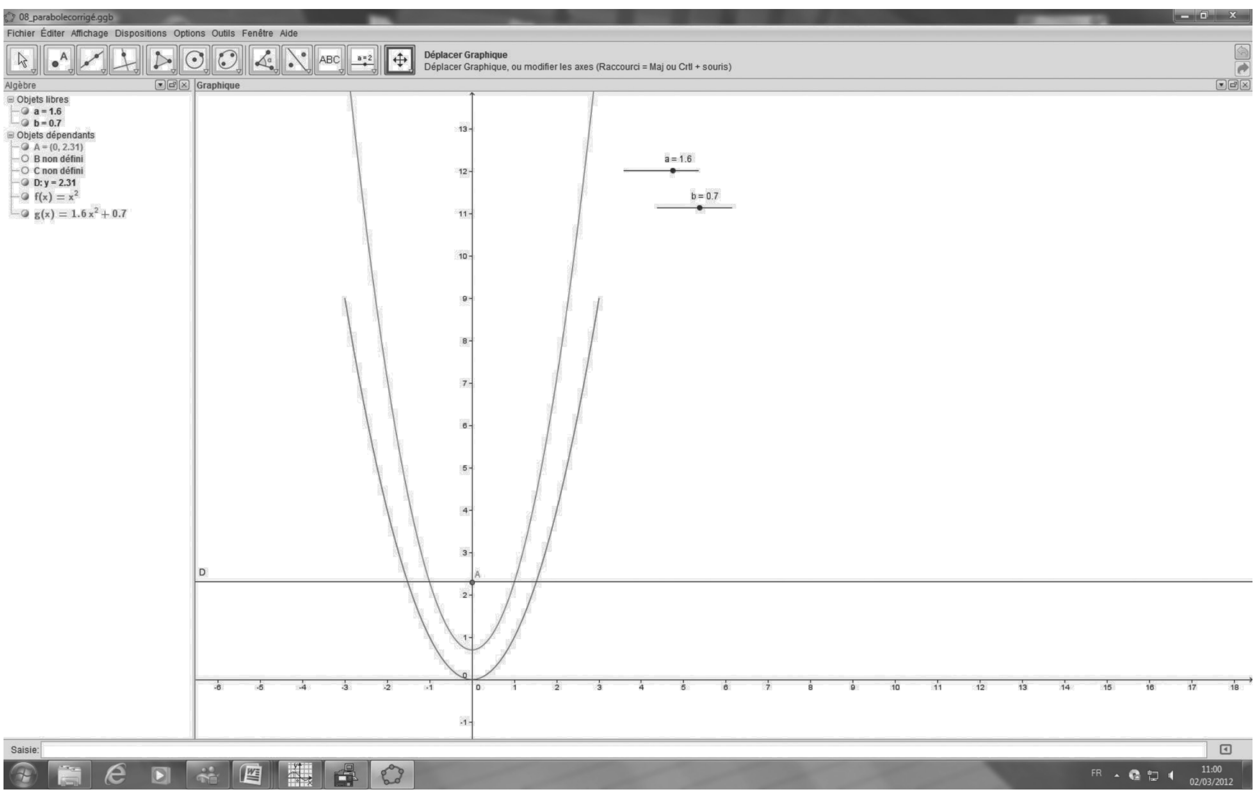
Cas où $a > 0$

x	– 3	0	3
$f(x)$	$9a + b$ ↘	b	↗ $9a + b$

Cas où $a < 0$

x	– 3	0	3
$f(x)$	$9a + b$ ↗	b	↘ $9a + b$

Ouvrir le fichier « 08_parabole_corrigé.ggb » et déplacer le point A.



3. Étude de l’équation $f(x) = k$

■ **Placer un point *A* sur l’axe des ordonnées. Tracer la droite *D* passant par *A* et parallèle à l’axe des abscisses.**

a. Lire à gauche de l’écran l’équation de la droite *D* : $y =$ 4 (par exemple).

■ **Fixer des valeurs de *a* et *b* différentes de 0 et 1.**

■ **À l’aide du point *A*, déplacer la droite *D*.**

b. Déterminer les conditions pour que $f(x) = k$ admette au moins une solution :

Si $a > 0$, alors k doit être supérieur ou égal à b. ($k \geqslant b$).

Si $a < 0$, alors k doit être inférieur ou égal à b. ($k \leqslant b$).

c. Déterminer les conditions pour que $f(x) = k$ n'admette aucune solution :

Si $a > 0$, alors k doit être inférieur à b. ($k < b$).

Si $a < 0$, alors k doit être supérieur à b. ($k > b$).

d. Vérifier la proposition faite pour d'autres valeurs de a et b.

Cela fonctionne aussi.

4. Étude de l'équation $f(x) = 0$

■ **Déplacer les curseurs « a » et « b » pour que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses.**

a. Quelles conditions a et b doivent-ils remplir ?

Lorsque $a > 0$ alors b doit être négatif.

Lorsque $a < 0$ alors b doit être positif.

■ **Fixer « a » et « b » pour que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses.**

b. $a =$ 0,8 , $b =$ – 2 . La parabole coupe l'axe des abscisses en $x_1 =$ – 1,581 et $x_2 =$ 1,581

c. Calculer et arrondir au millième : $-\sqrt{\dfrac{-b}{a}} = -\sqrt{\dfrac{-(-2)}{0,8}} = -1,581$ et $\sqrt{\dfrac{-b}{a}} = \sqrt{\dfrac{-(-2)}{0,8}} = 1,581$

d. Donner une interprétation pour ces nombres : Ce sont les solutions de l'équation $f(x) = k$.

e. Vérifier la proposition précédente pour d'autres valeurs de a et b.

Cela fonctionne aussi.

Exercices & Problèmes

Ⓡ *Exercices avec réponses en fin d'ouvrage.* ✱ / ✱✱ *Exercices plus difficiles.*

Exercices p. 133 et 134

1. QCM

a. Vrai **b.**]– 10 ; 0]

c. [0 ; 20[**d.** En additionnant 3 aux valeurs de $f(x)$

2. Vrai - Faux

a. Faux **b.** Vrai

c. Vrai **d.** Faux

3. Associer

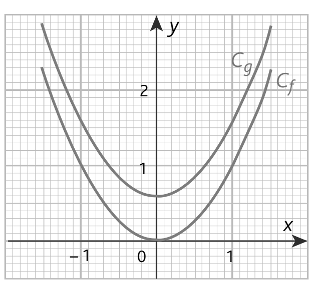
C_1 a pour expression algébrique : $x^2 - 2{,}5$.
C_2 a pour expression algébrique : x^2.
C_3 a pour expression algébrique : $2\,x^2$.

› Ajouter une fonction constante à une fonction

4. a.

x	– 1,5		0		1,5
$f(x)$	2,25	↘	0	↗	2,25
$g(x)$	2,85	↘	0,6	↗	2,85

b.



5. a. La fonction f est croissante sur [– 2 ; 3].
La fonction g est décroissante sur [– 2 ; 3].
La fonction h est constante sur cet intervalle.

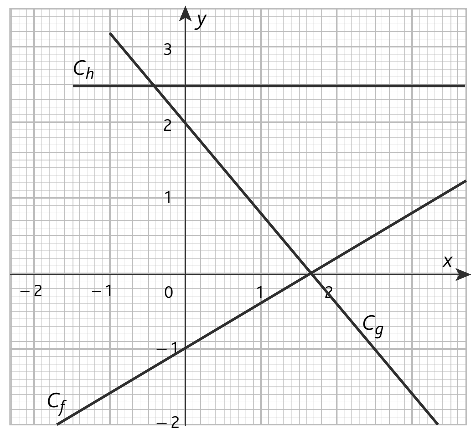
b.

x	– 2		3
$f(x)$	– 2,2	↗	0,8

x	– 2	0	3
$g(x)$	4,4	↘	– 1,6

x	– 2		3
$h(x)$	2,5	→	2,5

c.



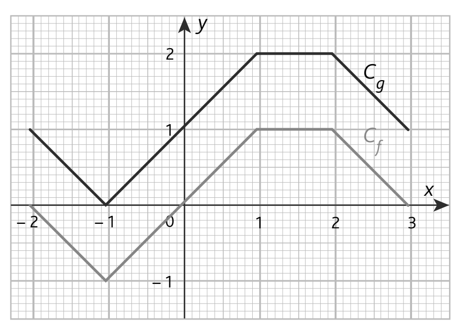
6. a. On ajoute + 1 à la fonction f, donc la fonction g a les mêmes variations que la fonction f.

x	– 2		– 1		1		2		3
$g(x)$	1	↘	0	↗	2	→	2	↘	1

b.

x	– 2	– 1	0	1	2	3
$g(x)$	1	0	1	2	2	1

c.



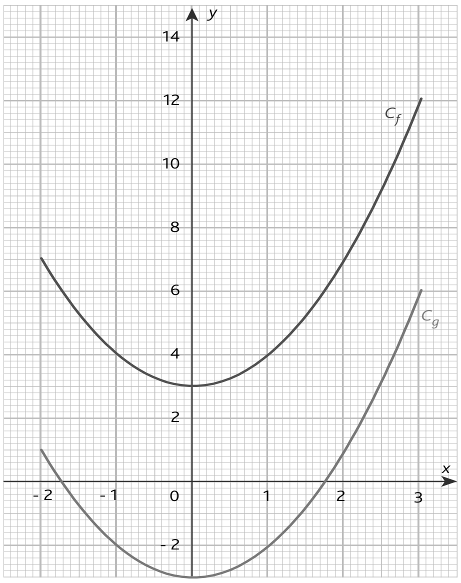
7. On ajoute + 3 à $x \mapsto x^2$.
Le tableau de variation de la fonction f :

x	– 2		0		3
x^2	4	↘	0	↗	9
$f(x)$	7	↘	3	↗	12

On ajoute – 3 à $x \mapsto x^2$.

Le tableau de variation de la fonction g :

x	-2		0		3
x^2	4	↘	0	↗	9
$g(x)$	1	↘	-3	↗	6



› Multiplier une fonction par une constante

8. Les fonctions f, i, k et l sont représentées par une droite.
Les fonctions g, h et j sont représentées par une parabole.

9. A : avec $h(x) = 0{,}4x^2$; B : avec $g(x) = -x^2$;
C : avec $f(x) = x^2$; D : avec $i(x) = -1{,}5x^2$.

10. a. La fonction g est obtenue par multiplication de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la constante $k = \frac{2}{3}$.

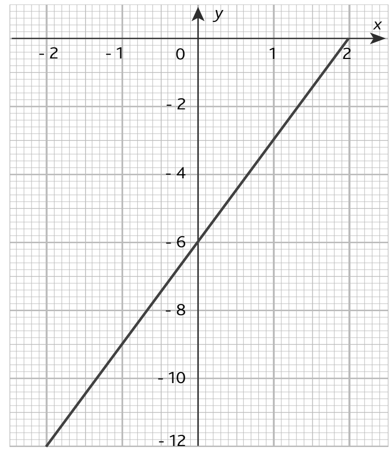
x	-3		0		2
$g(x)$	6	↘	0	↗	$2{,}67$

La fonction h est obtenue par multiplication de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la constante $k = -0{,}6$.

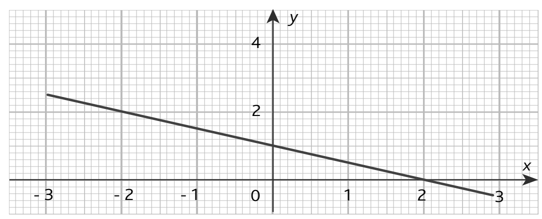
x	-3		0		2
$h(x)$	$-5{,}4$	↗	0	↘	$-2{,}4$

11. La fonction f est obtenue par multiplication de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la constante $k = 2{,}5$.
Donc f varie en dans le même sens que $x \mapsto x^2$ sur chacun des intervalles.
La fonction g est obtenue par multiplication de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la constante $k = -0{,}75$.
Donc g varie en sens contraire de $x \mapsto x^2$ sur chacun des intervalles.

12. La fonction f est obtenue par multiplication de la fonction affine $x \mapsto x - 2$ et de la constante $k = 3$.
Donc f a le même sens de variation que $x \mapsto x - 2$. Elle est croissante.



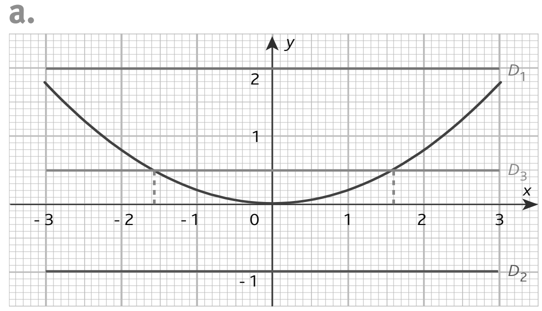
13. La fonction f est obtenue par multiplication de la fonction affine $x \mapsto x - 2$ et de la constante $k = \frac{-1}{4}$.
Donc f varie en sens contraire de la fonction affine $x \mapsto x - 2$. Elle est décroissante.



› Résoudre l'équation $f(x)$ = constante

14. $f(x) = -0{,}5$ pour $x = -0{,}8$.
$f(x) = 0$ pour $x = -0{,}65$ et $x = 1$.
$f(x) = 1$ pour $x = -0{,}3$ et $x = 0{,}5$ et $x = 2$.
$f(x) = 2$ pour $x = 0$ et $x = 3$.
$f(x) = 2{,}5$ pour $x = 3{,}5$.

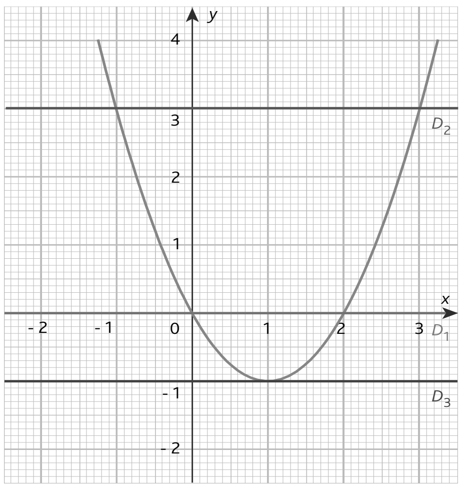
15. a.



b. Droite (D_1) : sur $[-3 ; 3]$ l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution.
Droite (D_2) : sur $[-3 ; 3]$ l'équation $f(x) = -1$ n'admet pas de solution.
Droite (D_3) : sur $[-3 ; 3]$ l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions $-1{,}5$ et $1{,}5$.

16. $x^2 = 1$: deux solutions -1 et 1.
$x^2 = -0{,}1$: pas de solutions.
$3x^2 = 7$: deux solutions $-1{,}5$ et $1{,}5$.

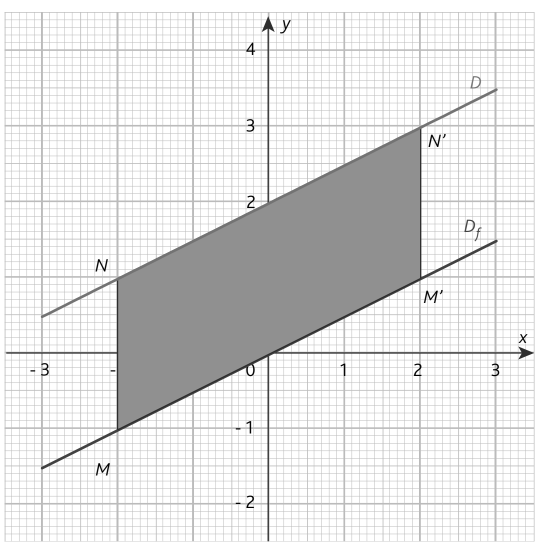
17. Droite (D_1) : sur $[-1\ ;\ 3]$ l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions 0 et 2.
Droite (D_2) : sur $[-1\ ;\ 3]$ l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions -1 et 3.
$x^2 - 2x + 1 = 0$ donne $x^2 - 2x = -1$.
Droite (D_3) : sur $[-1\ ;\ 3]$ l'équation $f(x) = -1$ admet une solution 1.



Problèmes p. 135 et 136

Problème 1

1. et **2.**



3. $MNN'M'$ est un parallélogramme.
Pour passer de f à g on ajoute + 2 sans changer le sens de variation.
D'où les droites D_f et D_g ont le même coefficient directeur.
Donc D_f et D_g sont parallèles.
De plus, M et N ont même abscisse $x = -2$ et M' et N' ont même abscisse $x = 2$.
Donc les côtés MN et $M'N'$ sont également parallèles.
Un quadrilatère qui a ses côtés parallèles deux à deux est un parallélogramme.

