BAC PRO 3 ans
TERMINALE PROFESSIONNELLE

Groupement C

Maths

I. Baudet - L. Breitbach - P. Dutarte - D. Laurent
Sous la direction de G. Barussaud

CORRIGÉ

FOUCHER

Votre site associé :
www.editions-foucher.fr/mathsciences
Inscrivez-vous et déclarez vos prescriptions !

Sur le site associé maths-sciences, vous trouverez :
– l'ensemble du guide pédagogique en format PDF ;
– les fichiers corrigés des activités informatiques.
Les fichiers de travail sont présentés dans le guide pédagogique par le logo .

Vous pourrez aussi prendre connaissance de l'ensemble des produits Foucher dans votre matière.

ISBN 978-2-216-11606-5

Sommaire

Statistique à deux variables (1)

Activités

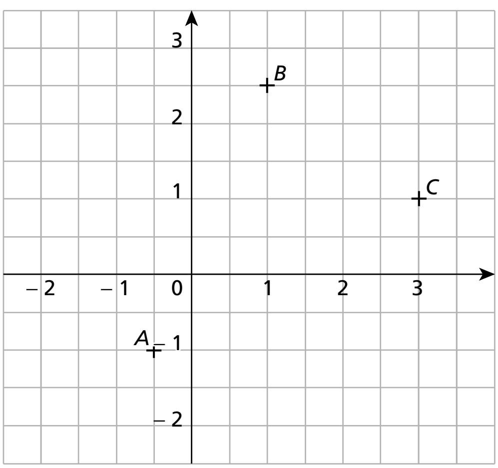
Page 7

On peut estimer l'étendue de la glace dans l'océan Arctique en juin 2050 à :
$-0{,}0424 \times 2050 + 96{,}522 \approx 9{,}6$ km^2.

Pages 8 et 9

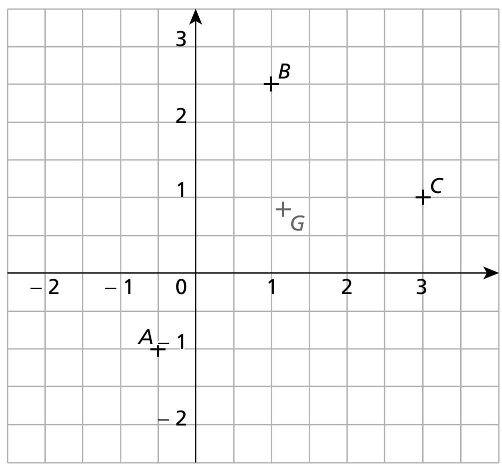
Est-ce que je sais ?

1.



2. a) $\bar{x} = \dfrac{-0{,}5 + 1 + 3}{3} = \dfrac{3{,}5}{3} = \dfrac{7}{6}$;
$\bar{y} = \dfrac{-1 + 2{,}5 + 1}{3} = \dfrac{2{,}5}{3} = \dfrac{5}{6}$.

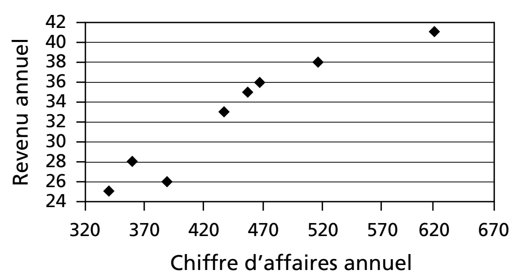
b)



3. On a $\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{6} + b$ d'où $b = \dfrac{10}{12} - \dfrac{7}{12}$;
$b = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

Activité 1

1. a)



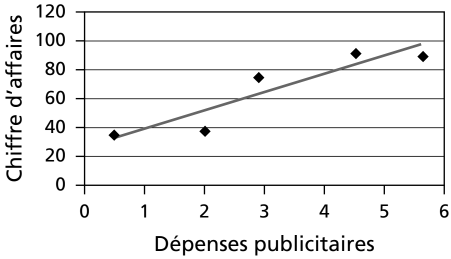
b) Les points du nuage sont proches d'une droite d'équation $y = ax + b$ correspondant à un fixe b et à une commission de coefficient de proportionnalité a.

2. a) $\bar{x} = 450$; $\bar{y} = 32{,}75$.

b) Le point $G(450 ; 32{,}75)$ se situe au « centre » du nuage.

Activité 2

a) et **b)**



c) Pour des dépenses publicitaires de 3,5 millions d'euros, on peut estimer le chiffre d'affaires à :
$12{,}8 \times 3{,}5 + 26{,}2 = 71$ millions d'euros.

Activité 3

1. $\bar{x} = 2\,003{,}5$ et $\bar{y} = 553{,}1$.

2. a) On doit avoir
$553{,}1 = -3{,}33 \times 2\,003{,}5 + b$,
d'où $b = 553{,}1 + 3{,}33 \times 2\,003{,}5$;
$b = 7\,224{,}755$.

b) On peut estimer la quantité d'émissions de gaz à effet de serre en France en 2015 à :
$-3{,}33 \times 2015 + 7\,224{,}755 \approx 515$ millions de tonnes équivalent CO_2.

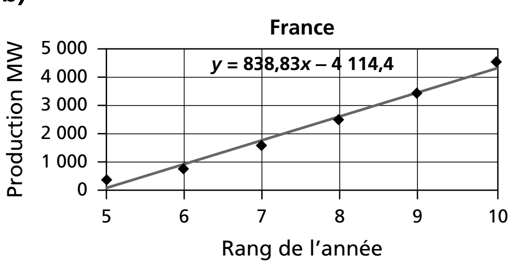
J'utilise un logiciel

Pages 13 et 14

Ajuster un grand nombre de données

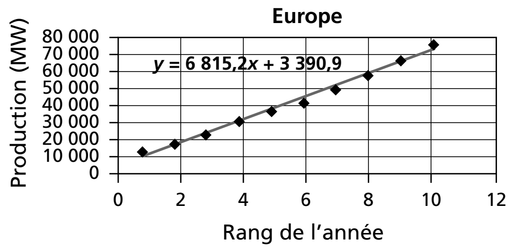
1. a) Un ajustement affine a ici peu de sens car la forme du nuage de points n'est pas allongée le long d'une droite.

b)



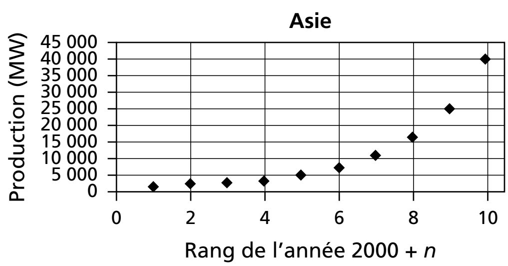
c) On peut estimer la production française en 2012 à :
$839 \times 12 - 4\,114 = 5\,954$ MW.