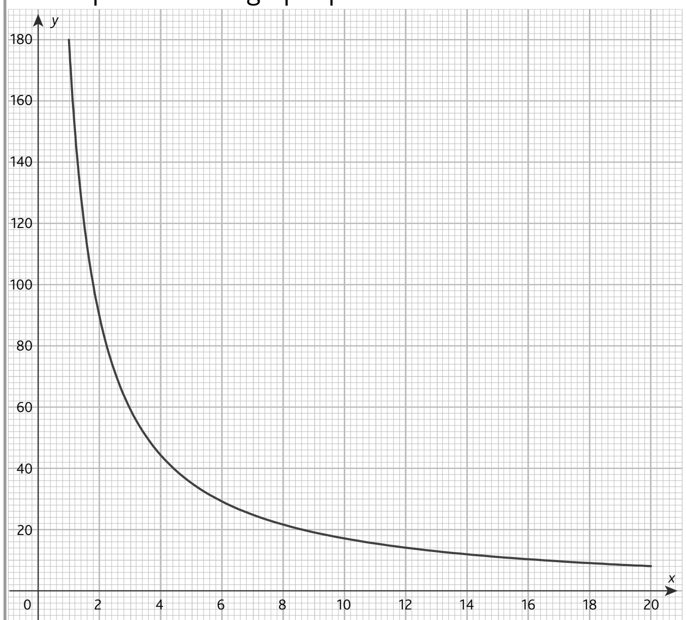
Problème 2

1. À 1 € le mètre : 180 m ; à 2,50 € le mètre : 72 m ; à 20 € le mètre : 9 m.

2. $l(x) = \dfrac{180}{x}$.

3. Pour x variant de 0 à 20, l est décroissante.

4. Représentation graphique ci-dessous.



Problème 3

Résultat annuel

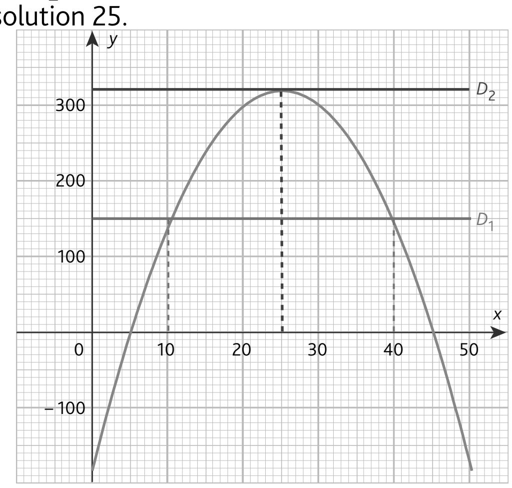
1. Pour 20 banquets le résultat annuel est de 300 milliers d'euros.
Pour 50 banquets le résultat annuel est de -180 milliers d'euros.

2. a.

x	0	25	50
$f(x)$	-180 ↗	320	↘ -180

b. Le maximum de la fonction f est atteint pour une abscisse de 25 et vaut 320 milliers.

c. Droite (D_1) : sur $[0\ ;\ 50]$ l'équation $f(x) = 150$ admet deux solutions 10 et 40.
Intersection avec l'axe des abscisses : sur $[0\ ;\ 50]$ l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions 5 et 45.
Droite (D_2) : sur $[0\ ;\ 50]$ l'équation $f(x) = 320$ admet une solution 25.



3. Il faut 25 banquets pour un résultat de 320 milliers d'euros.

› Problème 4
Puissance électrique

1. a. $f(x) = 33\,x^2$

b. La fonction f est obtenue par multiplication de la fonction carrée par une constante positive.

c.

x	0	10
x^2	0 ↗	100
$f(x)$	0 ↗	3 300

2. a. $g(x) = 100\,x^2$

b. Les variations de g sont les mêmes que celles de la fonction f puisque la fonction g est aussi obtenue par multiplication de la fonction carré par une constante positive.

x	0	10
$g(x)$	0 ↗	10 000

3. Une résistance de 100 Ω permet d'atteindre 3 000 W avec une intensité plus faible que celle obtenue avec une résistance de 33 Ω (environ 5,5 A pour 100 Ω et 9,5 A pour 33 Ω).

› Problème 5
Évolution de l'alcoolémie

1. a. 1,2 ÷ 8 = 0,15 ; la vitesse de décroissance de l'alcoolémie est de 0,15 g/L par heure.

b. Au bout de 5,2 heures. Il peut reprendre le volant à 18 h 12 min.

c. Au bout de 8,4 heures.

2. a. 0,8 ÷ 9,4 = 0,085 ; la vitesse de décroissance de l'alcoolémie est de 0,085 g/L par heure.

b. Au bout de 4,6 heures. Il peut reprendre le volant à 17 h 36 min.

c. Au bout de 10,2 heures.

› Problème 6
Connaître son indice de masse corporelle

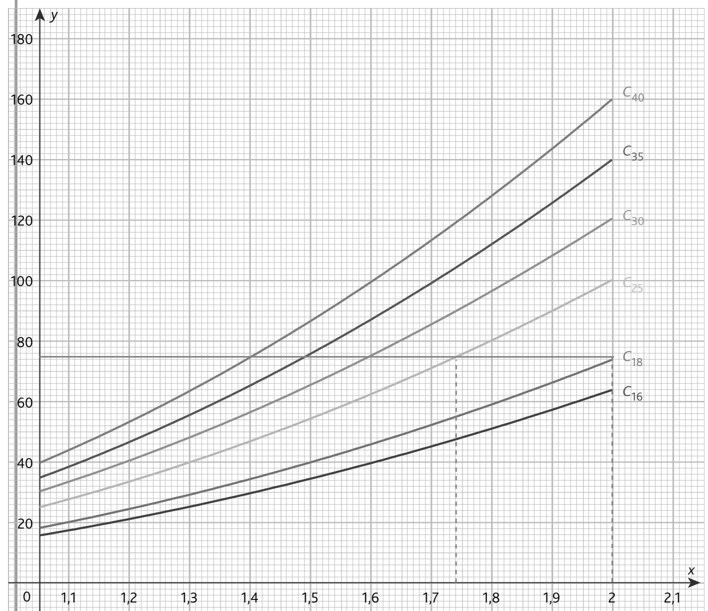
1. $\dfrac{62}{(1{,}68)^2} \approx 21{,}97$. L'IMC de Malika est de 22.

2. Le poids en kg = IMC × (taille en m)^2.

3. a. $f_{22}(x) = 22 \times x^2$.

b. La fonction f_{22} est obtenue par multiplication de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la constante $k = 22$.
Donc f a le même sens de variation que $x \mapsto x^2$.

c.



d. Réponses possibles : aucune ne s'intercepte ; elles passent toutes par le point (1, i) ; elles sont croissantes…

e. Les personnes pesant 75 kg ont normalement des tailles comprises entre 1,73 m et 2,00 m.

Démarche d'investigation

› Problème 7 ✷
Création d'un motif

Construire un repère orthonormal d'unité 1 cm.
Placer les points $A(-4\,;12)$, $B(4\,;12)$, $C(4\,;-12)$ et $D(-4\,;-12)$. Tracer le rectangle $ABCD$.
Tracer les droites d'équations :
$y = 3\,x$; $y = 1{,}5\,x$; $y = 0{,}75\,x$; $y = -3\,x$; $y = -1{,}5\,x$; et $y = -0{,}75\,x$ en limitant le tracé à l'intérieur du rectangle $ABCD$.
Colorier les zones délimitées par les segments de droites de deux couleurs différentes en alternant.

› Problème 8 ✷
Obtention d'une parabole

« *08_pb8_corrige.ggb* »

Première possibilité : à l'aide du logiciel GeoGebra, placer les points O, A et B puis créer trois curseurs a, b et c ainsi que la parabole d'équation $y = a^*x^2+b^*x+c$. Faire des essais pour trouver les valeurs a, b et c qui permettent d'obtenir la parabole passant par les trois points.
C'est la parabole d'équation $y = 0{,}3\,x^2 - 0{,}5\,x$.

Autre possibilité : on utilise les coordonnées des trois points et l'équation générale d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$.
Au point O, on trouve $c = 0$. Au point A, $5 = 25\,a + 5\,b$.
Au point B, $-0{,}2 = a + b$.
On résout le système obtenu et on trouve $a = 0{,}3$ et $b = -0{,}5$.
L'équation de la parabole est $y = 0{,}3\,x^2 - 0{,}5\,x$.

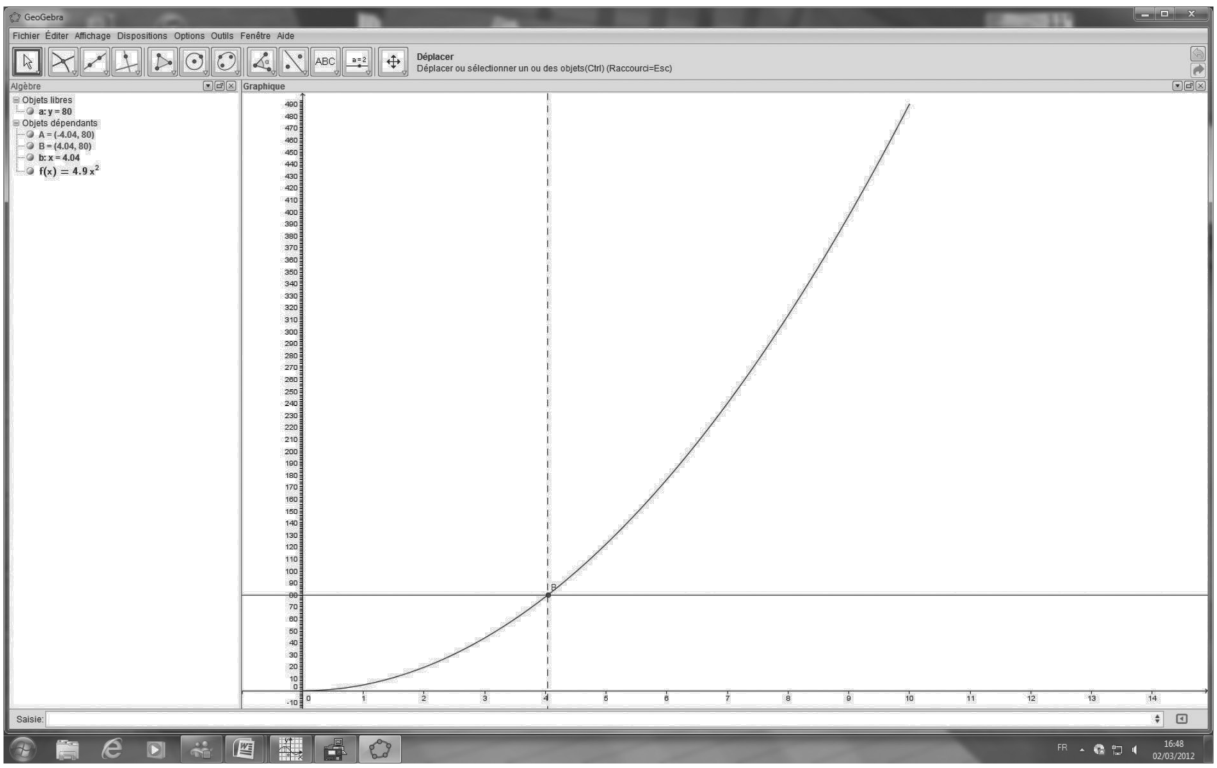
Je me teste

(livre élève pages 137 et 138)

EXERCICE 1

La trajectoire d'une balle lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 80 mètres peut être modélisée par la fonction *f*, définie sur l'intervalle [0 ; 10] par : $f(x) = 4{,}9x^2$.

1 Représenter graphiquement la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 10] (méthode au choix).



2 Compléter le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 10].

x	0	10
$f(x)$	0 ↗	490

3 Donner une valeur approchée de l'abscisse du point pour lequel $f(x) = 80$: $x \approx 4$

4 Combien de temps la balle met-elle pour toucher le sol ? Justifier la réponse.

Il faudra environ 4 secondes à la balle pour toucher le sol puisque la hauteur de chute est 80 m.

5 Si la balle est lâchée d'une hauteur de 160 m, le temps de chute doublera-t-il ?

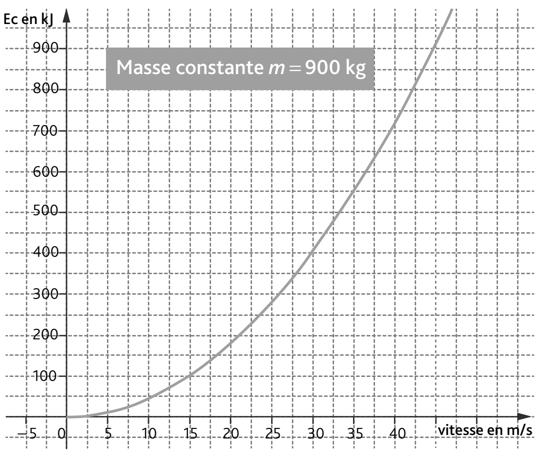
Non, la chute durerait moins de 6 secondes.

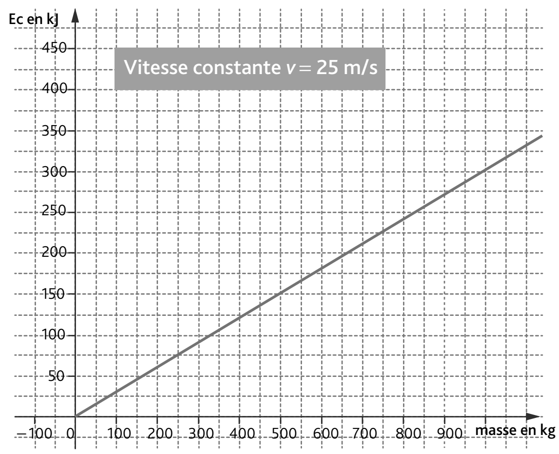
A

Appelez le professeur pour argumenter oralement la réponse 5.

EXERCICE 2

Tout véhicule en mouvement acquiert une certaine forme d'énergie appelée énergie cinétique E_c liée à la vitesse et à la masse du véhicule. Les deux graphiques ci-dessous indiquent l'évolution de E_c en fonction de la vitesse pour le premier et en fonction de la masse pour le second.





1 L'énergie cinétique E_c est-elle proportionnelle à la vitesse ? .... Non ....

2 L'énergie cinétique E_c est-elle proportionnelle à la masse du véhicule ? ...... Oui ....

A

Appelez le professeur pour justifier oralement vos réponses.

3 Déterminer graphiquement la vitesse permettant d'obtenir une énergie cinétique de 400 kJ (kilojoules). .. $v = 30$ m/s ....

4 Entourer l'expression de l'énergie cinétique E_c, en kJ, qui vous paraît convenir :

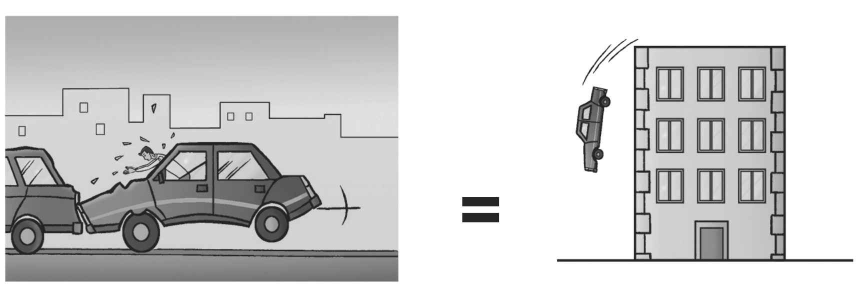
a. En fonction de la vitesse v :

$E_c = 450$ $\qquad$ $E_c = 0{,}450 \times v$ $\qquad$ $E_c = 0{,}450 \times v^2$

b. En fonction de la masse m :

$E_c = 312$ $\qquad$ $E_c = 0{,}312 \times m$ $\qquad$ $E_c = 0{,}312 \times m^2$

5 On désire vérifier les informations fournies par ce document publié par la sécurité routière :



choc à 50 km/h = chute du 3e étage

L'énergie E_p, en joules, développée lors de la chute verticale d'un objet de masse m, d'une hauteur h, se calcule à l'aide de la relation suivante :

$$E_p = m \times g \times h \qquad (m \text{ en kg, } h \text{ en m et } g = 9{,}8 \text{ N/kg}).$$

a. Calculer l'énergie E_p développée par un véhicule de masse 900 kg chutant d'une hauteur de 10 m (correspondant à un 3e étage).

$E_p = 900 \times 9{,}8 \times 10$

$E_p = 88\,200$ J

b. Calculer l'énergie cinétique E_c, en joules, emmagasinée par un véhicule de masse $m = 900$ kg, lors d'un déplacement à la vitesse $v = 14$ m/s (≈ 50 km/h), à l'aide de la relation $E_c = \frac{1}{2} m \times v^2$.

$E_c = \frac{1}{2} \times 900 \times 14^2$

$E_c = 88\,200$ J

c. En utilisant les résultats précédents, commenter le dessin de la sécurité routière.

L'énergie acquise par un véhicule roulant à 50 km/h est égale à l'énergie développeé par ce véhicule s'il chutait d'une hauteur de 3 étages.

36 Vocabulaire des probabilités

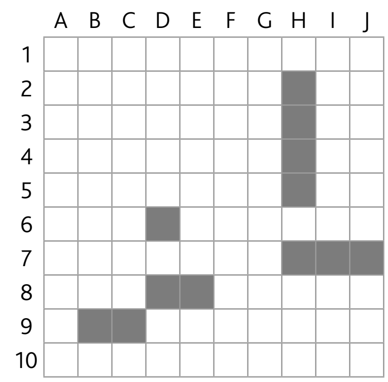
(livre élève pages 139 et 140)

Capacités
- Connaître le vocabulaire de base des probabilités
- Calculer une probabilité dans une situation aléatoire simple

1 Définir une expérience aléatoire

Touché-coulé

**Vous jouez à la « bataille navale » contre un ordinateur.
La grille comporte 10 lignes, numérotées de 1 à 10, et 10 colonnes, de A à J.
Votre « flotte », représentée ci-contre, se compose d'un porte-avions (4 cases), d'un croiseur (3 cases), d'un contre-torpilleur (2 cases), d'un sous-marin (2 cases) et d'un torpilleur (1 case).
Au premier « tir », l'ordinateur, à l'aide de sa fonction « random », désigne une case « au hasard ».**



1. Combien y a-t-il de résultats possibles ? Il y a 100 résultats possibles.

2. Le choix de l'ordinateur est-il prévisible ? Non.

Nous sommes dans la situation d'une **expérience aléatoire**.

2 Modéliser une expérience aléatoire

L'expression « au hasard » signifie que l'on modélise la situation précédente (premier tir de l'ordinateur à la bataille navale) en supposant que chaque case de la grille a la même probabilité d'être désignée.

1. Quelle est la probabilité que l'ordinateur désigne la case D3 ? 0,01.

2. Quelle est la fréquence des cases en rouge sur la grille ? La fréquence des cases grisées est 0,12.

3. Quelle probabilité a l'ordinateur de toucher un de vos vaisseaux ? 0,12.

4. Quelle probabilité a l'ordinateur de tirer dans l'eau ? $1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

**Pas de chance ! L'ordinateur a désigné la case I7 et votre croiseur est touché par le milieu.
Dans ce cas, au deuxième tir, l'ordinateur désigne « au hasard » une case voisine (par un côté ou un sommet).**

5. Combien y a-t-il de résultats possibles ? Il y a 8 résultats possibles.

6. Quelle est la probabilité de chacun des résultats ? $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

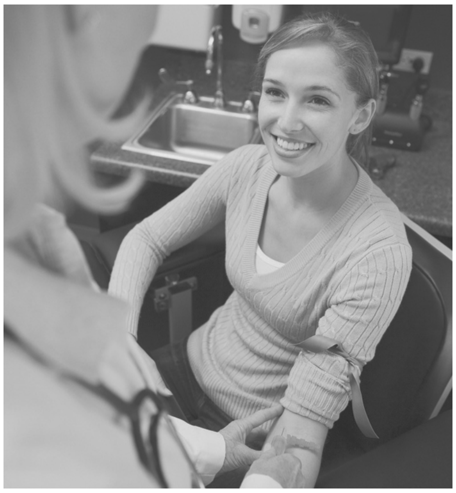
7. Quelle est la probabilité que l'ordinateur touche à nouveau votre croiseur ? $\frac{2}{8} = 0{,}25$.

Une **probabilité** est un **nombre compris entre 0 et 1**, où 1 correspond à la certitude.

Comment calculer une probabilité dans une situation aléatoire simple ?

Le tableau suivant donne la répartition des groupes sanguins dans la population française.

Groupe	A^+	A^-	B^+	B^-	AB^+	AB^-	O^+	O^-
Fréquence	0,39	0,06	0,07	0,02	0,02	0,01	0,37	0,06



a. On prend une personne « au hasard ». Quelle est la probabilité que cette personne appartienne au groupe O^- ?

L'expression « au hasard » signifie que chaque Français a la même probabilité d'être choisi. Dans ce cas « simple », la probabilité correspond à la fréquence du groupe O^- dans la population.

- La probabilité que cette personne appartienne au groupe O^- est :

0,06.

b. Un patient du groupe A^- ne peut recevoir du sang que des groupes O^- et A^-. Quelle est la probabilité que ce patient puisse recevoir du sang d'une personne prise au hasard ?

Une personne ne peut avoir deux groupes sanguins différents. Pour obtenir la fréquence de plusieurs groupes sanguins, on ajoute la fréquence de chaque groupe. Dans ce cas simple, on fait de même pour la probabilité.

- La probabilité qu'une personne du groupe A^- puisse recevoir du sang d'une personne prise au hasard est :

$0{,}06 + 0{,}06 = 0{,}12$.

RÉPONSES

Exercices

1 La probabilité que la bille soit verte est $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

2 La probabilité que Kevin prenne un bonbon rouge est $\frac{6}{25} = 0{,}24$.

3 La probabilité que la roue s'arrête sur le secteur rouge est $\frac{36}{360} = 0{,}1$.

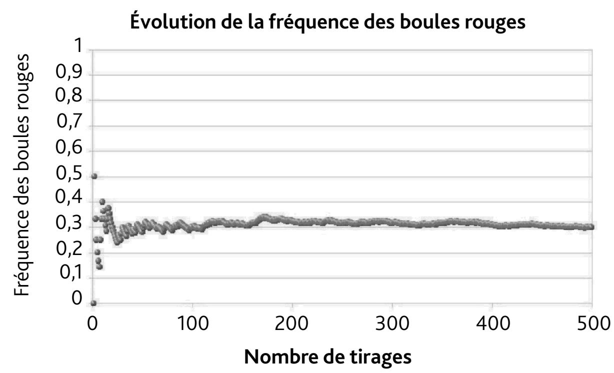
37 Stabilisation des fréquences

(livre élève pages 141 et 142)

Capacités
- Observer la stabilisation des fréquences
- Évaluer une proportion inconnue d'après la stabilisation des fréquences

1 Effectuer des tirages répétés dans une urne dont on connaît la composition

On effectue 500 tirages au hasard et avec remise dans une urne contenant 60 % de boules rouges et 40 % de boules blanches. Le graphique ci-dessous fournit l'évolution de la fréquence des boules rouges tirées depuis le début de l'expérience.



1. Le premier point, en haut à gauche du graphique, a pour coordonnées (1 ; 1). Quelle est la couleur de la première boule tirée ? Rouge.

2. Le deuxième point a pour coordonnées (2 ; 0,5). Quelle est la couleur de la deuxième boule tirée ?

Blanche.

3. Comment le graphique permet-il de dire qu'après 100 tirages, on avait environ 55 % de boules rouges ?

Le point d'abscisse 100 a pour ordonnée environ 0,55.

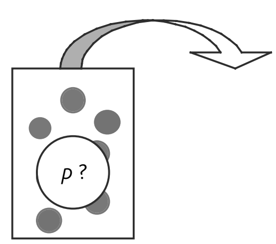
4. Vers quelle valeur la fréquence des boules rouges se stabilise-t-elle lorsque le nombre de tirages augmente ?

La fréquence des boules rouges se stabilise vers la valeur 0,6.

Lorsque **la taille de l'échantillon augmente**, la fréquence *f* d'un événement dans l'échantillon a tendance à se stabiliser.

2 Effectuer des tirages répétés dans une urne dont on ignore la composition

Une urne contient des boules rouges et des boules bleues. On ignore la proportion *p* des boules rouges dans l'urne. On effectue 500 tirages au hasard et avec remise dans cette urne. Le graphique de la page suivante fournit l'évolution de la fréquence des boules rouges tirées depuis le début de l'expérience.



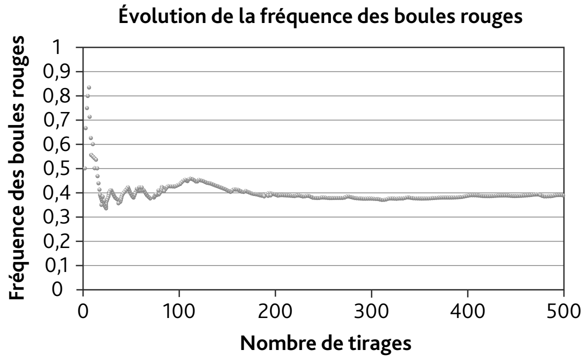
1. Vers quelle valeur semble se stabiliser la fréquence observée des boules rouges ?

La fréquence semble se stabiliser vers 0,4.

2. Quelle est, vraisemblablement, la fréquence *p* des boules rouges dans l'urne ? 0,4

3. D'après-vous, quel est le nombre de boules rouges dans l'urne si le nombre total de boules dans l'urne est 15 ?

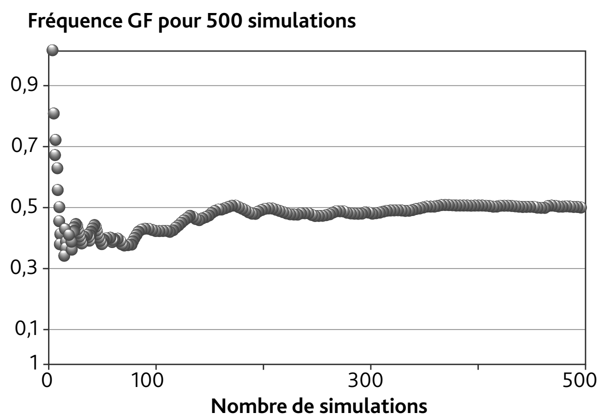
$15 \times 0{,}4 = 6$ boules rouges.



Si l'on ignore la proportion p de boules rouges dans une urne, on peut l'**estimer** par la valeur vers laquelle se **stabilise** la fréquence f des boules rouges lorsque **la taille de l'échantillon augmente**.

Comment évaluer une proportion inconnue en répétant une expérience ?

Parmi la population des couples ayant deux enfants, on cherche à connaître la proportion p de ceux qui ont une fille et un garçon. En supposant qu'à chaque naissance un couple a une chance sur deux d'avoir une fille ou un garçon, on a simulé 500 prélèvements au hasard de couples ayant deux enfants. Estimer la valeur de p d'après le graphique obtenu.



- D'après le graphique, la fréquence du résultat « un garçon et une fille » (GF), tend approximativement à se stabiliser autour de la valeur ....0,5.....................................
- On peut estimer que, parmi la population des couples ayant deux enfants, la proportion p de ceux qui ont une fille et un garçon est ....0,5.....................................

RÉPONSES

Exercice

a. La fréquence se stabilise vers la valeur 0,3.
b. L'urne contient vraisemblablement
$0,3 \times 10 = 3$ boules rouges.

38 Probabilité et fréquences

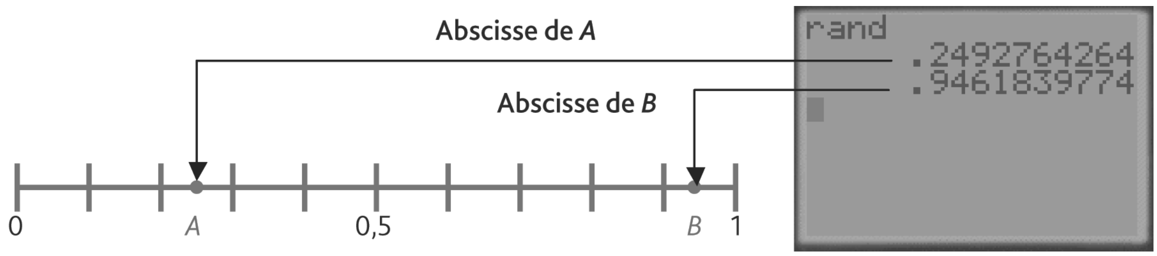
(livre élève pages 143 et 144)

Capacités
- **Évaluer une probabilité à partir des fréquences observées**
- **Faire preuve d'esprit critique face à une situation aléatoire**

1 Répéter une expérience aléatoire

Deux points au hasard

On considère l'expérience aléatoire suivante : à l'aide de la fonction « random » de la calculatrice, deux points *A* et *B* sont pris au hasard sur un segment de longueur 1. Le premier nombre est l'abscisse de *A* ; le second nombre est l'abscisse de *B*. On s'intéresse à l'événement *E* : « la longueur *AB* est supérieure à 0,5 ».



1. Pour l'expérience précédente, quelles sont, à 10^{-2} près, les abscisses des points *A* et *B* ?

Pour *A* : environ 0,25 , pour *B* : environ 0,95.

2. Dans le cas de l'expérience précédente, l'événement *E* est-il réalisé ? Oui car $AB = 0,7$.

3. À votre avis (sans étude mathématique), la probabilité de *E* est-elle égale, inférieure ou supérieure à 0,5 ?

On répond ce que l'on veut .

4. Réaliser cette expérience à l'aide d'une calculatrice. Donner, à 10^{-2} près, les abscisses des points *A* et *B* ainsi que la distance *AB* : Par exemple, $x_A \approx 0,46$; $x_B \approx 0,58$ et $AB \approx 0,58 - 0,46 = 0,12$.

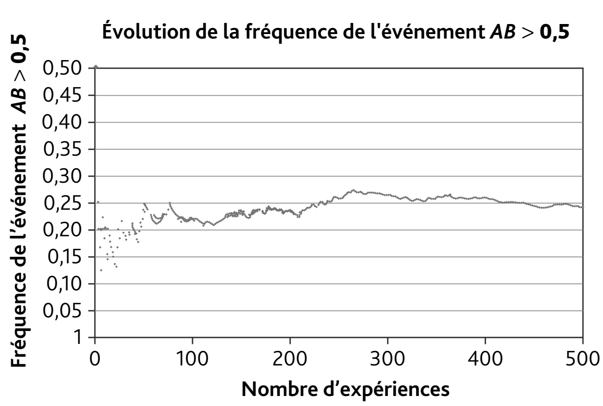
5. L'événement *E* est-il réalisé ? Dans le cas précédent, non.

6. Répéter dix expériences et calculer la fréquence de réalisation de l'événement *E*.

Résultat variable.

7. Regrouper le résultat obtenu avec ceux des autres élèves de la classe. Quelle est, pour la classe, la fréquence de réalisation de l'événement *E* ?
Le résultat obtenu devrait être proche de 0,25.

8. Le graphique ci-contre correspond à 500 expériences.
Qu'observe-t-on ? La fréquence de l'événement se stabilise vers 0,25.



2 Évaluer une probabilité par observation des fréquences

On reprend l'exemple précédent, où l'on s'intéresse à l'événement *E* : « la longueur *AB* est supérieure à 0,5 ».

1. D'après l'étude de la fréquence de réalisation de l'événement *E*, faite au paragraphe précédent, la probabilité de *E* est-elle égale, inférieure ou supérieure à 0,5 ?

La probabilité de *E* est inférieure à 0,5.

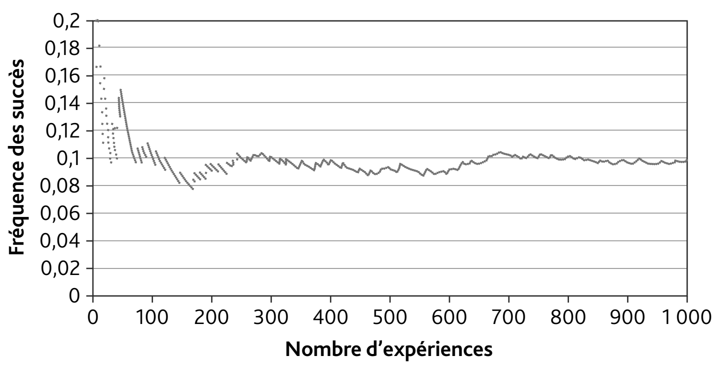
2. Pouvez-vous faire une évaluation plus précise de la probabilité de *E* ?