2. a) et **b)**



c) On peut estimer la production européenne en 2012 à :
$6\,815 \times 12 + 3\,391 = 85\,171$ MW.

d) et **e)**



Un ajustement affine de la production en Asie de 2001 à 2010 n'est pas justifié car l'augmentation de la production s'accélère.

f) On peut estimer la production asiatique en 2012 à :
$973{,}77 \times 1{,}42^{12} \approx 65\,451$ MW.

Comprendre le principe des « moindres carrés »

1. a) $\bar{x}$ est calculé en B7 et $\bar{y}$ est calculé en C7.

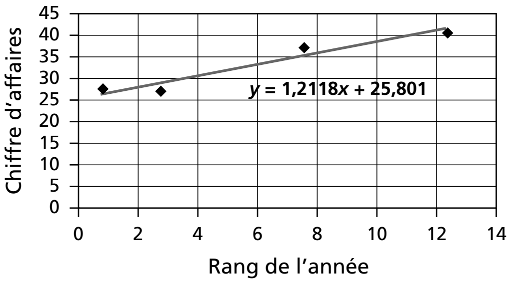
b) La formule entrée en B9 est =C7-B8*B7 où C7 correspond à $\bar{y}$, B8 à a et B7 à $\bar{x}$.

c) Les écarts négatifs se soustraient aux écarts positifs, alors que les écarts au carré sont tous positifs.

d) On trouve $a = 1{,}2$.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	Rang de l'année	Chiffre d'affaires en milliards d'euros	y = ax + b	Ecarts verticaux	Ecarts au carré
2	1998	1	28	27,075	0,925	0,855625
3	2000	3	27,2	29,475	-2,275	5,175625
4	2005	8	37,6	35,475	2,125	4,515625
5	2010	13	40,7	41,475	-0,775	0,600625
6					Somme	**11,1475**
7	Moyennes	6,25	33,375			
8	a =	**1,2**				
9	b =	25,875				

2. a) Le tableur donne comme équation : $y = 1{,}2118x + 25{,}801$.



b) On a $1{,}2 \approx 1{,}2118$.

Exercices et problèmes

Pages 15 à 18

Exercices

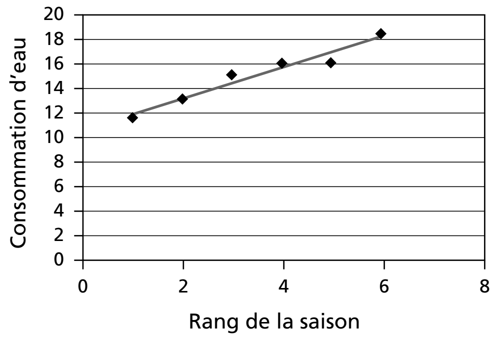
Déterminer le point moyen

1. a) On a $\bar{x} = 300$ et $\bar{y} = 20$; d'où $G(300 ; 20)$.
b) On a $0{,}084 \times 300 - 5{,}2 = 20$. Donc G appartient à D.

Exploiter un ajustement affine donné

2. On a
$y = -3{,}8857 \times 2020 + 9\,461{,}3 \approx 1\,612$ m.
L'altitude en 2020, si la tendance observée se maintient, sera de 1 612 m.

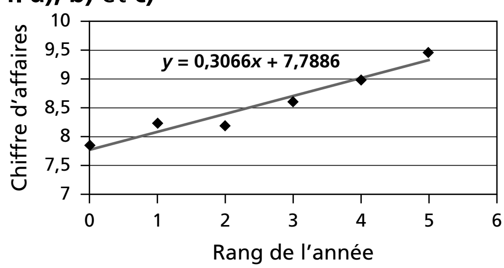
3. a) et **b)**



c) On peut estimer la consommation d'eau en 2011 (année de rang 10) à :
$1{,}2 \times 10 + 11 = 23$ millions de m^3.

Déterminer un ajustement affine

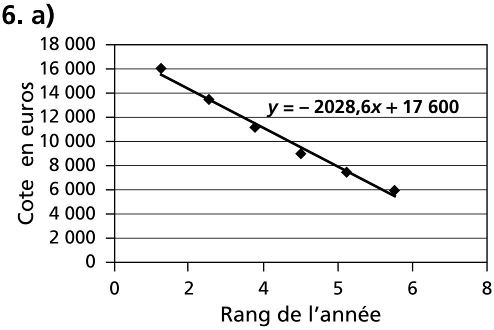
4. a), b) et **c)**



d) On peut estimer le chiffre d'affaires en 2011 (année de rang 6) à :
$0{,}3 \times 6 + 7{,}8 = 9{,}6$ millions d'euros.

5. a) La calculatrice donne l'équation :
$y = 0{,}1734x - 339{,}64$.
b) On peut estimer le SMIC en 2012 à :
$y = 0{,}1734 \times 2012 - 339{,}64 \approx 9{,}24$ €.

6. a)

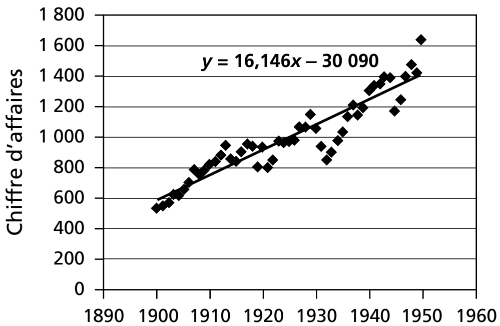


La calculatrice donne l'équation :
$y = -2\,000x + 17\,600$, en arrondissant les coefficients à la centaine d'euros la plus proche.

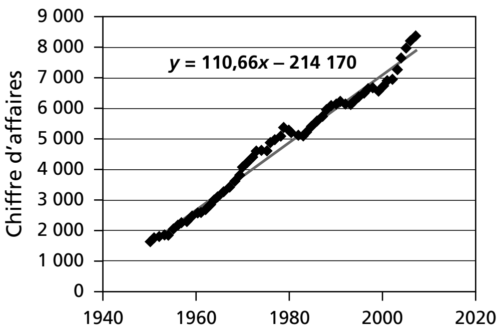
b) L'année 2013 est au rang 8. On peut estimer la cote du véhicule en 2013 à :
$-2\,000 \times 8 + 17\,600 = 1\,600$ euros.

7. a) Un ajustement affine du nuage de points n'est pas justifié car la tendance globale n'est pas celle d'une droite.

b) Le tableur affiche : $y = 16{,}146\,x - 30\,090$.



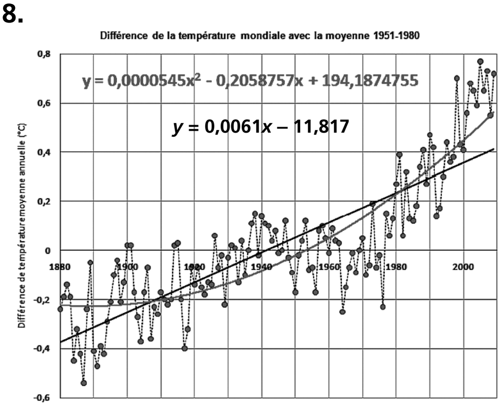
c) Le tableur affiche : $y = 110{,}66\,x - 214\,170$.



d) L'affirmation est exacte. On retrouve les coefficients directeurs des droites d'ajustement, arrondis à l'unité.

Exploiter un ajustement non affine

8.



a) L'équation affichée par le tableur est : $y = 0{,}0061x - 11{,}817$.

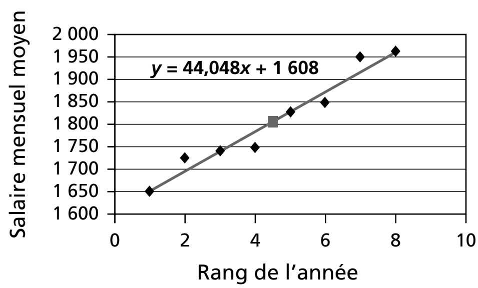
b) L'ajustement qui semble préférable est l'ajustement par la parabole.

c) Estimation de l'écart de température en 2040 par rapport à la période 1951-1980 :
– à l'aide de l'ajustement affine :
$0{,}0061 \times 2040 - 11{,}817 = 0{,}627$;
– à l'aide de l'ajustement parabolique :
$0{,}0000545 \times 2040^2 - 0{,}20588 \times 2040 + 149{,}19 = 1{,}002$.

Problèmes

Problème 1

1.



2. a) On a $\bar{x} = 4{,}5$ et $\bar{y} = 1\,806{,}25$; d'où $G(4{,}5\ ;\ 1\,806{,}25)$.

b) On obtient : $y = 44x + 1\,608$.

c) Voir le graphique ci-dessus.

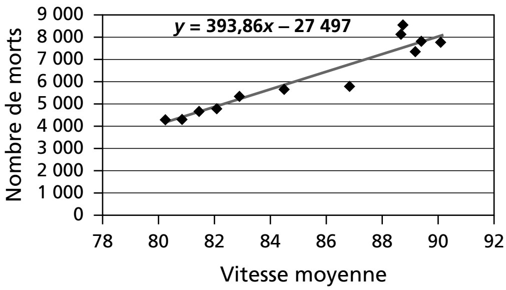
3. a) L'année 2014 est au rang 11. On peut estimer le salaire d'Hélène en 2014 à 2 090 euros environ.

b) L'année 2019 est au rang 16.
On a $44 \times 16 + 1\,608 = 2\,312$. On peut estimer que le salaire d'Hélène n'atteindra pas 2 400 euros en 2019.

Problème 2

1. On peut formuler l'hypothèse que le nombre de morts est lié à la vitesse moyenne.

2. a)



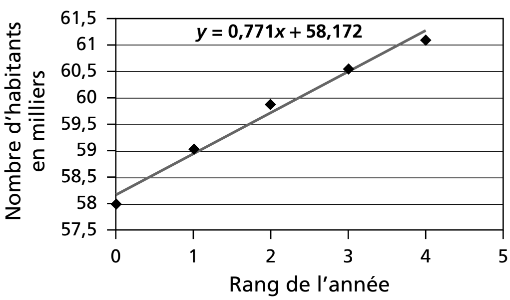
b) Le nuage de points a une forme allongée. L'hypothèse faite au 1. est confirmée et on peut envisager un ajustement affine du nombre de morts en fonction de la vitesse moyenne.

3. a) Le tableur fournit l'équation :
$y = 393{,}86x - 27\ 497$.

b) Pour une vitesse moyenne de 78 km/h, on peut estimer le nombre de morts à :
$393{,}86 \times 78 - 27\ 297 \approx 3\ 424$.
Le nombre de vies sauvées serait :
$4\ 273 - 3\ 424 = 849$ vies.

Problème 3

1.



2. Le nuage de points a une forme allongée. L'ajustement affine est donc justifié.

3. a) On obtient l'équation :
$y = 0{,}771x + 58{,}172$.

b) Voir le graphique ci-dessus.

c) Pour l'année de rang 6, on peut estimer la population de cette ville à :
$0{,}771 \times 6 + 58{,}172 = 62{,}798$ milliers d'habitants, c'est-à-dire 62 798 habitants.

4. On obtient les taux annuels de croissance suivants.

	A	B	C
1	Rang	Population	Taux de croissance
2	0	58	**1,79**
3	1	59,04	**1,42**
4	2	59,88	**1,12**
5	3	60,55	**0,91**
6	4	61,1	

Je teste mes connaissances

Page 19

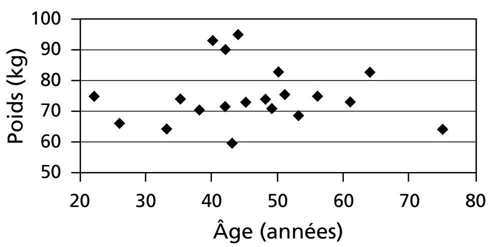
1. B
2. A
3. C
4. C
5. C
6. C
7. A
8. C
9. A
10. C

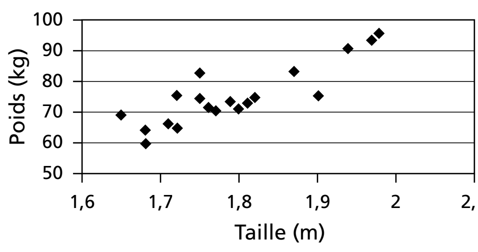
Je m'entraîne au CCF

Page 20

Partie A

1.





2. Le poids n'est pas lié à l'âge car le nuage des points M_i est très dispersé.
Le poids est lié à la taille car le nuage des points N_i a une forme allongée.

3. Le tableur fournit la droite d'ajustement d'équation :
$y = 85{,}708x - 78{,}797$.

4. Selon la tendance observée, on peut estimer le poids d'un homme mesurant 1,85 m à :
$85{,}708 \times 1{,}85 - 78{,}797 \approx 79{,}8$ kg.

Partie B

1. La formule de Lorentz fournit :
– pour un homme de 1,85 m :
$100 \times (0{,}85 - \frac{0{,}35}{4}) = 76{,}25$ kg ;
– pour une femme de 1,73 m :
$100 \times (0{,}73 - \frac{0{,}23}{2{,}5}) = 63{,}8$ kg.

2. Pour un garçon de 0,8 m, on obtient :
$100 \times (-\,0{,}2 - \frac{-0{,}7}{4}) = -\,2{,}5$ kg ; ce qui n'a pas de sens.

3. On a :
$100 \times (x - 1 - \frac{x - 1{,}5}{4})$
$= 100 \times (x - 1 - 0{,}25x + 0{,}375)$
$= 100 \times (0{,}75x - 0{,}625) = 75x - 62{,}5$.