On peut évaluer la probabilité de *E* à 0,25

On peut prendre comme **probabilité** d'un événement le nombre vers lequel la fréquence de l'événement a tendance à se stabiliser, lorsqu'on répète, de façon indépendante, un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Comment évaluer une probabilité à partir des fréquences observées ?

À chaque essai, une machine à sous d'un casino a la même probabilité de faire gagner le joueur.
Le graphique ci-dessous indique la fréquence des succès pendant 1 000 essais successifs.
À combien évaluez-vous la probabilité de succès à cette machine à sous ?



- Vers la gauche du graphique, les fluctuations de la fréquence sont importantes car Le hasard a une grande influence sur un petit nombre d'expériences.

  Vers la droite du graphique, les fluctuations de la fréquence sont moins importantes. Il y a stabilisation.

- L'évaluation de la probabilité est donnée par l'ordonnée *y* à la droite du graphique. Elle est approximative. La probabilité de succès à cette machine à sous est environ 0,1.

RÉPONSES
Exercices

1 **a.** Faux.
b. Vrai.
c. Vrai.

2 **a.** Faux.
b. Faux
c. Vrai.

Compléments pour le professeur permettant le recul sur l'essentiel du chapitre « Probabilités »

Le contenu de ce paragraphe est uniquement destiné aux enseignants.

1. Vocabulaire des probabilités

Ce vocabulaire ne doit pas faire l'objet de « définitions », au sens mathématique du terme. On en est en effet incapable à ce niveau d'étude. Définir le terme « probabilité », dans le cadre de l'axiomatique de Kolmogorov, n'aurait sans doute guère de sens pour les élèves… Ceci n'empêche pas de travailler le concept. L'objectif étant de convaincre, par l'expérimentation, qu'un discours rationnel est légitime et efficace dans des situations incertaines. Il n'est pas utile de trop insister sur l'impossibilité des événements de probabilité nulle. Ce qui est vrai dans les cas discrets, les seuls au programme des baccalauréats professionnels, ne l'est plus pour les lois continues, à commencer par la loi « normale », qui seront par la suite rencontrées par certains élèves, notamment en sections de techniciens supérieurs. Pour une loi continue, la probabilité $P(X = k)$ qu'une variable aléatoire X prenne une valeur ponctuelle k est nulle, et pourtant on observe bien des valeurs ponctuelles.

2. Tirages répétés dans une urne

L'image de l'urne (de Bernoulli) est importante car c'est à elle que l'on peut se ramener dans le cadre du programme des baccalauréats professionnels. C'est une manière de « matérialiser » la probabilité recherchée : il s'agit de la fréquence p, inconnue, des boules rouges (par exemple) dans l'urne.

3. Stabilisation des fréquences et évaluation de la probabilité

Une question fréquemment posée est la suivante : « combien de fois faut-il répéter l'expérience (ou sa simulation) pour estimer la probabilité d'un événement ? ».
La réponse est, bien sûr, « ça dépend ». D'une part, il n'y a pas de certitude (on peut se fixer plus de 95 % de chances de faire une estimation correcte), d'autre part, cela dépend de la qualité de l'estimation visée. On peut préciser cette réponse en utilisant l'intervalle de fluctuation de plus de 95 % des échantillons de taille n, qui figure au programme de première : sous certaines conditions ($n \geqslant 30$, $n \geqslant 5$ et $n(1 - p) \geqslant 5$), plus de 95 % des échantillons de taille n fournissent une fréquence comprise entre $p-\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $p+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Prenons, par exemple, $p = 0,4$. On peut dire que plus de 95 % des simulations de taille 100 fournissent une fréquence comprise entre 0,3 et 0,5 (amplitude $\frac{2}{\sqrt{100}}$) ou encore que 95 % des simulations de taille 500 fournissent une fréquence comprise entre $0,4-\frac{2}{\sqrt{500}}\approx 0,355$ et $0,4+\frac{1}{\sqrt{500}}\approx 0,445$ (amplitude $\frac{2}{\sqrt{500}}$).

39 J'utilise un logiciel (tableur)

(livre élève pages 145 et 146)

Évaluer le risque de surbooking

On suppose que toute personne réservant une place d'avion a une chance sur 10 de ne pas se présenter. On dispose d'un avion de 50 places et on vend 53 billets. On souhaite évaluer la probabilité que se présentent plus de 50 passagers (*surbooking*).
Voir fichier « 09_surbooking_corrige.xls » ou « 09_surbooking_corrige.ods ».

1. Stabilisation des fréquences

Ouvrir le fichier « **09_surbooking.xls** » ou « **09_surbooking.ods** ».

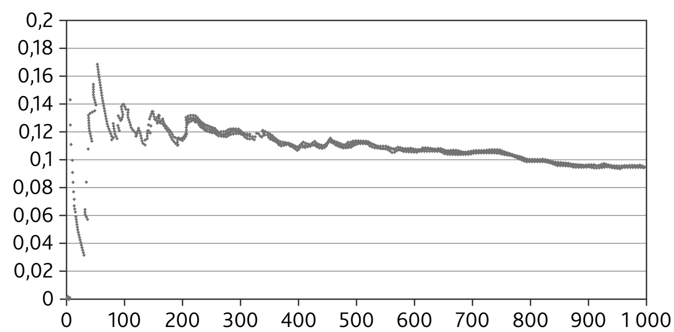
a. À quoi correspond la formule =ENT(ALEA()+0,9) figurant en cellule B9 ?

1 correspond à une personne qui se présente à l'embarquement
0 à une personne qui ne se présente pas.

b. À quoi correspond l'axe des abscisses du graphique (gradué de 0 à 1 000) ?

L'axe des abscisses correspond au nombre de simulations de 53 réservations.

Évolution de la fréquence de *surbooking* sur 1 000 simulations



À quoi correspond l'axe des ordonnées du graphique (gradué de 0 à 0,2) ?

L'axe des ordonnées correspond à la fréquence de *surbooking*.

Appuyer plusieurs fois sur la touche F9 et observer les graphiques.

c. Pourquoi la partie gauche du graphique est-elle très variable d'un graphique à l'autre ?

Sur un petit nombre de simulations, l'influence du hasard est importante.

Pourquoi la partie droite du graphique est-elle beaucoup moins variable d'un graphique à l'autre ?

Sur un grand nombre de simulations, la fréquence se stabilise.

2. Évaluation du risque de *surbooking*

a. Le risque de *surbooking* est la probabilité que se présentent plus de 50 passagers à l'embarquement.

D'après vos observations, ce risque est :

❏ supérieur à 0,2 ; ❏ supérieur à 0,12 ; ☒ compris entre 0,06 et 0,12 ; ❏ inférieur à 0,06

b. En effectuant davantage de simulations à l'aide de la touche F9, peut-on préciser l'évaluation du risque de *surbooking* (donner un encadrement d'amplitude 0,02) ?

Le risque de surbooking est compris entre 0,08 et 0,1.

A

Appelez le professeur pour présenter votre réponse.

J'utilise un logiciel (tableur)

Comparer estimation par simulation et calcul avec un arbre

Voir fichier « 09_attente_corrige.xls » ou « 09_attente_corrige.ods ».

1. Temps d'attente à pile ou face

On lance une pièce de monnaie, supposée équilibrée, jusqu'à obtenir « pile » et on considère l'événement E : « le temps d'attente de pile est supérieur à 3 lancers » (il faut lancer au moins 4 fois la pièce avant d'obtenir « pile »).

a. Avec une pièce de monnaie, répéter 10 fois l'expérience précédente. L'événement E s'est-il réalisé ?

On regarde si le premier « *pile* » arrive après plus de 3 lancers.

b. Pour évaluer la probabilité de E, on effectue des simulations avec un tableur.

- **Préparer un tableau comme celui-ci.**

E2 fx =SOMME(B2:D2)

	A	B	C	D	E
1		lancer 1	lancer 2	lancer 3	somme
2	simulation 1	0	1	1	2
3					

- **En cellule B2, entrer la formule =ENT(ALEA()+0,5) puis recopier vers la droite jusqu'en D2.**
- **En E2, faire la somme des cellules précédentes (il suffit de cliquer sur l'icône Σ).**

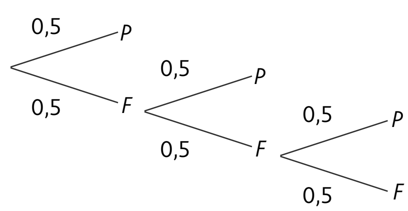
On suppose que 1 correspond à « pile ». Pour quelle valeur, affichée en E2, l'événement E est-il réalisé ? (Appuyer plusieurs fois sur F9.) *E* est réalisé lorsque E2 affiche 0.

- **Sélectionner les cellules de A2 à E2 puis recopier vers le bas jusqu'à la ligne 1 001 pour obtenir 1 000 simulations.**
- **Entrer dans une cellule vide, A1 par exemple, la formule =NB.SI(E2:E1001;"0")/1000 qui calcule la fréquence de réalisation de l'événement *E* sur les 1 000 simulations. En appuyant plusieurs fois sur F9, évaluer approximativement la probabilité de *E*.**

La possibilité de *E* est environ 0,1.

c. Comparaison avec le calcul

En multipliant les probabilités figurant sur le trajet FFF de l'arbre ci-contre (P = pile et F = face), calculer la probabilité de E et comparer au résultat de la question précédente.



0,5 × 0,5 × 0,5 = 0,125, cela confirme l'estimation précédente.

2. Temps d'attente d'une panne

Un matériel d'un certain type a chaque année une probabilité égale à 0,1 de tomber en panne durant l'année. On recherche la probabilité qu'il ne tombe pas en panne durant les trois premières années de fonctionnement.

a. Simulation et évaluation de la probabilité

- **Remplacer la formule en A1 par =ENT(ALEA()+0,1) puis recopier vers la droite jusqu'en D2 et vers le bas jusqu'à la ligne 1 001.**
- **En appuyant plusieurs fois sur F9, évaluer approximativement la probabilité recherchée.**

La probabilité recherchée vaut environ 0,7.

b. Comparaison avec le calcul

En utilisant un arbre, proposer un calcul confirmant le résultat précédent : 0,9 × 0,9 × 0,9 = 0,729

Exercices & Problèmes

Ⓡ *Exercices avec réponses en fin d'ouvrage.* ✱/✱✱ *Exercices plus difficiles.*

Exercices p. 149

1. QCM

a. Au prochain lancer, la probabilité de « pile » est égale à la probabilité de « face ».

b. 0,99.

c. On ne peut rien dire.

d. La probabilité d'obtenir un nombre pair vaut 2/6.

2. Vrai - faux

a. Faux

b. Vrai

c. Vrai

d. Vrai

› Connaître la signification d'une probabilité

3. La meilleure interprétation est la réponse c.

4. Ce qui exprime le mieux ce que veut dire le géologue est la proposition c.

5. a. Vrai ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Faux.

› Calculer une probabilité dans une situation aléatoire simple

6. La proportion des bonbons rouges dans le sachet A est $\frac{14}{20}=0,7$. La proportion des bonbons rouges dans le sachet B est $\frac{6}{8}=0,75$. C'est dans le sachet B que la probabilité de prendre un bonbon rouge est la plus grande.

7. a. La probabilité d'obtenir un nombre impair est 0,5 (c'est la proportion des faces impaires).

b. Il y a 2 faces, sur les 12, portant un multiple de 5. La probabilité d'obtenir un multiple de 5 est donc $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

c. Il y a 4 faces, sur les 12, portant un multiple de 3. La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est donc $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

8. 1. C'est l'affirmation c. qui indique le mieux le niveau de Sylvia.

2. La probabilité qu'une réponse prise au hasard soit fausse est $\frac{20}{100}=0,24$.

9. a. La probabilité que la fiche tirée soit celle d'un homme est $\frac{517}{1\,000}=0,517$.

b. La probabilité que la fiche tirée soit celle d'une femme est 1 – 0,517 = 0,483.

c. La probabilité que la fiche tirée soit celle d'une personne de moins de 65 ans est $\frac{866}{1\,000}=0,866$.

› Évaluer une probabilité à partir des fréquences

10. a. La fréquence se stabilise vers la valeur 0,7.

b. L'urne contient vraisemblablement $10 \times 0,7 = 7$ boules rouges.

11. a. La fréquence tend à se stabiliser vers la valeur 0,8 %, c'est-à-dire 0,008.

b. On évalue la probabilité de l'événement A à 0,008.

› Faire preuve d'esprit critique face à une situation aléatoire

12. a. Puisqu'on effectue des tirages avec remise, en secouant bien l'urne, la boule rouge a une chance sur cent de sortir au prochain tirage.

b. Dans le modèle de la crue centennale, il est incorrect d'affirmer que « la probabilité d'une telle catastrophe augmente d'année en année », puisque ce modèle suppose que chaque année la probabilité de la catastrophe est la même : 1/100.

13. 1. a. Ce sont des « face » (codés 0).

b. La probabilité de E est supérieure à 0,9.

2. Celle imaginée par l'homme est la table A (le « hasard » y est trop régulier, il n'y a pas de longue série – en ligne – de consécutifs égaux ; alors que la table B comporte une série de six 0 consécutifs).

Problèmes p. 152

› Problème 1

Santé au travail

1. La probabilité de prélever le dossier d'une personne atteinte de bronchite est $\frac{100}{500}=0,2$.

2. La probabilité de prélever le dossier d'une personne atteinte de bronchite parmi les dossiers des fumeurs est $\frac{60}{200}=0,3$.

Démarche d'investigation

› Problème 2

Un gars, une fille

Comme on suppose trois résultats possibles, certains peuvent penser que la « bonne » réponse est l'affirmation a). La simulation du 2. montre qu'il ne s'agit pas du bon modèle (on n'a pas équiprobabilité des trois résultats possibles).
La fréquence du résultat GF tend à se stabiliser vers la valeur 0,5.
On évalue la probabilité du résultat « un garçon et une fille » à 0,5.

Remarques pour le professeur
Du point de vue des probabilités, la situation peut être modélisée de deux façons. Soit un univers constitué de quatre issues {(G, G) ; (G, F) ; (F, G) ; (F, F)} avec équiprobabilité, soit un univers constitué de trois issues {GG, GF, FF} avec comme probabilités correspondantes 0,25 ; 0,5 ; 0,25. L'adéquation de ces modèles avec la réalité n'est pas du tout évidente et, en particulier, le modèle {GG, GF, FF} muni de l'équiprobabilité n'est pas simple à discréditer (voir « l'erreur » de d'Alembert à l'article croix ou pile de l'Encyclopédie).
Plutôt qu'un argument d'autorité, l'expérimentation permet de convaincre. Si les circonstances le permettent, on peut demander aux élèves de lancers deux pièces de monnaie et d'étudier la fréquence de l'événement « les pièces tombent sur des faces différentes, l'une sur pile, l'autre sur face ». Sur quelques expériences, difficile de trancher entre les partisans de 50 % et ceux de 33 %. En regroupant les résultats dans la classe, une première tendance doit se dessiner, qui sera affirmée par la simulation, sur une plus grande échelle.

› Problème 3

Pile-face ou face-face

Voir fichier « 09_un_pile_une_face_corrige.xls » ou « 09_un_pile_une_face_corrige.ods ».
La probabilité de gagner pour Kamel est $\frac{3}{4}$, celle de Loïc n'est que $\frac{1}{4}$.

Je me teste

(livre élève pages 153 et 154)

EXERCICE 1 Lancer de deux pièces

On dispose de deux pièces supposées bien équilibrées et indiscernables. On lance les deux pièces en même temps. Il y a trois résultats possibles à cette expérience aléatoire : deux « pile » (noté PP), deux « face » (noté FF), ou un « pile » et une « face » (noté PF).