4. On a $75 \times 1{,}85 - 62{,}5 = 76{,}25$. Ce résultat est inférieur à 79,8.

Dérivée et sens de variation d'une fonction

2

Activités

Page 21

Remarque : cette question se rapporte au chapitre « Équation d'une tangente – nombre dérivé » de première.

On détermine graphiquement les coefficients directeurs des tangentes à la courbe représentative de la fonction f en $t = 0$ et $t = 5$.

On lit $f'(0) = 7$ et $f'(5) = 15$.

Pages 22 et 23

Est-ce que je sais ?

a) La droite D_2 est la tangente à C en A.
b) $a_{(D2)} = -1$.
c) $f'(0) = -1$.
d) $f'(3) = 0{,}7$.

Activité 1

b) $f'(0) = 7$ et $f'(5) = 15$.

c) La courbe obtenue par la trace du point B est une droite. L'équation de cette courbe est $y = 1{,}6x + 7$.

d) La droite se superpose à la trace du point B.

Activité 2

a) •

x	2	1	0	1	2
$f'(x)$	4	2	0	2	4

• La courbe obtenue par la trace du point B est une droite : $y = 2x$.
• On en déduit que la fonction dérivée de la fonction carré est $f'(x) = 2x$.

b) •

x	2	1	0	1	2
$f'(x)$	12	3	0	3	12

• La courbe obtenue par la trace du point B est une parabole : $y = 3x^2$.
• On en déduit que la fonction dérivée de la fonction cube est $g'(x) = 3x^2$.

c) • Pour $a = 1$.

x	2	1	0	1	2
$f'(x)$	1	1	1	1	1

• La courbe obtenue par la trace du point B est une droite d'équation $y = 1$ ou $y = a$.
• Lorsque l'on fait varier les coefficients a et b, on obtient une droite d'équation $y = a$.
• On en déduit que la fonction dérivée de la fonction affine est $h'(x) = a$.

Activité 3

1. b) $x = \dfrac{3}{2 \times 1}$. L'abscisse x du sommet de la parabole est 1,5.

Le sommet de la parabole correspond à un minimum de la fonction f_1.

c)

x	-1	$1{,}5$	4
$f_1(x)$	7 ↘	$-0{,}75$	↗ 7

e) La fonction g_1 représente la fonction dérivée de f_1.

f)

x	-1	$1{,}5$	4
$g_1(x)$	$-$	0	$+$

g) Lorsque le signe de g_1 est négatif, la fonction f_1 est décroissante, et inversement lorsque g_1 est positif.

2. a)

• L'abscisse x du sommet de cette parabole vaut 0,5 ; le sommet de la parabole correspond à un maximum de la fonction f_2.

Tableau de variation de f_2 :

x	-2	$0{,}5$	3
$f_2(x)$	-10 ↗	$-3{,}75$	↘ -10

La fonction g_2 représente la fonction dérivée de f_2.

Tableau de signe de g_2 :

x	-2	$0{,}5$	3
$g_2(x)$	$+$	0	$-$

• L'abscisse x du sommet de cette parabole vaut $-\frac{5}{6}$; le sommet de la parabole correspond à un minimum de la fonction f_3.

Tableau de variation de f_3 :

x	-3	$-\frac{5}{6}$	1
$f_3(x)$	10 ↘	$4{,}25$	↗ 6

La fonction g_3 représente la fonction dérivée de f_3.

Tableau de signe de g_3 :

x	-3	$-\frac{5}{6}$	1
$g_1(x)$	$-$	0	$+$

b) Oui, la conjecture est vérifiée pour les fonctions f_2 et f_3.

J'utilise un logiciel

Pages 27 et 28

Vérifier l'existence d'un extremum

1. a) $f'(x) = 3x^2 - 3$. $\Delta = 36$, d'où $f'(x) < 0$ pour x appartenant à $[-1 ; 1]$.

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$. $g'(x) > 0$ pour $x < 0{,}25$.

$h'(x) = 3x^2$. $h'(x)$ est toujours positive.

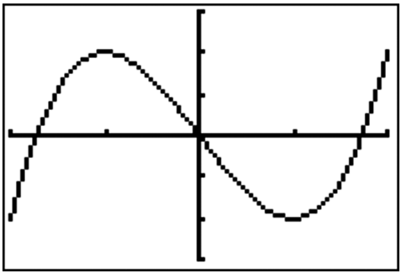
b)

x	-2		-1		1		2
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

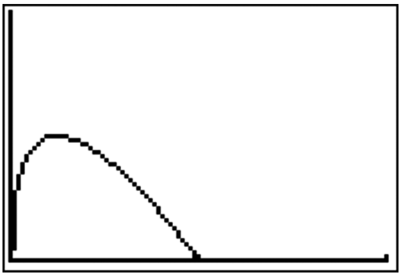
x	$0{,}2$		$0{,}25$		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$0{,}247$	↗	$0{,}25$	↘	

x	-2		0		2
signe de $h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	-8	↗			8

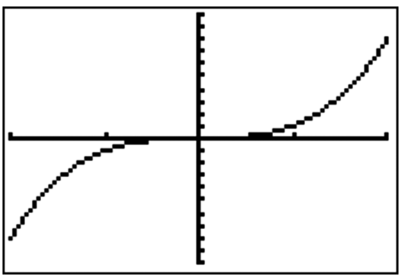
c) f



g



h

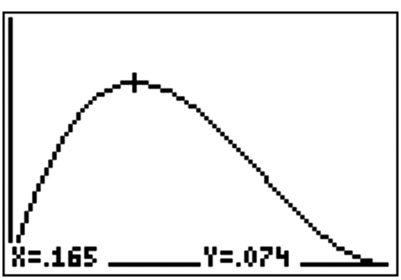


d. Non, ce n'est pas toujours le cas. Le tableau de variation de h donne un contre-exemple. En zéro la dérivée s'annule sans que la fonction h présente un minimum ou un maximum.

2. a) Largeur : $1 - 2x$; longueur : $1 - 2x$; hauteur : x.

b) $(1 - 2x)(1 - 2x)x = (4x^2 - 4x + 1)x$
$= 4x^3 - 4x^2 + x$.

c)



d) L'abscisse du maximum vaut 0,165.

e) $f'(x) = 12x^2 - 8x + 1$.

$f'(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{6}$ et $x = 0{,}5$.

x	0		$\frac{1}{6}$		0,5
signe de $f'(x)$		+	0	–	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{27}$	↘	0

f) La valeur exacte du maximum est $\frac{1}{6}$.

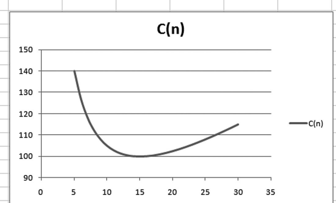
g) Le volume maximal de la boîte vaut $\frac{2}{27}$ m^3.