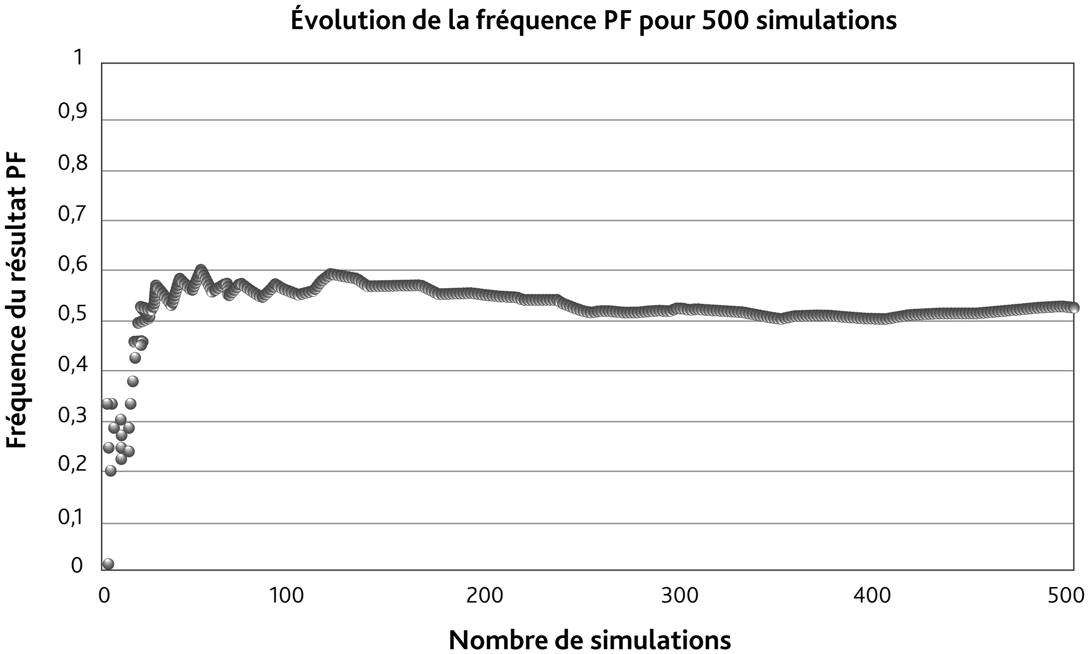
1 Quelle est, parmi les deux affirmations suivantes, celle qui est la plus proche de la vérité ?

a. On a une chance sur 3 d'avoir le résultat PF.

b. On a une chance sur 2 d'avoir le résultat PF.

Expliquer ce choix : dans le choix *a*, on suppose les 3 résultat équiprobables . La suite montrera que ce n'est pas le bon choix.

2 On a simulé la situation sur un tableur. Le graphique suivant indique l'évolution, sur 500 simulations, de la fréquence du résultat PF depuis la première simulation.



a. Vers quelle valeur, approximative, tend à se stabiliser la fréquence du résultat PF ?

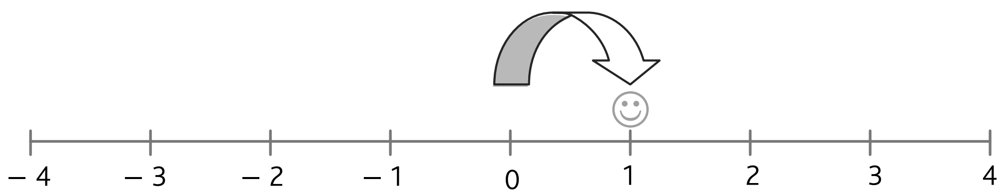
0,5

b. Estimer la probabilité du résultat PF.

On estime la probabilité de ce résultat à 0,5 (voir par rapport à la réponse donnée au 1).

EXERCICE 2 Puce savante

Une puce « savante » se déplace sur un axe gradué. À chaque saut, elle se déplace d'une unité, de manière aléatoire et équiprobable, vers la droite ou vers la gauche. Elle part de l'origine et effectue quatre sauts. On s'intéresse à l'événement *E* : « la puce est revenue au point de départ après quatre sauts ».



1 L'objectif est ici de réaliser à l'aide du tableur 1 000 simulations de l'expérience aléatoire, en organisant la feuille de calcul comme ci-dessous.

B2 =SI(ALEA()<0,5;-1;1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Simulation	Saut 1	Saut 2	Saut 3	Saut 4	Evénement E	Fréquence de E
2	1	-1	0	1	0	1	1
3	2	1	0	-1	-2	0	0,5
4	3	1	0	1	0	1	0,666666667

a. La cellule B2 contient la formule =SI(ALEA()<0,5;-1;1). Expliquer l'affichage obtenu.

Si le résultat donné par ALEA() est inférieur à 0,5, l'affichage est – 1, sinon, l'affichage est 1.

b. Pour la simulation 1, la cellule C2 contient la formule =B2+SI(ALEA()<0,5;-1;1).

Donner la formule à écrire dans la cellule D2 : = C2 + SI (ALEA() < 0,5 ; –1 ; 1)

Donner la formule à écrire dans la cellule E2 : = D2 + SI (ALEA() <0,5 ; –1 ; 1)

La cellule F2 contient la formule =SI(E2=0;1;0) qui affiche 1 lorsque la puce est revenue à l'origine et 0 sinon. La cellule G2 contient la formule =SOMME(F$2:F2)/A2.

c. Par recopie des cellules A2 à G2 vers le bas, réaliser les 1000 simulations demandées.

A

Appelez le professeur pour exposer vos simulations.

2 Évaluer la probabilité de l'événement *E*.

Les fréquences se stabilisent vers la valeur 0,4. On peut estimer la probabilité de *E* à environ 0,4.

40 Aires et périmètres de surfaces usuelles

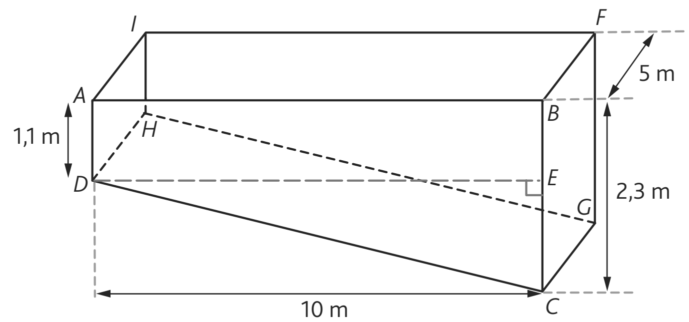
(livre élève pages 155 et 156)

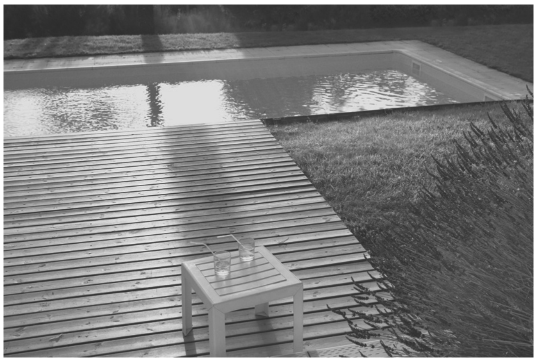
Capacité
- Calculer l'aire d'une surface

1 Calculer l'aire d'un rectangle et l'aire d'un carré

Choix d'un carrelage pour une piscine

Une entreprise spécialisée doit installer, dans le jardin de Ludivine, une piscine dont les dimensions sont données par le schéma ci-dessous :





Le fond et les côtés de la piscine seront carrelés. Pour établir le devis, l'entreprise doit connaître la surface totale à carreler.

1. Calculer la hauteur EC : $EC = BC - BE = 2{,}3 - 1{,}1$ soit $EC = 1{,}2$ m.

2. Calculer la longueur CD dans le triangle DEC ; arrondir au centimètre : $CD = \sqrt{10^2 + 1{,}2^2} \approx 10{,}07$ soit $CD = 10{,}07$ m.

3. En considérant le triangle DEC comme étant la moitié d'un rectangle, déterminer la surface totale à carreler.
Expliquer la démarche : $2 \times A_{ABCD} = 2 \times (AB \times AD + \frac{1}{2} DE \times EC) = 34$ m^2

$A_{AIDM} + A_{DHGC} + A_{BFGC} = 1{,}1 \times 5 + 10{,}07 \times 5 + 2{,}3 \times 5 = 67{,}35$ m^2

soit une aire totale de 101,35 m^2.

L'entreprise propose habituellement trois modèles de carrelage.
Ils sont vendus par paquets de 1,25 m^2.
Ludivine ne veut pas dépasser un budget de 1 200 € pour le carrelage.

Type de carrelage	Prix d'un paquet (en €)
N° 1	6,50
N° 2	11,15
N° 3	16,80

4. Quel(s) type(s) de carrelage peut-elle choisir ?
Il faut $101{,}35 \div 1{,}25 = 81{,}08$ soit 82 paquets. Prix maximal d'un paquet
$1\,200 \div 82 = 14{,}63$ €. Elle pourra choisir du carrelage de type n° 1 et n° 2.

2 Calculer la longueur d'un cercle et l'aire d'un disque

Table de jardin

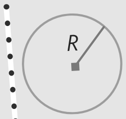
Ludivine veut recouvrir sa table de jardin d'une mosaïque et le tour d'une bande de protection en gomme molle. Le plateau de la table de jardin est un disque de diamètre 120 cm.

1. Quelle longueur de bande de protection doit prévoir Ludivine ?

$r = \frac{120}{2} = 60$ cm ; $p = 2 \times \pi \times 60 \approx 377$ cm

2. Quelle est l'aire du plateau à recouvrir ?

$A = \pi \times (60)^2 = 11\,309{,}7$ cm^2 ; soit $A = 1{,}13$ m^2

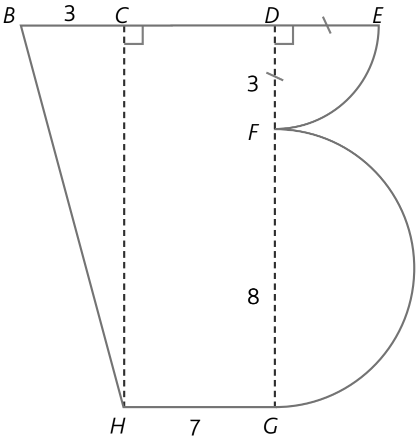


$p = 2 \times \pi \times R$

$A_{disque} = \pi \times R^2$

Comment calculer l'aire d'une figure complexe ?

Calculer l'aire de la figure ci-contre. Les dimensions sont en mètres.



- Décomposer la figure en morceaux dont on sait calculer l'aire.

  Aire du triangle BCH : $A_1 = \frac{BC \times CH}{2} = \frac{3 \times (8+3)}{2}$

  $A_1 = 16{,}5$ m^2.

  Aire du rectangle $CDGH$: $A_2 = 11 \times 7 = 77$ m^2.

  Aire du quart de disque de centre D et de rayon 3 m :

  $A_3 = \frac{\pi \times 3^2}{4} = 7{,}07$ m^2.

  Aire du demi-disque de diamètre 8 m (donc de rayon 4 m) :

  $A_4 = \frac{\pi \times 4^2}{2} = 25{,}13$ m^2.

- Additionner ces différentes aires pour obtenir l'aire totale.

  $A_{totale} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 16{,}5 + 77 + 7{,}07 + 25{,}13$

  $A_{totale} = 125{,}7$ m^2.

RÉPONSES

Exercices

1 $A = 25$ m^2.

2 $A = 925$ cm^2.

3 $A = 25\pi \approx 78{,}54$ m^2.

4 **a.** $A = 15\,625$ m^2.

b. $A_{socles} = 4 \times 25^2 = 2\,500$ m^2.

5 $A_{rouge} = \pi \times 25^2 - 35 \times 9 \approx 1\,648{,}50$ cm^2.

6 $P = 2 \times 1{,}10 + 2 \times \pi \times 0{,}40 \approx 4{,}71$ m.

$A = 1{,}10 \times 0{,}80 + \pi \times 0{,}40^2 \approx 1{,}383$ m^2.

Capacité
• Calculer le volume d'un solide

41 Volumes de solides usuels

(livre élève pages 157 et 158)

1 Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle

Choix d'une pompe d'une piscine

Pour choisir la pompe de la piscine, il faut connaître le volume de celle-ci (voir le schéma de la page 155). On considère que la piscine peut être décomposée en un parallélépipède rectangle et un prisme droit. Le prisme, de base *DEC*, est la moitié d'un parallélépipède rectangle.

1. Déterminer le volume total de la piscine : $V = AD \times AB \times AI + \frac{1}{2} DE \times EC \times CG$;

$V = 1{,}1 \times 10 \times 5 + \frac{1}{2} \times 10 \times 1{,}2 \times 5$; $V = 85$ m^3.

Une bonne pompe doit pouvoir faire circuler toute l'eau de la piscine au moins quatre fois par jour.

Nom de l'appareil	« Oclair »	« Ondine »	« Pulsar »	« Ultra flow »
Débit de la pompe	8,5 m^3/h	12,5 m^3/h	16 m^3/h	19,5 m^3/h

2. Indiquer, en justifiant le choix, le nom de l'appareil le plus adapté :

$4V = 340$ m^3 $\frac{4V}{24} = 14{,}2$ m^3/h. Il s'agit du modèle « Pulsar ».

2 Calculer le volume d'un cube

Le bac à compost

Un litre (L) correspond à 1 000 centimètres cubes (cm^3).

Philippe réalise un bac à compost pour les déchets de son jardin. Il a une forme cubique de dimensions intérieures 90 cm.

1. Calculer le volume intérieur du bac à compost :

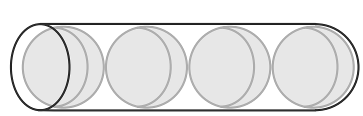
$V = 90 \times 90 \times 90 = 90^3$; $V = 729\ 000$ cm^3.

2. Exprimer, en litres, la contenance du bac à compost :

$V = 729\ 000$ cm^3 $= 729$ L.

3 Calculer le volume d'un cylindre et le volume d'une boule

Tube de balles de tennis



Emma a acheté un tube, de quatre balles de tennis. Le tube de balles est un cylindre de hauteur 26,5 cm et de diamètre 6,8 cm. Chaque balle de tennis est assimilée à une boule de diamètre 6,5 cm.

1. Le diamètre du tube de balles est 6,8 cm, donc son rayon est $r = \frac{6,8}{2} = 3,4$ cm.

Les bases du cylindre sont des disques égaux.

2. Calculer l'aire d'une base $A_{base} = \pi \times 3,4^2 = 11,56\,\pi$.

$A_{base} \approx 36,32$ cm^2.

La formule du volume du cylindre est : $V_{cylindre}$ = aire de la base × hauteur.

3. Calculer, à l'aide de cette formule, le volume du tube de balles : $V = 11,56\,\pi \times 26,5$

$V = 306,34\,\pi = 962,365$ cm^3

La formule du volume d'une boule est : $V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$.

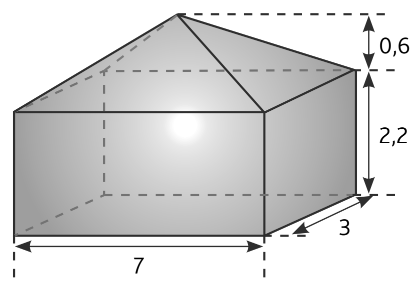
4. Le diamètre d'une balle de tennis est 6,5 cm, donc son rayon est $r' = \frac{6,5}{2} = 3,25$ cm

5. Calculer, à l'aide de cette formule, le volume d'une balle de tennis :

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times (3,25)^3 \approx 143,793$ cm^3

Comment utiliser des formules de calcul de volumes ?

a. Un chapiteau a la forme ci-contre. Les dimensions sont en mètres. Calculer le volume disponible sous le chapiteau.



- Décomposer la figure en morceaux dont on sait calculer le volume.
  Volume V_1 du parallélépipède rectangle :
  $V_1 = 7 \times 3 \times 2,2 = 46,2$ m^3.
  Volume V_2 du toit pyramidal :
  La formule du volume d'une pyramide est : $V_{pyramide} = \frac{1}{3}$ × aire de la base × hauteur.
  La base de la pyramide est un rectangle d'aire : $7 \times 3 = 21$ m^2.
  D'où : $V_2 = \frac{1}{3} \times 21 \times 0,6 = 4,2$ m^3.
- Additionner ces différents volumes pour obtenir le volume total.
  $V_{total} = V_1 + V_2 = 46,2 + 4,2 = 50,4$ m^3.

b. Un bloc de béton parallélépipédique a un volume de 5,4 m^3. Sachant que sa longueur mesure 1,8 m et sa largeur 0,8 m, calculer sa hauteur.

La formule du volume du parallélépipède rectangle est : $V = L \times l \times h$.

- Remplacer les lettres connues par leur valeur : $5,4 = 1,8 \times 0,8 \times h$.
- Résoudre l'équation d'inconnue h : $h = 5,4 \div (1,8 \times 0,8)$; $R = 3,75$
- Conclure : la hauteur du bloc de béton est de 3,75 m.

RÉPONSES

Exercices

1 $V = 42,875$ cm^3.

2 $V = 22\,812,5$ cm^3.

3 **a.** $A = 3\,465$ m^2.

b. $V_{goudron} = A \times 0,08 = 277,2$ m^3.