Déterminer un minimum

1. a) La formule à entrer dans la cellule B2 est =2*A2+40+450/A2.

b) Voir fichier « **02_page28.xlsx** ».

	A	B
1	n	C(n)
2	5	140
3	6	127
4	7	118,285714
5	8	112,25
6	9	108
7	10	105
8	11	102,909091
9	12	101,5
10	13	100,615385
11	14	100,142857
12	15	100
13	16	100,125
14	17	100,470588
15	18	101
16	19	101,684211
17	20	102,5
18	21	103,428571
19	22	104,454545



c) La valeur du minimum est obtenue pour $n = 15$.

d) Pour $9 \leqslant n \leqslant 26$.

2. a) $f'(x) = 2 - \frac{450}{x^2}$.

b) $x^2 = 225$ d'où $x = -15$ ou $x = 15$. Soit sur [5 ; 30], $f'(x) \geqslant 0$ pour x appartenant à [15 ; 30].

c)

x	5		15		30
signe de $f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	140	↘	100	↗	115

d) La valeur du minimum est $f(15) = 100$.

e) On se ramène à $2x^2 - 70x + 450 \leqslant 0$.

$\Delta = 1\,300$;

$x_1 = \dfrac{70 - \sqrt{1\,300}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{70 + \sqrt{1\,300}}{4}$.

Soit pour $x \leqslant x_1$ ou $x \geqslant x_2$.

3. a) Le nombre de commandes à réaliser afin d'obtenir un coût unitaire de gestion de stock minimal est 15.

b) Dans ce cas, le montant de ce coût minimal vaut 100 €.

c) Le nombre de commandes correspondant à un coût unitaire de gestion de stock inférieur ou égal à 110 € est compris entre 9 et 26.

Exercices et problèmes

Pages 29 à 32

Exercices

Fonction dérivée

1. a) $f'(x) = 8x$. **b)** $f(x) = -4x + 1{,}5$.

2. a) $f'(x) = 15x^2 - 4$. **b)** $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

3. a) $f'(x) = 4$. **b)** $f'(x) = 6x^2$.

4. a) $f'(x) = \dfrac{4}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

b) $f'(x) = -\dfrac{6}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

5. a) $f'(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.

6. a) $f'(x) = 3x^2 + 2$.
b) $f'(x) = 15x^2 - 4x$.

7. a) $f'(x) = -4x$.
b) $f'(x) = 3x^2 - 7$.

8. a) $f'(x) = 6x - \dfrac{2}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

b) $f'(x) = 15x^2 + \dfrac{4}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

9. a) $f'(x) = 42x + 1$.
b) $f'(x) = 6x - 6$.

10. a) $f'(x) = 9x^2 + 8x$.

b) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

11. a) $f'(x) = 7$, $f'(1) = 7$.
b) $f'(x) = 8x + 3$, $f'(3) = 27$.
c) $f'(x) = -3x^2 + 14x$, $f'(1) = 11$.

12. a) $f'(x) = -6x - 10$, $f'(0) = -10$.

b) $f'(x) = 14x - \dfrac{2}{x^2}$ avec $x \neq 0$, $f'(2) = 27{,}5$.

13. a) $f'(x) = x + 4$.
b) $f'(2) = 6$.
c) $y = 6x - 5$.

Dérivée et sens de variation

14. a) $f'(x) = 7$. **b)** $f'(x) = -4$.

x	0		10
signe de $f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	65

x	-5		6
signe de $f'(x)$		$-$	
$f(x)$	23	$\searrow$	-21

15. a) $f'(x) = 4x$.

x	-3		0		3
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$2x^2 - 1$	17	$\searrow$	-1	$\nearrow$	17

b) $f'(x) = \dfrac{4}{x^2} + 2.$

x	-5		-1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-9{,}8$	↗	2

16. a) $f'(x) = 6x^2 - 2$ **b)** $f'(x) = 2x - 3.$

x	-1		$-\sqrt{1/3}$		$\sqrt{1/3}$		3
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	0	↗	$\approx 0{,}770$	↘	$\approx -0{,}770$	↗	48

x	0		$1{,}5$		4
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-0{,}25$	↗	6

17. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x.$

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	0	↘	-4	↗	0

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↗	23	↘	-4	↗	7

18. a) $f'(x) = -10x.$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$-5x^2 + 2$	-3	↗	2	↘	-3

b) $f'(x) = 9x^2 + 4x - 12.$

x	-3		$\approx -1{,}40$		$\approx 0{,}96$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-24	↗	$\approx 15{,}49$	↘	$\approx -4{,}02$	↗	11

Dérivée et extremum

19. $f'(x) = 8x - 2$. Le minimum de f sur $[-1\,;\,1]$ est pour $x = \dfrac{1}{4}$. Il est égal à $\dfrac{3}{4}$.

20. $f'(x) = -81x^2 + 9$. Le maximum de f sur $[0\,;\,2]$ est pour $x = \dfrac{1}{3}$. Il est égal à $f(\dfrac{1}{3}) = 4$.

21. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Le maximum de f sur $[-2\,;\,0]$ est pour $x = -1$. Il est égal à 6.

22. $f'(x) = 1{,}5x^2 - 2$. Le minimum de f sur $[-1\,;\,4]$ est pour $x = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$. Il est égal à $f(\sqrt{\dfrac{4}{3}})$ $\approx -4{,}732$.

Problèmes

Problème 1

1. a) $C_A(n) = 100 \times n$.

b) Voir le graphique page 16.

2. a)

x	0	30	50	90	150
$f(x)$	4 800	3 000	2 200	1 560	3 000

x	200	300	400	410
$f(x)$	6 400	19 200	40 000	42 520

b) Voir le graphique page 16.

c) $f'(x) = 0{,}8x - 72$.

d) $f'(x) = 0$ pour $x = 90$.

e)

x	0		90		410
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4 800	↘	1 560	↗	42 520

f) Voir le graphique page 16.

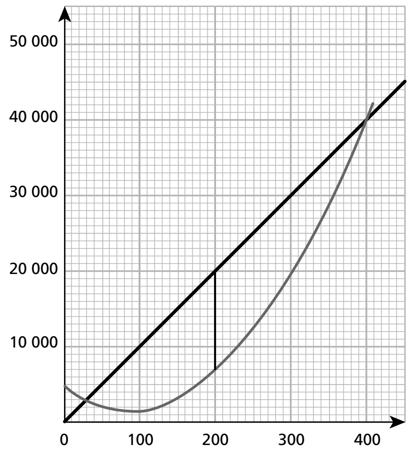
3. a) Les charges sont minimales pour 90 clients.

b) Il s'agit de la différence des extrémités du segment vertical.

20 000 – 6 500 = 13 500.

Soit, avec la précision du graphique, les 13 600 € de bénéfices.

Graphique pour les questions 1.b., 2.b., 2.f. et 3.b.



Problème 2

B est une fonction du second degré qui présente un maximum lorsque sa dérivée s'annule.

$B'(q) = -2q + 90$ et s'annule pour $q = 45$.

Il doit fabriquer 45 boîtes de jeu pour réaliser un bénéfice maximal.

$B(45) = 1\,764$. Dans ce cas, le bénéfice est de 1 764 €.

Problème 3

a) La recette obtenue est $R(q) = 38q$.

Le bénéfice est obtenu par $R(q) - C(q)$.

$B(q) = -0{,}02q^3 + 2{,}1q^2 - 36q - 80$.

b) $B'(q) = -0{,}06q^2 + 4{,}2q - 36$.

B' s'annule pour $q = 10$ et $q = 60$.

D'où le tableau de variation :

q	0		10		60	
signe de $B'(q)$		–	0	+	0	–
$B(q)$	– 80 ↘		– 250	↗	1 000	↘

Pour que le bénéfice soit maximal, l'entreprise doit fabriquer 60 lots.

c) Dans ce cas, le bénéfice est de 1 000 €.

Problème 4

1. A = (21 – 2 × 2)(29,7 – 2 × 3) = 402,9.

La surface imprimable vaut 402,9 cm².

2. $y = \dfrac{623{,}7}{x}$.

3. $A(x) = (x-4)(\dfrac{623{,}7}{x} - 6)$

$= 623{,}7 - 6x - 4 \times \dfrac{623{,}7}{x} + 2.$

Soit la relation donnée.

4. a) Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée lorsque $x > 0$.

$A'(x) = -6 + \dfrac{2\,494{,}8}{x^2}$. $A'(x) = 0$ avec $x > 0$, pour $x = \sqrt{415{,}8} \approx 20{,}\,39$.

L'aire est maximale pour $x = 20{,}39$ cm.

b) $y = \dfrac{623{,}7}{20{,}39} \approx 30{,}59$.

Cette page a pour dimensions 20,4 cm × 30,6 cm.

c) Non.

Problème 5

1. a) $f'(x) = 150 - \dfrac{540\,000}{x^2}$.

b) Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée lorsque $x > 0$.

$f'(x) = 0$ lorsque $150 - \dfrac{540\,000}{x^2} = 0$.

Soit $150x^2 - 540\,000 = 0$.

C'est-à-dire, pour $x > 0$,

lorsque $x = \sqrt{3600} = 60$.

c) $f(60) = 18\,000$. Le coût de gestion minimal vaut 18 000 €.

2. a) $f'(x) = 97{,}2 - \dfrac{6{,}75 \times 10^8}{x^2}$.

On obtient $f'(x) = 0$

lorsque $97{,}2x^2 - 6{,}75 \times 10^8 = 0$.

C'est-à-dire, pour $x > 0$, lorsque $x \approx 2\,635$.

$f(2\,635) = 762\,289$. Le coût de gestion minimal vaut 762 289 €.

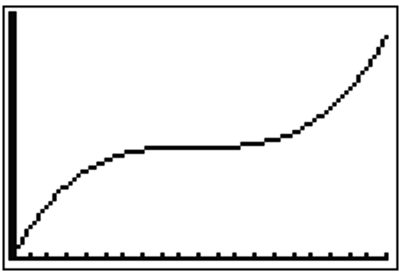
b) $f'(x) = 0{,}35 - \dfrac{3{,}0875 \times 10^8}{x^2}$.

On obtient $f'(x) = 0$
lorsque $0{,}35x^2 - 3{,}0875 \times 10^8 = 0$.
C'est-à-dire, pour $x > 0$, lorsque $x \approx 29\,701$.
$f(29\,701) = 22\,191$. Le coût de gestion minimal vaut 22 191 €.

Problème 6

1. a) $C'(x) = 1{,}5x^2 - 30x + 150$.
$\Delta = 0$, $C'(x) = 0$ pour $x = 10$. $C'(x) \geqslant 0$ pour x appartenant à $[0\,;\,20]$.
Donc C est croissante sur $[0\,;\,20]$.

b)



2. a) $C_M(x) = 0{,}5x^2 - 15x + 150$.

b) C_M est une fonction du second degré qui présente un minimum lorsque sa dérivée s'annule.

$C'_M(x) = x - 15$ et s'annule pour $x = 15$.

h	0		15		20
signe de $p'(x)$		−	0	+	
$p(x)$	150	↘	37,5	↗	50

c) Le coût moyen minimal est obtenu pour $x = 15$. $C_M(15) = 37{,}5$.
Le coût moyen minimal vaut 37,5 milliers d'euros.

3. a) $B(x) = -\,0{,}5x^3 + 15x^2 - 108x$.
$B'(x) = -\,1{,}5x^2 + 30x - 108$.
B' s'annule pour $x = 4{,}7$ et $x = 15{,}3$.
D'où le tableau de variation :

x	0		$\approx 4{,}7$		$\approx 15{,}3$		20
signe de $B'(x)$		−	0	+	0	−	
$B(x)$	− 108	↘	− 228	↗	68	↘	− 160

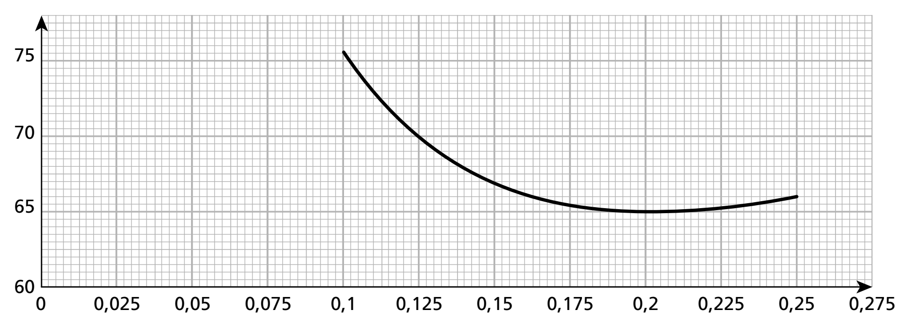
Pour que le bénéfice soit maximal, l'entreprise doit fabriquer 15,3 tonnes.

b) Non, le coût moyen est minimisé pour une production de 15 tonnes.

Problème 7

1. $p(0{,}1) = 75{,}5$; $p(0{,}18) = 65{,}23$; $p(0{,}2) = 65$; $p(0{,}22) = 65{,}19$; $p(0{,}25) = 66{,}05$.

2.



3. Graphiquement, $p(h)$ a pour valeur minimale 65.

4. a) $p'(h) = 105 - \dfrac{4,2}{h^2}$.

b) $p'(h) = 0$ pour $h = \sqrt{\dfrac{4,2}{105}} = 0,2$.

h	0,1		0,2		0,25
signe de $p'(x)$		–	0	+	
$p(x)$	77,5	↘	65	↗	66,05

5. a) L'épaisseur économique d'un mètre carré de la dalle considérée est 0,2 m.
b) Le prix minimal d'un mètre carré de la dalle vaut 65 €.