Capacité
- Calculer avec une échelle

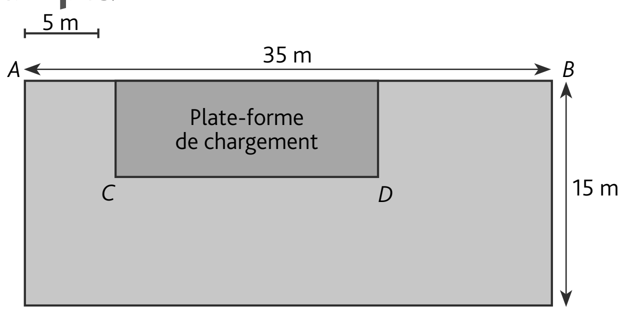
42 Échelle – Coefficient d'agrandissement

(livre élève pages 159 et 160)

1 Calculer et utiliser l'échelle d'un plan

Plate-forme de chargement

Voici le plan simplifié d'un entrepôt de marchandises.
Pour dessiner ce plan, les dimensions de l'entrepôt ont été réduites dans une proportion à déterminer.
La longueur réelle de l'entrepôt est de 35 m.



1. Mesurer la longueur AB sur le plan : AB = ... 7 cm ....

2. Quelle est la longueur réelle représentée par 1 cm sur le plan ? ...... 1 cm représente 5 m ......

3. Exprimer ce résultat en cm : 1 cm sur le plan représente ... 500 .... cm.

L'**échelle** du plan est donnée par le rapport $\dfrac{\textbf{distance sur le plan}}{\textbf{distance en grandeur réelle}}$.

4. En déduire l'échelle du plan sous la forme d'une fraction de numérateur 1 : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{500}$

5. Les dimensions sur le plan sont ...... 500 ...... fois plus petites que les dimensions réelles.

On veut connaître les dimensions réelles de la plate-forme de chargement.

6. Mesurer la longueur CD de la plate-forme sur le plan : CD = ... 3,5 cm ......

7. La longueur réelle de la plate-forme est ...... 500 ...... plus grande que celle mesurée sur le plan.
Calculer la longueur réelle de la plate-forme. Donner le résultat en mètres.
3,5 × 500 = 1 750 cm . La longueur de la plate-forme est de 17,5 m.

2 Appliquer un coefficient d'agrandissement à une figure

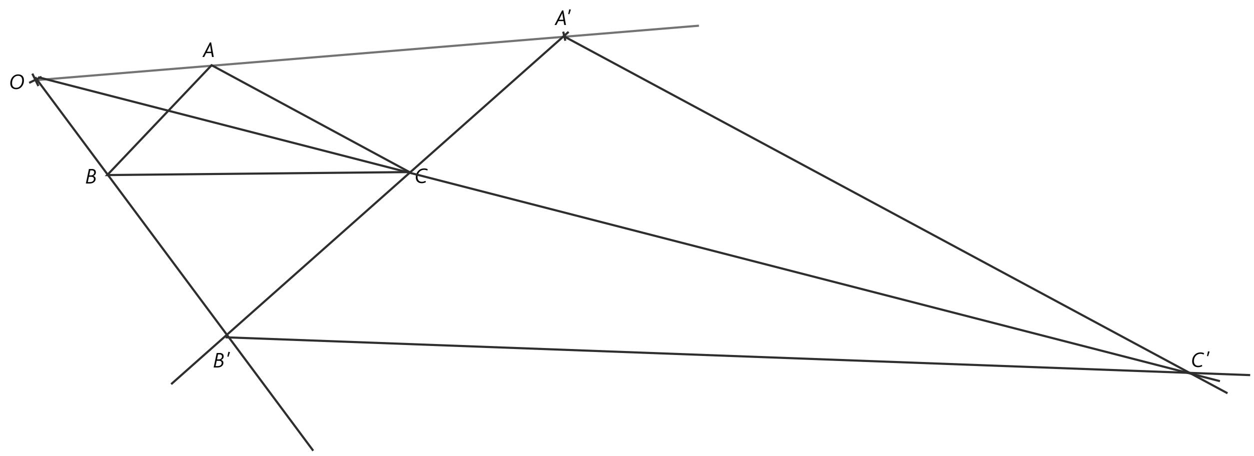
Soit ABC un triangle tel que $AB = 2$ cm et $AC = 3$ cm, $BC = 4$ cm.
On veut réaliser un agrandissement du triangle ABC en multipliant par 3 ses dimensions.

Un point O, extérieur au triangle, et la demi-droite $[OA)$ sont déjà tracés (voir page 160).
Le point A' de la demi-droite $[OA)$ tel que $OA' = 3OA$ est déjà placé.

1. Construire les demi-droites $[OB)$, $[OC)$.

2. Placer le point B' de la demi-droite $[OB)$ tel que $OB' = 3OB$ et le point C' de la demi-droite $[OC)$ tel que $OC' = 3OC$. Puis tracer le triangle $A'B'C'$.

3. Vérifier à la règle et à l'équerre que $(A'B')$ est parallèle à (AB), $(B'C')$ parallèle à (BC) et $(A'C')$ parallèle à (AC).



4. Mesurer les côtés : $A'B'$ = ...6....... cm ; $B'C'$ = ...9....... cm ; $A'C'$ = ...12....... cm.

5. Comparer avec les mesures des côtés du triangle ABC : ....

Les mesures des côtés du triangle ABC sont trois fois plus grandes que les mesures des côtés de ABC.

Le triangle $A'B'C'$ est un **agrandissement** du triangle ABC de **coefficient** 3.

Comment calculer avec une échelle ?

a. Un cadastre est à l'échelle $\frac{1}{2\,000}$.

La largeur d'un terrain sur ce plan est 9 cm. Quelle est la largeur réelle du terrain ?

- Placer les informations dans un tableau de proportionnalité.
- En déduire la valeur cherchée.

Distance carte en cm	1	9
Distance réelle en cm	2 000	D ?

...1.......$\times D =$ ...9.......$\times$ ...2 000... D'où $D =$ ...9.......$\times \frac{2\,000}{1}$

$D =$ ......18 000...... cm = ...180........... m.

b. La largeur réelle d'un chemin est 4 m. Quelle est sa largeur sur le plan ?

- Convertir les distances dans la même unité.
  La largeur du chemin est 4 m, soit ....400... cm.
- Placer les informations dans un tableau de proportionnalité.
- En déduire la valeur cherchée.

Distance carte en cm	1	d ?
Distance réelle en cm	2 000	400

...2 000...$\times d =$ ...1.......$\times$ ...400... D'où $d =$ ...400...$\div$ ...2 000... ; $d =$ ...0,2..... cm = ...20..... mm.

RÉPONSES

Exercices

1 $e = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

2 **a.** $d = 1{,}6$ cm.

b. $D = 17{,}50$ m.

3 $D_{\text{Rouen-Vernon}} = 65$ km.

43 Agrandissement d'une surface, d'un volume

(livre élève pages 161 et 162)

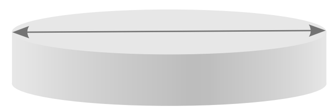
Capacité
- Utiliser un coefficient d'agrandissement ou de réduction pour un calcul d'aire ou de volume

1 Agrandir une surface

Pat et les galettes

Pat Hissier fait des galettes pour les fêtes. Toutes les galettes ont la même hauteur et l'on considère que la hauteur est constante sur toute la surface de la galette. Les plus petites galettes que Pat confectionne sont prévues pour deux personnes et ont un diamètre de 16 cm.

Diamètre = 16 cm



1. Le rayon de cette galette est $r =$ ...8....... cm.

2. Calculer l'aire A de cette galette : ....

$A = \pi r^2 = 64\pi$; $A \approx 201{,}1$ cm^2

Il confectionne aussi, sur commande, des galettes ayant un diamètre trois fois plus important.

3. Le rayon de cette galette est $r' =$ ...24....... cm.

4. Calculer l'aire A' de cette galette : ....

$A' = \pi r'^2 = 576\pi$; $A' \approx 1\,809{,}6$ cm^2

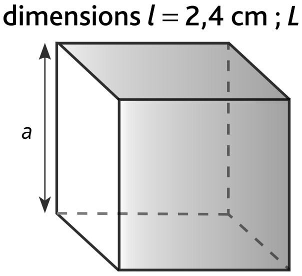
5. Par quel nombre est multipliée l'aire de la galette, lorsqu'on multiplie son rayon par trois ? ...Par 9.............

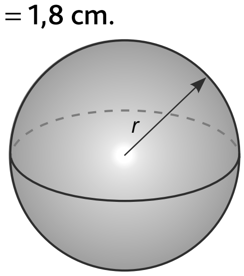
6. Si la petite galette est prévue pour deux personnes, alors la plus grande galette est prévue pour ...18...... personnes.

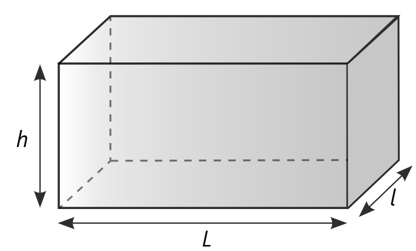
7. Donc, si une galette a un diamètre double de celui de la galette prévue pour deux personnes, alors la grande galette est prévue pour ...8....... personnes.

2 Agrandir un volume

Soient un cube d'arête $a = 2{,}5$ cm, une boule de rayon $r = 2$ cm et un parallélépipède rectangle ayant pour dimensions $l = 2{,}4$ cm ; $L = 4$ cm ; $h = 1{,}8$ cm.







1. Calculer le volume de chacun de ces solides.

$V_c = 2{,}5^3 = 15{,}625$ cm^3 ; $V_s = \dfrac{4}{3}\pi \times 2^3 = 33{,}51$ cm^3 ; $V_p = 2{,}4 \times 4 \times 1{,}8 = 17{,}28$ cm^3.

$V_C =$ ..15,625.. cm^3 ; $V_S =$ ...33,51... cm^3 ; $V_P =$ ...17,28... cm^3.

On multiplie les dimensions du cube par 2, le rayon de la boule par 3 et toutes les dimensions du parallélépipède rectangle par 4.

2. Calculer le nouveau volume V' de chacun de ces solides.

$V'_c = 5^3 = 125$ cm³ ; $V'_s = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 904{,}78$ cm³ ; $V'_p = 9{,}6 \times 16 \times 7{,}2 = 1\,105{,}92$ cm³

$V'_c = 125$ 904,78 cm³ ; $V'_s = 1\,105{,}92$ cm³ ; $V'_p =$ cm³.

3. Calculer les rapports : $\frac{V'_C}{V_C} = \frac{125}{22{,}5} = 8$; $\frac{V'_S}{V_S} = \frac{904{,}78}{33{,}51} = 27$; $\frac{V'_P}{V_P} = \frac{1\,105{,}92}{17{,}28} = 64$.

4. Que représentent ces valeurs par rapport aux nombres 2, 3 et 4 ? 8 est le cube de 2, 27 est le cube de 3 et 64 est le cube de 4.

5. Que se passe-t-il pour le volume d'un solide, lorsqu'on multiplie toutes ses dimensions par un même nombre k ?

Le volume est multiplié par k^3.

Comment utiliser le coefficient de réduction ou d'agrandissement lors du calcul de l'aire d'une surface ou du volume d'un solide ?

Soit un pavé dont on multiplie toutes les dimensions par 2,5. Calculer :

a. par quel nombre les aires des faces sont multipliées ;

b. par quel nombre le volume du pavé est multiplié.

- On cherche dans l'énoncé la valeur du coefficient d'agrandissement.
  Le coefficient d'agrandissement est $k = 2{,}5$.

- On identifie, dans la question, s'il s'agit d'une aire ou d'un volume pour déterminer le coefficient multiplicateur à appliquer.

a. Il s'agit de l'aire des faces. Donc le coefficient multiplicateur à appliquer est k^2.

$k^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$ Les aires des faces sont multipliées par 6,25

b. Il s'agit du volume du solide. Donc le coefficient multiplicateur à appliquer est k^3.

$k^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625$ Le volume du solide est multiplié par 15,625

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** Un agrandissement car $k > 1$.
b. Par $k^2 = 2{,}25$.
c. Par $k = 1{,}5$.

2 **a.** Une réduction car $k = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 < 1$.
b. Par $k^2 = 0{,}16$.
c. Par $k = 0{,}4$.

3 **a.** Une réduction car $k = 0{,}75 < 1$.
b. Par $k^2 = 0{,}5625$.
c. Par $k^3 = 0{,}421875$.

4 **a.** $k = 4$.
b. Par $k^3 = 64$.

5 **a.** Par $k = \sqrt{49} = 7$.
c. Par $k = 7$.

6 $k = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$. Donc on divise le volume par 216.
$v = 60$ cm³.

44 J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Découvrir le théorème du « papillon »

(livre élève pages 163 et 164)

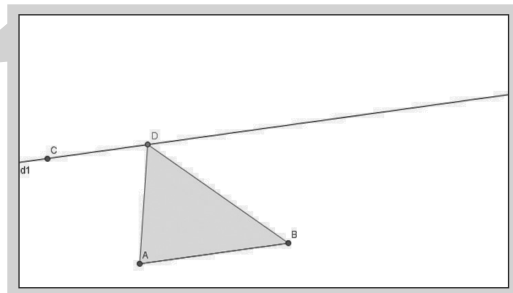
La première partie va permettre d'établir une propriété relative à l'aire d'un triangle.

La seconde partie permettra de découvrir le théorème du « papillon ».

Voir fichier « 10_corrige_theoremepapillon.ggb ».

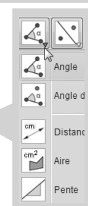
1. Propriété relative à l'aire d'un triangle

a. Construction de la figure



- **Placer trois points *A*, *B* et *C* non alignés.**
- **Tracer le segment [*AB*].**
- **Tracer la parallèle à (*AB*) passant par *C*.
  Nommer cette droite d_1.**
- **Placer sur d_1 un point *D*.**
- **Tracer, à l'aide de l'outil *Polygone*, le triangle *ABD*.**

b. Constatation



- **Afficher l'aire du triangle *ABD* en sélectionnant l'outil *Aire* et en cliquant à l'intérieur du triangle. L'aire du triangle *ABD* vaut : A_{ABD} =** … 9,28 par exemple …
- **Déplacer, sur d_1, le point *D*.**

  Que constate-t-on concernant l'aire du triangle *ABD* ? … La valeur de l'aire reste identique à 9,28. …

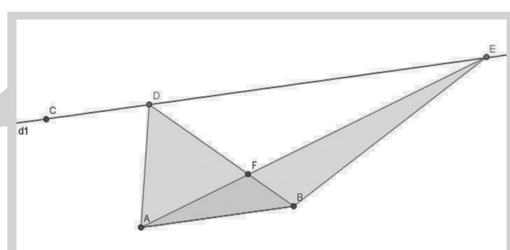
c. Justification

La formule de l'aire du triangle est : $A_{\text{triangle}} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$. Essayer d'expliquer la remarque précédente à partir de cette formule : …

La base *AB* est constante. La distance de *D* à la base *AB* est toujours la même puisque *D* est sur une parallèle. Donc la hauteur est constante. Donc l'aire également. …

2. Le théorème du « papillon »

a. Construction de la figure



- **Placer sur d_1 un point *E*.**
- **Tracer, à l'aide de l'outil *Polygone*, le triangle *ABE*.**
- **Nommer *F* le point d'intersection de (*AE*) et (*BD*).**

b. Conjecture

- Que pensez-vous des aires des triangles *ADF* et *BEF* ? … Elles sont peut-être identiques. …
- Vérifier la conjecture faite en affichant, comme précédemment, les aires de ces triangles.

  A_{ADF} = … 5,53 … et A_{BEF} = … 5,53 …

c. Justification

- D'après la propriété vue en **1.**, comparer les aires des triangles *ABD* et *ABE* : A_{ABD} … = … A_{ABE}.
- Exprimer l'aire de *ADF* en utilisant l'aire de *ABD,* et l'aire de *BEF* en utilisant l'aire de *ABE*.

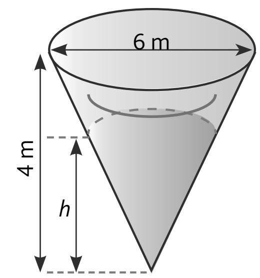
  $A_{ADF} = A_{ADB} - A_{ABF}$ … et $A_{BEF} = A_{AEB} - A_{ABF}$ …

d. Conclure sur l'égalité des aires des triangles *ADF* et *BEF* : … $A_{ADB} - A_{ABF} = A_{AEB} - A_{ABF}$ donc $A_{APF} = A_{BEF}$ …

J'utilise un logiciel (tableur)

Remplir un réservoir à moitié

Un réservoir, de volume *V*, a la forme d'un cône de révolution de hauteur 4 mètres, et de base un disque de diamètre 6 mètres. On verse dans ce réservoir un volume *V'* d'eau. On note *h* la hauteur d'eau, en mètres, dans le cône. On souhaite déterminer quelle doit être la hauteur d'eau pour que le réservoir soit rempli à moitié.
On note *a* cette valeur particulière de *h*.



1. Détermination des volumes *V* et *V'*

On admet que l'eau présente dans ce réservoir occupe un volume conique dont la forme est une réduction de rapport k du réservoir.

a. Montrer que $V = 12\,\pi$: $V = \frac{1}{3}$ base $\times$ hauteur $= \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\,\pi$

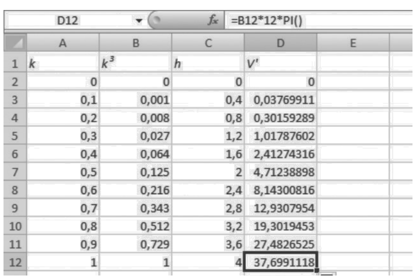
b. Justifier que $0 < k < 1$ et que $h = 4k$: $k < 1$ puisque l'on parle de réduction $k = \frac{h}{4}$, d'ou $h = 4h$

c. Exprimer V' en fonction de V et de k : $V' =$ $k^3 \times V$

2. Première estimation

a. Calculer $\frac{V}{2}$. Donner une valeur approchée au dix millième. $\frac{V}{2} =$ 18,8496 m^3.

b. Pour obtenir une estimation de a, on utilise un tableur.



D12 =B12*12*PI()

	A	B	C	D	E
1	*k*	*k*³	*h*	*V'*	
2	0	0	0	0	
3	0,1	0,001	0,4	0,03769911	
4	0,2	0,008	0,8	0,30159289	
5	0,3	0,027	1,2	1,01787602	
6	0,4	0,064	1,6	2,41274316	
7	0,5	0,125	2	4,71238898	
8	0,6	0,216	2,4	8,14300816	
9	0,7	0,343	2,8	12,9307954	
10	0,8	0,512	3,2	19,3019453	
11	0,9	0,729	3,6	27,4826525	
12	1	1	4	37,6991118	

- **Préparer un tableau comme celui ci-contre.**
- **De la cellule A2 à A12, remplir les cellules pour des valeurs de *k* de 0 à 1 avec un pas de 0,1.**
- **En B2, entrer la formule =Puissance(A2;3).**
- **En C2, entrer la formule =4*A2 et en D2, entrer la formule =B2*12*PI( ).**
- **Sélectionner les cellules B2 à D2 puis recopier vers le bas jusqu'à la ligne 12.**

Dans la colonne de V', on n'obtient pas la valeur trouvée pour $\frac{V}{2}$ précédemment.

c. En vous aidant du tableau, donner un encadrement contenant la valeur a : 2,8 $< a <$ 3,2

3. Amélioration de l'estimation

Nouvel encadrement de la valeur *a*

- **De A2 à A12, remplir les cellules pour des valeurs de *k* de 0,7 à 0,8 avec un pas de 0,01.**

D12 =B12*12*PI()

	A	B	C	D	E	F
1	*k*	k^3	*h*	*V'*		
2	0,7	0,343	2,8	12,9307954		
3	0,71	0,357911	2,84	13,4929268		
4	0,72	0,373248	2,88	14,0711181		
5	0,73	0,389017	2,92	14,6655954		
6	0,74	0,405224	2,96	15,2765849		
7	0,75	0,421875	3	15,9043128		
8	0,76	0,438976	3,04	16,5490053		
9	0,77	0,456533	3,08	17,2108886		
10	0,78	0,474552	3,12	17,8901889		
11	0,79	0,493039	3,16	18,5871324		
12	0,8	0,512	3,2	19,3019453		

a. En déduire un nouvel encadrement de la valeur *a* : …3,16……… $<$ *a* $<$ …3,20……

Amélioration de l'encadrement de la valeur *a*

D5 =B5*12*PI()

	A	B	C	D	E
1	*k*	k^3	*h*	*V'*	
2	0,79	0,493039	3,16	18,5871324	
3	0,791	0,49491367	3,164	18,6578058	
4	0,792	0,49679309	3,168	18,7286582	
5	0,793	0,49867726	3,172	18,7996897	
6	0,794	0,50056618	3,176	18,8709006	
7	0,795	0,50245988	3,18	18,942291	
8	0,796	0,50435834	3,184	19,0138613	
9	0,797	0,50626157	3,188	19,0856117	
10	0,798	0,50816959	3,192	19,1575423	
11	0,799	0,5100824	3,196	19,2296534	
12	0,8	0,512	3,2	19,3019453	

b. Quelles sont les valeurs de *k* à mettre dans les cellules A2 et A12 ? ……

0,79 par A2 et 0,80 pour A12……

- **De A2 à A12, remplir les cellules pour des valeurs de *k* avec un pas de 0,001.**

c. En déduire un nouvel encadrement de la valeur *a* : …3,172…… $<$ *a* $<$ …3,176……

Exercices & Problèmes

R Exercices avec réponses en fin d'ouvrage. ✱/✱✱ Exercices plus difficiles.

Exercices p. 167 à 169

1. QCM

a. 30 cm^2

b. 2,5 m^3

c. $k = 5$

d. Vrai

e. 22,5 cm^3

f. 2

2. Choix dans une liste

Entourer, pour chaque phrase, la bonne réponse dans la liste proposée.

Le périmètre de la figure 1 est au périmètre de la figure 2.	inférieur supérieur égal
Le périmètre de la figure 1 est au périmètre de la figure 3.	inférieur supérieur égal
Le périmètre de la figure 2 est au périmètre de la figure 3.	inférieur supérieur égal

3. Associer

Associer à chaque énoncé sa réponse.

Une feuille de papier a une longueur de 16 cm et une aire de 48 cm^2. Sa largeur, en mm, est égale à :	30
Le périmètre d'un tapis carré est de 20 m. Son aire, en m^2, est égale à :	36
La largeur d'un rectangle est 6 m. Sa longueur est le double de la largeur. Son périmètre, en m, est égal à :	25
Un triangle a pour base 20 dm et pour hauteur 0,4 m. Son aire, en dm^2, est égale à :	20
	40

› Calculer la longueur d'un cercle

4. a. $p = 40\ 074{,}156$ km.
b. $p' = 40\ 074{,}165$ km.

› Calculer une aire

5. $A = \pi \times 5{,}5^2 \approx 95{,}03$ m^2.

6. $L = 9$ cm.

7. $a = 13$ m.

8. $A = 756$ cm^2.

9. $A_{terrain} = 7\ 140$ m^2.

10. a. $EF = x + 2$.
b. Aire du carré $EFGH$: $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.
c. Aire de l'allée : $x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4 = 4(x + 1)$.

11. $A = 135$ cm^2.

12. a. $A_{rectangle} = 12\ 600$ m^2. $A_{triangle} = 5\ 400$ m^2.
b. $A_{totale} = 18\ 000$ m^2.
c. $A_{trapèze} = \dfrac{(140+260)\times 90}{2} = 18\ 000$ m^2.
d. $A_{totale} = 1{,}80$ ha.

13. $A = 3{,}5^2 - \pi \times 1{,}75^2 \approx 2{,}629$ cm^2.

14. $A = 6\ 361{,}7$ cm^2.

› Calculer un volume

15. $A = 6 \times 4{,}5^2 = 121{,}5$ cm^2.
$V = 4{,}5^3 = 91{,}125$ cm^3.

16. a. Le rayon des demi-sphères est 0,6 m.
Le rayon de la base du cylindre est 0,5 m.
b. Aire de la citerne :
$A = 2\pi \times 0{,}6 \times 5{,}6 + 4\pi \times 0{,}6^2 = 8{,}16\pi \approx 25{,}64$ m^2.
c. Volume de la citerne :
$V = \pi \times 0{,}6^2 \times 5{,}6 + \dfrac{4}{3}\ \pi \times 0{,}6^3 \approx 7{,}238$ m^3 $= 7\ 238$ L.

17. a. $h = 30 - 4 = 26$ cm.
b. $V = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 26^2 \times (3 \times 15 - 26) = \dfrac{676\pi}{3} \times 19$
$\approx 13\ 450$ cm^3.

18. Volume de métal restant :
$15 \times 10 \times 4 - \pi \times 2{,}5^2 \times 4 \approx 521{,}46$ cm^3.

› Échelle

19. $D = 32{,}5$ km.

20. a. Il faut mettre une échelle de 50.

b. Il mesurera sur le dessin 120 mm.

21. Les dimensions réelles du terrain sont 142,5 m par 85 m.

Agrandissement et réduction

22. a. $k = 6$.
b. Par $k^3 = 216$.

23. a. $k = \sqrt{36} = 6$.
b. Par $k = 6$.

24. a. $k = 5$.
b. Par cinq.

25. Son nouveau volume est $3^3 = 27$ fois plus grand, soit 540 cm^3.

26.
$k = \frac{10}{64} = \frac{2}{7} \approx 0,29$.

27.
$k^2 = \frac{25}{64}$. Donc $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8} = 0,625$.

28. Par dix.

Problèmes p. 169 à 170

Problème 1

1. a. $r = 12$ cm.
b. $S = 452$ cm^2.
2. a. $S_1 = \frac{452}{2} = 226$ cm^2.
b. $r_1 = 8,5$ cm.
c. $D_1 = 17$ cm.
3. $S_4 = 452 \times 4 = 904$ cm^2.
D'où $r_4 = 17,0$ cm et donc $D_4 = 34$ cm.

Problème 2

Le côté a du carré mesure $a = \frac{38}{\sqrt{2}}$.
D'où $A_{\text{bleue}} = 361\pi - 722 \approx 412,11$ cm^2.

Problème 3

1. $A_{\text{triangle}} + A_{\text{lunules}} = \frac{1}{2}\pi \times 6^2 + \frac{1}{2}\pi \times 4,5^2 + \frac{9 \times 12}{2} - \frac{1}{2}\pi \times 7,5^2 + \frac{9 \times 12}{2} = 108$ cm^2.

2. $A_{\text{triangle}} = \frac{9 \times 12}{2} = 54$ cm^2. D'où $A_{\text{lunules}} = 54$ cm^2 $= A_{\text{triangle}}$.

Problème 4
Formule de Héron

1. a. $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.
b. $p = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6$ cm.
$S = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{36} = 6$ cm^2.
Le triangle ABC est un triangle rectangle.
$S = \frac{3 \times 4}{2} = 6$ cm^2.
c. $p = \frac{1}{2}(7 + 9 + 11) = 13,5$ cm.
$S = \sqrt{13,5(13,5-7)(13,5-9)(13,5-11)} = \sqrt{987,1875}$
$\approx 31,42$ cm^2.

2. a. $p = \frac{1}{2}(a + a + a) = \frac{3a}{2}$.
$S = \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2} - a\right)\left(\frac{3a}{2} - a\right)\left(\frac{3a}{2} - a\right)} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
b. $A = 7^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 21,22$ cm^2.
c. $a = \sqrt{\frac{232}{\sqrt{3}}} = 11,6$ cm.

Problème 5

Le volume du cube est : $83 = 512$ cm^3.
Le rayon de la boule est : 4 cm.
Le volume de la boule est : $\frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 \approx 268$ cm^3.
Pourcentage de remplissage : $\frac{268}{512} \approx 0,52$, soit 52 %.

Problème 6
Volume d'une piscine

$V_{\text{trou}} = 210$ m^3.
$V_A = 11,7$ m^3 ; soit 18 allers-retours ; soit 1 116 €.
$V_B = 12,69$ m^3 ; soit 17 allers-retours ; soit 1 088 €.
C'est l'agence B.

Problème 7

1. De 25 %. Soit $k = 1,25$.
2. $k^2 = 1,25^2 = 1,5625$. Soit une augmentation de 56,25 %.

Problème 8

$1,25 \times 0,75 = 0,9375$. Soit une diminution de 6,25 %.

Problème 9

1. $p = 24$ cm.
2. $k = \frac{180}{24} = 7,5$.

3. $A'B' = 45$ cm, $B'C' = 60$ cm, $A'C' = 75$ cm.
4. $A_{A'B'C'} = 24 \times k^2 = 1\,350$ cm^2.

› Problème 10

1. $k = 2$.
2. $V_1 = 0{,}92$ m^3.
3. $k^3 = 8$. $V_2 = 8 \times 0{,}92 = 7{,}36$ m^3.
4. $V = V_1 + V_2 = 8{,}28$ m^3.

› Problème 11

Concevoir un produit

1. $k = \dfrac{1}{100}$; $k^3 \approx 10^{-6}$.
2. $8\,000 \times 10^{-6} = 8 \times 10^{-3}$ tonnes $= 8$ kg.
3. $k^3 = \dfrac{1}{8 \times 10^{-6}}$. $k = \dfrac{1}{200}$.
Soit une hauteur H du modèle réduit de 1,6 m.

Démarche d'investigation

› Problème 12

Le plan d'une maison

1. Pour optimiser la représentation, on peut considérer que la longueur de la maison se trouvera dans la longueur de la feuille.

$\dfrac{1400}{29{,}7} \oplus 47{,}13$ et $\dfrac{1100}{21} \oplus 52{,}38$. Par rapport aux échelles proposées, la largeur ne permet pas de prendre une échelle plus grande qu'au $\dfrac{1}{50}$.

Donc, les échelles possibles sont $\dfrac{1}{200}, \dfrac{1}{100}$ et $\dfrac{1}{50}$.

2. L'échelle la plus grande qu'il puisse choisir est $\dfrac{1}{50}$.
Donc, il doit diviser toutes les dimensions par 50.

› Problème 13

On retrouve le même dessin avec toutes les dimensions multipliées par 3.

Je me teste

(livre élève pages 171 et 172)

EXERCICE 1 QCM

Cocher la bonne réponse.

a. L'aire A d'une sphère de rayon R est donnée par la formule : $A = 4\pi R^2$.
Donner l'aire d'une sphère de diamètre 10 cm.

☒ 100π ❑ 200π ❑ 300π ❑ 400π

b. Le volume V d'une pyramide est donné par la formule : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur. La base d'une pyramide est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 4 cm. La hauteur de la pyramide est 10 cm.
Donner le volume de la pyramide.

❑ 24 cm^3 ❑ 120 cm^3 ☒ 40 cm^3 ❑ 80 cm^3

EXERCICE 2 La boule de bowling

Les boules de bowling sont classées par catégories en fonction de leur masse exprimée en livre anglaise lb (ou pound).

Catégorie	Enfants			Femmes			Hommes		
Masse (lb)	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Chaque boule de bowling a un diamètre constant de 21,6 cm. C'est la nature du matériau synthétique avec lequel la boule est fabriquée qui permet de faire varier la masse de la boule. La masse volumique du matériau synthétique utilisé pour une boule est $\rho = 0{,}96$ g/cm^3. On veut connaître la catégorie de cette boule.

a. Déterminer le volume de cette boule. En déduire le volume réel V sachant que les trous pour les doigts représentent 100 cm^3.

$r = \frac{21{,}6}{2} = 10{,}8$ cm ; $V_a = \frac{4}{3}\pi \times (10{,}8)^3 = 5\,276{,}7$ cm^3 ; $V = 5\,276{,}7 - 100 = 5\,176{,}7$ cm^3.

b. Déduire la masse M, en kg, de cette boule. On donne $\rho = \frac{M}{V}$.

$M = \rho \times V$; $M = 0{,}96 \times 5\,176{,}7 = 4\,969{,}632$ g soit $M = 4{,}970$ kg.

c. Sachant que 1 lb = 0,453 592 37 kg, quelle est la masse, en lb, de la boule ?
Arrondir le résultat à l'unité.

$M = 4{,}970$ kg $= \frac{4{,}970}{0{,}45359237} = 10{,}9613$ soit $M = 11$ lb.

d. Conclure : il s'agit d'une boule pour femme.

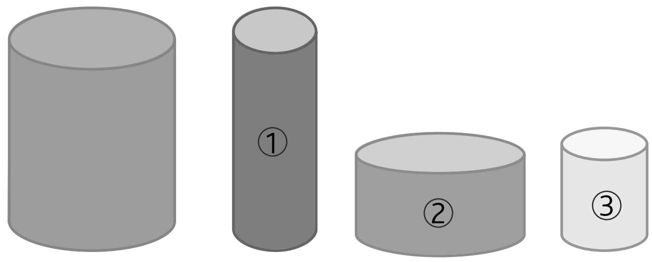
EXERCICE 3 Les boîtes de conserve

On dispose de la boîte de conserve verte.