Problème 8

1. $C_m(x) = \dfrac{1}{10}x^2 - 30x + 2\,500$.

2. a) $R(x) = x \times p(x) = -\dfrac{45}{8}x^2 + 2\,750x$.
b) $R_m(x) = -\,11,25x + 2\,750$.
c) $R_m(x) = C_m(x)$ lorsque

$-\,11,25x + 2\,750 = \dfrac{1}{10}x^2 - 30x + 2\,500$.

Cela revient à résoudre l'équation
$0,1x^2 - 18,75x - 250 = 0$.
Soit pour $x = -\,12,5$ ou $x = 200$.
Comme $x > 0$, alors $R_m(x) = C_m(x)$ pour $x = 200$.

3. a) On obtient bien $B(x)$ en calculant : $B(x) = R(x) - C(x)$.

b) $B'(x) = -\,0,1x^2 + 18,75x + 250$.

c) Le bénéfice est maximal lorsque $B'(x) = 0$. Ce qui revient à résoudre la même équation qu'en 2. c. pour $R_m(x) = C_m(x)$.
Donc on a bien le bénéfice maximal lorsque la recette marginale est égale au coût marginal.

d) $B(200)$ = 158 333,33. Dans ce cas, le bénéfice maximal vaut 158 333,33 €.

Problème 9

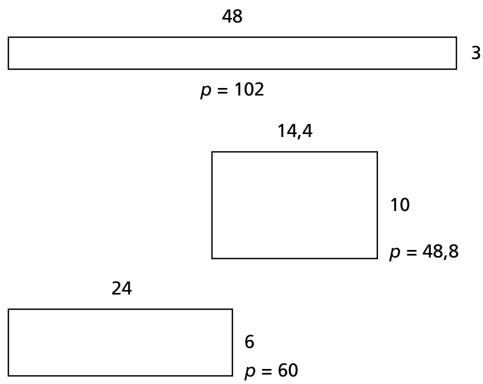
a) $B(x) = -\,x^3 + 3x^2 + 2\,520x - 500$.
$B'(x) = -\,3x^2 + 6x + 2\,520$.
$\Delta = 30\,276 > 0$; $x_1 = -\,28$ et $x_2 = 30$.

x	0		30	
signe de $B'(x)$		+	0	–
$B(x)$	– 500	↗	50 800	↘

b) L'ébénisterie doit produire et vendre 30 bureaux chaque mois pour maximiser son bénéfice.

Problème 10

1. a) et **b)**



c) Le rectangle de plus petit périmètre semble être le carré de côté 12.

2. a) On a $s = L \times l$ d'où $L = \dfrac{s}{l}$.

Donc $p = 2l + 2L = 2l + \dfrac{2s}{l}$.

b) Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée : $p'(x) = 2 - \dfrac{2s}{x^2}$.

$p'(x) = 0$ lorsque $2x^2 - 2s = 0$. C'est-à-dire, pour $x > 0$, lorsque $x = \sqrt{s}$.

c) Lorsque $x = \sqrt{s}$, le rectangle est un carré, ce qui confirme la conjecture de 1. c.

Je teste mes connaissances

Page 33

1. A
2. B
3. B
4. A
5. C
6. C
7. B
8. B
9. A
10. B

Je m'entraîne au CCF

Page 34

Partie A

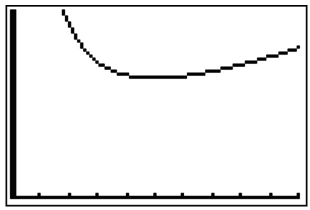
Nombre de commandes dans l'année	2	10	n
Coût de possession (en €)	400	80	$\frac{800}{n}$
Coût de passation pour l'année (en €)	64	320	$32.n$
Coût total de stockage (en €)	464	400	$\frac{800}{n} + 32n$

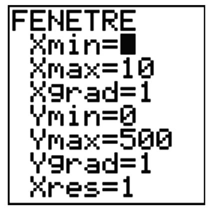
Partie B

1. $f'(x) = -\frac{800}{x^2} + 32.$

2.

x	2		5		10
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	464	$\searrow$	320	$\nearrow$	400





3. L'entreprise doit passer 5 commandes dans l'année afin d'obtenir un coût total de stockage minimal. Dans ce cas, le coût minimal est de 320 €.

4. Graphiquement, on lit que l'entreprise doit passer dans l'année entre 3,02 et 8,2 commandes, soit entre 4 et 8 commandes.

Suites numériques

3

Activités

Page 35

À l'aide d'un tableur, on peut calculer les sommes versées chaque année pendant 20 ans avec les propositions A et B. Puis on fait le total des sommes pour les deux propositions et on compare.

Pour calculer le montant avec la proposition A, on écrit dans la cellule B3 la formule =B2*1,04.

Pour calculer le montant avec la proposition B, on écrit dans la cellule C3 la formule =C2+1025.

On recopie ensuite ces deux formules jusqu'à la ligne 21.

Voici un exemple de tableau pouvant être obtenu avec un tableur.

La proposition A permettra à Rémi de gagner davantage d'argent.

	A	B	C
1	Année	Proposition A	Proposition B
2	1	20 000	20 000
3	2	20 800	21 025
4	3	21 632	22 050
5	4	22 497,28	23 075
6	5	23 397,1712	24 100
7	6	24 333,05805	25 125
8	7	25 306,38037	26 150
9	8	26 318,63558	27 175
10	9	27 371,38101	28 200
11	10	28 466,23625	29 225
12	11	29 604,8857	30 250
13	12	30 789,08113	31 275
14	13	32 020,64437	32 300
15	14	33 301,47015	33 325
16	15	34 633,52895	34 350
17	16	36 018,87011	35 375
18	17	37 459,62491	36 400
19	18	38 958,00991	37 425
20	19	40 516,33031	38 450
21	20	42 136,98352	39 475
22	TOTAL	595 562	594 750

Pages 36 et 37

Est-ce que je sais ?

1.

Suite numérique	Arithmétique	Géométrique	Ni arithmétique, ni géométrique
10 ; 15 ; 22,5 ; 33,75 ; 50,625		X	
396 ; 306 ; 216 ; 126 ; 36	X		
– 12 ; – 5 ; 2 ; 9 ; 16	X		
20 ; 10 ; 2 ; 1 ; 0,2			X
1 ; $\sqrt{2}$; 2 ; $2\sqrt{2}$; 4		X	

2. a) – 44 ; – 33 ; – 22 ; – 11 ; 0 $r = 11$
24 ; 20,4 ; 16,8 ; 13,2 ; 9,6 $r = -3{,}6$
b) 1 ; 0,6 ; 0, 36 ; 0,216 $q = 0{,}6$
0,5 ; 3 ; 18 ; 108 ; 648 $q = 6$

Activité 1

1. Malika gagne 30 points supplémentaires chaque mois.

2. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 30 puisque
$r = u_1 - u_0 = 80 - 50 = 30$.