La boîte ① est obtenue en réduisant le rayon de moitié.

La boîte ② est obtenue en réduisant la hauteur de moitié.

La boîte ③ est obtenue en réduisant la hauteur et le rayon de moitié.



Pour chacun des cas, déterminer :

1 par quel nombre est multipliée l'aire du couvercle ;

Boîte ① : 0,25 Justifier : réduction du rayon de moitié soit $k = 0,5$ donc $k^2 = 0,25$.

Boîte ② : 1 Justifier : le rayon ne change pas, donc l'aire du couvercle ne change pas.

Boîte ③ : 0,25 Justifier : réduction du rayon de moitié soit $k = 0,5$ donc $k^2 = 0,25$.

Appelez le professeur pour présenter votre argumentation.

2 par quel nombre est multipliée l'aire latérale ;

Boîte ① : 0,5 Justifier : le périmètre du couvercle est réduit de moitié mais la hauteur reste identique.

Boîte ② : 0,5 Justifier : le périmètre du couvercle reste identique mais la hauteur est réduite de moitié.

Boîte ③ : 0,25 Justifier : toutes les dimensions sont réduites de moitié soit $k^2 = 0,25$.

3 par quel nombre est multiplié le volume ;

Boîte ① : 0,25 Justifier : l'aire du couvercle est 4 fois plus petite et la hauteur est constante.

Boîte ② : 0,5 Justifier : l'aire du couvercle est constante et la hauteur est réduite de moitié.

Boîte ③ : 0,25 Justifier : toutes les dimensions sont réduites de moitiés $k = 0,5$ soit $k^3 = 0,125$.

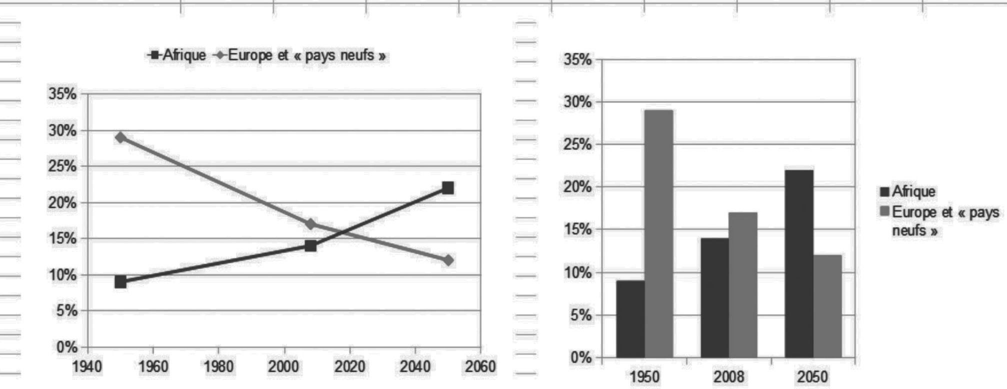
Évaluation 1

(livre élève page 175)

EXERCICE 1 Évolution de populations

On peut réaliser les graphiques suivants.

	A	B	C	D
1		1950	2008	2050
2	Afrique	9%	14%	22%
3	Europe et « pays neufs »	29%	17%	12%



Ces graphiques montrent de quelle façon la part de l'Afrique augmente et celle de l'Europe et des « pays neufs » diminue.

Cependant, le graphique de gauche (graphique cartésien) respecte l'échelle de temps et montre, de plus, que l'accroissement de la part de l'Afrique s'accélère (pente des segments) mais que la diminution de la part de l'Europe et des « pays neufs » se ralentit.

EXERCICE 2 Remboursement des soins

1 La consultation chez le spécialiste a coûté 140 €.
On peut, par exemple, faire $98 \div 0,7$ ou $35 \times 0,25$ ou 35×4.

2 Le remboursement correspond à l'addition des montants des quatre cases en bleu d'où :
$x + y + 98 + 35 = 156,58$.

3 **a.** Le remboursement y correspond à 25 % (c'est-à-dire un quart) du montant payé à la pharmacie. Le montant payé à la pharmacie est donc $4y$.

b. Le remboursement x correspond à 65 % du montant payé à la pharmacie d'où $x = 4y \times 0,65$.

4 Il suffit de réduire l'équation obtenue au 2.

5 On a $2,6y + y = 23,58$ d'où $3,6y = 23,58$ d'où $y = \dfrac{23,58}{3,6} = 6,55$ €.
On en déduit $x = 2,6 \times 6,55 = 17,03$ €.

Évaluation 2

(livre élève page 177)

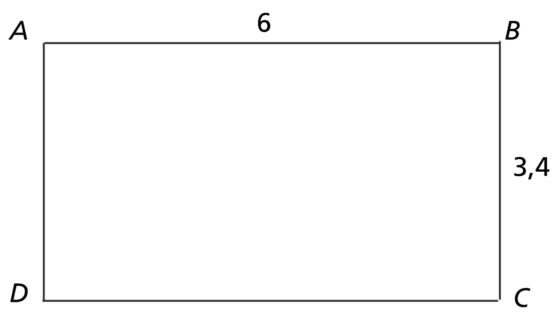
Cultiver son jardin

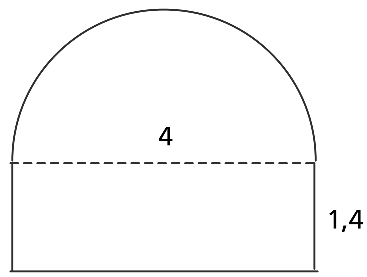
Romain décide d'installer une serre dans son jardin.

1 Les dimensions sur les schémas sont en centimètres (cm).

a. Le quadrilatère *ABCD* est un rectangle.

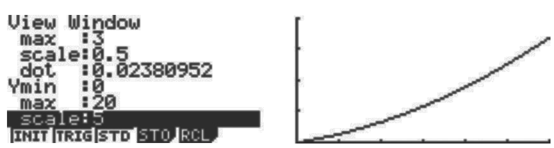
b.





2 **a.**

- Courbe représentative de *f*



– Tableau de variation de *f*

x	0 → 3
$f(x)$	0 ↗ 16,92

– L'image de 2,5 par *f* est 12,625.

– Un antécédent de 7 par *f* est 1,7 (valeur approchée au dixième).

b.

– Le volume de la serre pour une largeur de 2,5 m est 12,625 m^3.

– Si la largeur de la serre est 1,7 m, le volume est proche de 7 m^3.

– Pour une largeur comprise entre 1,5 m et 3 m, le volume n'est jamais égal à 18 m^3.

3 On note x la dépense totale, en euros.

L'énoncé se traduit par l'équation : $\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}x - 42 + 22,8 = x$.

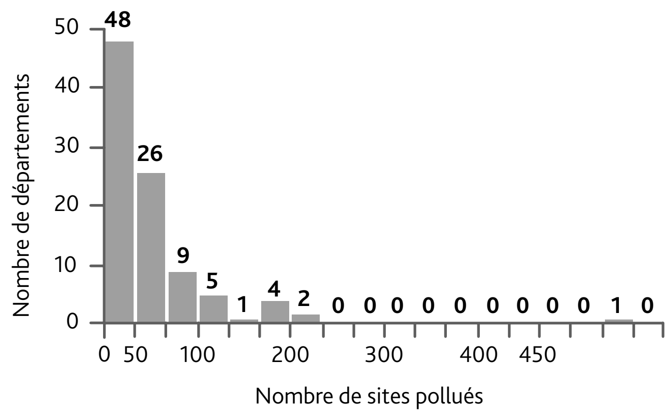
On obtient $x = 96$.

La dépense totale est 96 €.

Évaluation 3

(livre élève page 179)

EXERCICE 1 Sites pollués en France



1 Dans les calculs, on suppose que les valeurs sont toutes situées au centre des classes.

La moyenne est alors :

$$\frac{12{,}5\times48+37{,}5\times26+62{,}5\times9+87{,}5\times5+112{,}5\times1+137{,}5\times4+162{,}5\times2+412{,}5\times1}{96}$$

c'est-à-dire $\overline{x} \approx 41$.

On a $\frac{96}{2}=48$. La médiane est obtenue en faisant la demi-somme des valeurs de rang 48 et de rang 49. La médiane vaut $Me=\frac{12{,}5+37{,}5}{2}=25$.

On a $96 \times 0{,}75 = 72$. Le troisième quartile est la valeur située au 72^{e} rang. Donc $Q_3 = 37{,}5$.

2 En moyenne, il y a environ 41 sites pollués par département.

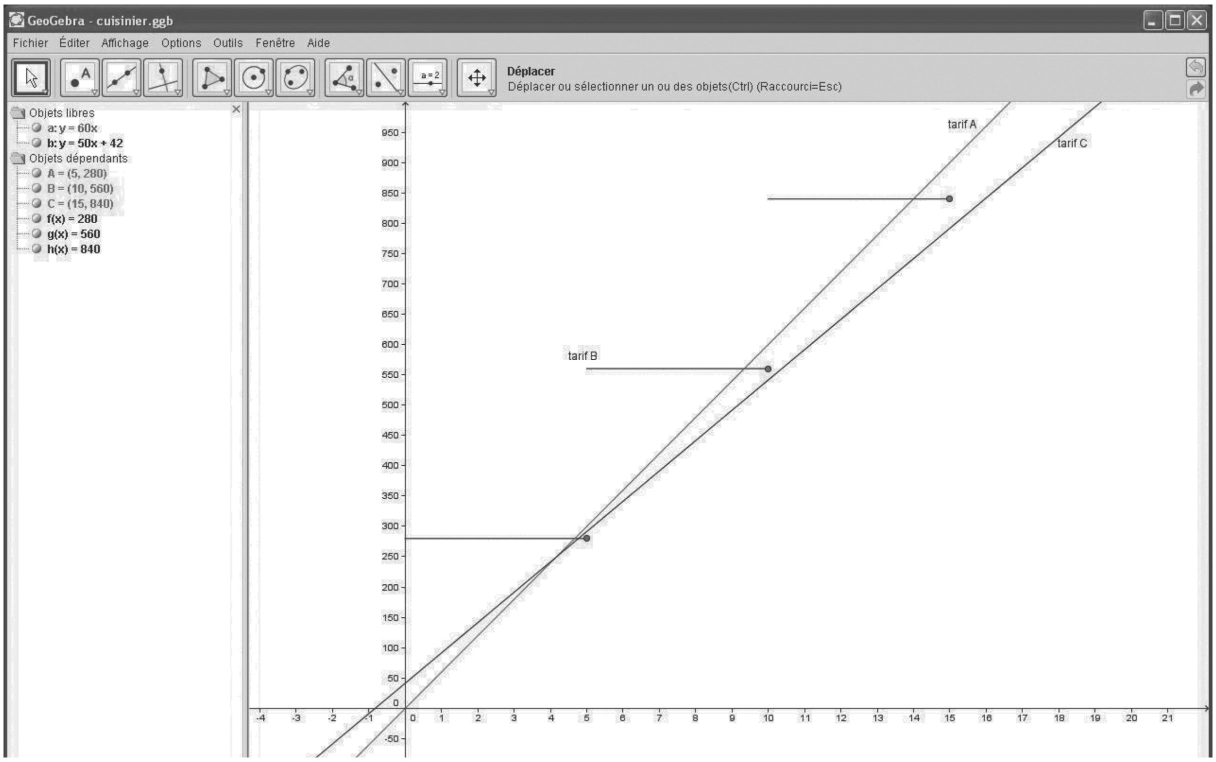
La moitié au moins des départements a un nombre de sites pollués inférieur ou égal à 25 et la moitié au moins des départements a un nombre de sites pollués supérieur ou égal à 25.

75 % des départements au moins ont un nombre de sites pollués inférieur ou égal à 37.

Remarque : la moyenne est fortement influencée par la valeur extrême.

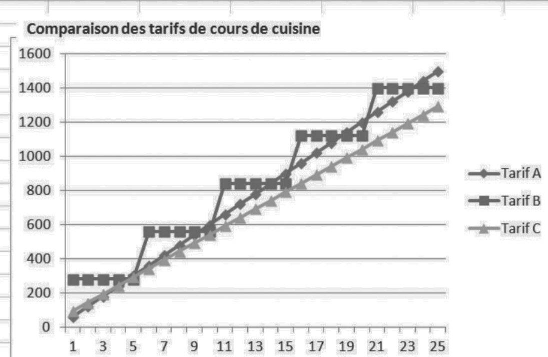
EXERCICE 2 Cuisiner comme un chef

1 Avec GeoGebra



Avec le tableur Excel

	A	B	C	D
1	Nombre de cours	Tarif A	Tarif B	Tarif C
2	1	60	280	92
3	2	120	280	142
4	3	180	280	192
5	4	240	280	242
6	5	300	280	292
7	6	360	560	342
8	7	420	560	392
9	8	480	560	442
10	9	540	560	492
11	10	600	560	542
12	11	660	840	592
13	12	720	840	642
14	13	780	840	692
15	14	840	840	742
16	15	900	840	792
17	16	960	1120	842
18	17	1020	1120	892
19	18	1080	1120	942
20	19	1140	1120	992
21	20	1200	1120	1042
22	21	1260	1400	1092
23	22	1320	1400	1142
24	23	1380	1400	1192
25	24	1440	1400	1242
26	25	1500	1400	1292



2 **a.** Pour deux cours d'essais, Maxime a intérêt à choisir le tarif A qui est moins cher.

b. Pour 15 cours de cuisine, la formule la moins onéreuse est la formule C.

Évaluation 4

(livre élève page 181)

EXERCICE 1 Rénovation d'un moulin à vent

1. *ABC* et *ADE* sont des triangles isocèles rectangles.
2. $R = 6$ m et $r = 2$ m.
3. $L = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$, soit $L = 8{,}49$ m et $l = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, soit $l = 2{,}83$ m.
4. $S = (\pi \times 6 \times 8{,}49) - (\pi \times 2 \times 2{,}83) = 142{,}25\ \text{m}^2$.
5. $100\ \text{cm}^2 = 0{,}01\ \text{m}^2$. $n = 142{,}25 \div 0{,}01 = 14\,225$.

Il faut inscrire 14 225 ardoises.

EXERCICE 2 Groupe sanguin AB

1. La fréquence d'élèves de Seconde ayant un groupe AB est 11 %.
2. Elle se produit environ moins de 5 fois sur 100.
3. Oui, il s'agit d'une fréquence très rare.

Évaluation 5

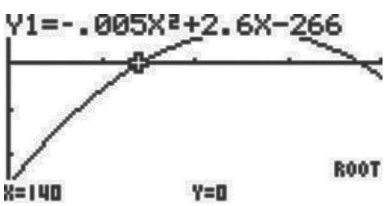
(livre élève page 183)

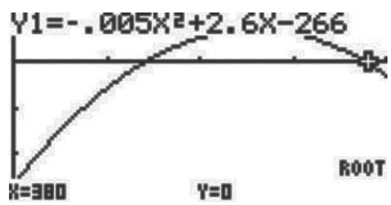
EXERCICE 1 Perte ou bénéfice

1 **a.** Le coût de production de 30 articles est 270 500 €. La recette s'élève à 78 000 €.
b. La recette est inférieure au coût de production. Il y a donc perte.

2 **a.** **Sens de variation de la fonction *f***
La fonction carré $x \mapsto x^2$ est croissante sur [0 ; 400]. Pour obtenir la fonction *f*, on la multiplie par un nombre positif et on ajoute une constante. Donc on ne change pas son sens de variation.
La fonction *f* est donc croissante sur [0 ; 400].

Sens de variation de la fonction *g*
La fonction *g* est une fonction linéaire de coefficient positif. Elle est donc croissante sur [0 ; 400].
b. $h(x) = -0,005x^2 + 2,6x - 266$ sur [0 ; 400].





Les solutions de l'équation $h(x) = 0$ sur [0 ; 400] sont 140 et 380.

3 La fonction *h* modélise le bénéfice (en milliers d'euros).
Le bénéfice est égal à 0 pour 140 et 380 articles vendus.
L'entreprise enregistre des pertes si le nombre d'articles vendus est inférieur à 140, ou compris entre 380 et 400.

EXERCICE 2 Lancer de deux dés

1 Les sommes possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

2 Lorsque le nombre de lancers augmente, les fréquences observées des sommes 6 et 10 se stabilisent, ce qui permet d'estimer les probabilités des événements correspondants : d'après cette simulation, la somme 6 a une probabilité d'environ 0,18 et la somme 10 une probabilité d'environ 0,04.

IDT
Éditions Foucher - Malakoff – JUILLET 2012 – 01 – IH - DL / DC
Imprimé en France par Jouve – 53100 Mayenne – N° 0000000