3.

$u_0 = 50$
$u_1 = 80$ + r — $u_1 = u_0 + r$
$u_2 = 110$ + $2r$ — $u_2 = u_0 + 2r$
$u_3 = 140$ + $3r$ — $u_3 = u_0 + 3r$
$u_4 = 170$ + $4r$ — $u_4 = u_0 + 4r$
$u_5 = 200$ + $5r$ — $u_5 = u_0 + 5r$
$u_6 = 230$ + $6r$ — $u_6 = u_0 + 6r$
⋮
u_n + nr — $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

4. $u_{24} = u_0 + 24\,r$,
soit $u_{24} = 50 + 24 \times 30 = 770$.
Malika pourra donc acquérir 770 points si son abonnement dure 24 mois.

5. Ce nombre de points n'est pas suffisant pour recevoir gratuitement le portable offert pour 1 000 points de fidélité.

6. Si l'abonnement rapportait 40 points à Malika, on va considérer que les nombres de points acquis chaque mois forment une suite arithmétique de raison 40 et de premier terme $u_0 = 50$.
Pour trouver, avec cet abonnement, le nombre de mois au bout duquel elle pourra recevoir le portable de 1 000 points, il faut résoudre l'équation :
$1\,000 = 50 + n \times 40$.
On trouve $n = 23{,}75$.
Malika devra donc attendre 24 mois avec cet abonnement pour obtenir les 1 000 points nécessaires pour obtenir le portable gratuitement.

Activité 2

1. Si le nombre d'adhérents suit le principe de l'association, il y aura 8 adhérents la deuxième année et 16 adhérents la troisième.

2. La suite (v_n) est géométrique, sa raison est $q = 2$, le deuxième terme est $v_2 = 8$ et le troisième terme $v_3 = 16$.

3. $v_n = v_1 \times q^{n-1}$.

4. La sixième année, le nombre d'adhérents sera 128 car :
$v_4 = 32$; $v_5 = 64$; $v_6 = 128$.
L'association ne pourra pas organiser le gala la sixième année car l'objectif de 200 adhérents ne sera pas atteint.

On vérifie avec la formule établie à la question 3.
$v_6 = 4 \times 2^5 = 128$; on retrouve bien 128 adhérents.

J'utilise un logiciel

Pages 41 et 42

Comparer des formules

a) et b) Voir le tableau ci-dessous.

c) La formule qui permet par recopie de calculer C_n en fonction de n, à écrire dans la cellule C3, est =$B$3+A3*207.
Le symbole $ permet de fixer la cellule B3 comme cellule de référence (sa valeur ne sera pas modifiée lors de la recopie).
Les résultats des colonnes B et C sont identiques.
d) Il faut écrire en E3 la formule =$D$3*1,04^A3.
Les résultats des colonnes D et E sont identiques.
Les formules écrites dans les cellules B3 et E3 permettent d'obtenir, directement à partir de la valeur de *n*, le capital de la *n*-ième année.

	A	B	C	D	E
1		Placement 1		Placement 2	
2	rang n	C_n calculé mois après mois	C_n calculé directement	C_n' calculé mois après mois	C_n' calculé directement
3	0	4500	4500	4500,00	4500,00
4	1	4707	4707	4680,00	4680,00
5	2	4914	4914	4867,20	4867,20
6	3	5121	5121	5061,89	5061,89
7	4	5328	5328	5264,36	5264,36
8	5	5535	5535	5474,94	5474,94
9	6	5742	5742	5693,94	5693,94
10	7	5949	5949	5921,69	5921,69
11	8	6156	6156	6158,56	6158,56
12	9	6363	6363	6404,90	6404,90
13	10	6570	6570	6661,10	6661,10
14	11	6777	6777	6927,54	6927,54
15	12	6984	6984	7204,64	7204,64
16	13	7191	7191	7492,83	7492,83
17	14	7398	7398	7792,54	7792,54
18	15	7605	7605	8104,25	8104,25
19	16	7812	7812	8428,42	8428,42
20	17	8019	8019	8765,55	8765,55
21	18	8226	8226	9116,17	9116,17
22	19	8433	8433	9480,82	9480,82
23	20	8640	8640	9860,05	9860,05

e) Au bout de cinq ans, le placement le plus intéressant est le placement 1. À partir de la huitième année, c'est le placement 2 qui devient plus intéressant car il rapportera davantage d'argent.

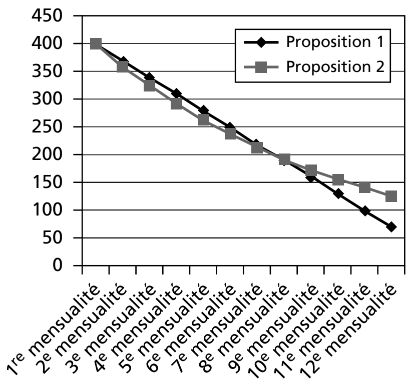
Comparer deux suites avec le tableur

1. Dans la cellule B3, il faut écrire la formule =B2–30 pour obtenir les mensualités de la proposition 1.
Dans la cellule C3, il faut écrire la formule =C2*0,9 pour obtenir les mensualités de la proposition 2.

	A	B	C
1		Proposition 1	Proposition 2
2	1ère mensualité	400	400,00
3	2ème mensualité	370	360,00
4	3ème mensualité	340	324,00
5	4ème mensualité	310	291,60
6	5ème mensualité	280	262,44
7	6ème mensualité	250	236,20
8	7ème mensualité	220	212,58
9	8ème mensualité	190	191,32
10	9ème mensualité	160	172,19
11	10ème mensualité	130	154,97
12	11ème mensualité	100	139,47
13	12ème mensualité	70	125,52
14	TOTAL	2820	2870,28

La suite de nombres formée par les mensualités de la proposition 1 est une suite arithmétique de raison $r = -30$.
La suite de nombres formée par les mensualités de la proposition 2 est une suite géométrique de raison $q = 0,9$.

2. Les premiers mois, les mensualités diminuent plus vite avec la proposition 2 qu'avec la proposition 1. À partir du 8^{e} mois, c'est l'inverse : les mensualités de la proposition 1 diminueront plus rapidement.



3. En comparant le coût total des deux crédits (voir le tableau), on constate que la proposition 1 est plus avantageuse car il faudra rembourser moins.

Exercices et problèmes

Pages 43 à 46

Exercices

Déterminer la nature d'une suite et sa raison

1. a) C'est une suite arithmétique de raison $r = 1{,}1$.
b) Le sixième terme est 15,6.
c) $u_n = 10{,}1 + (n - 1) \times 1{,}1$.
2. a) Cette suite est géométrique car les rapports $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ sont égaux.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{16}{64} = 0{,}25$; $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4}{16} = 0{,}25$;

$\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$; $\dfrac{u_4}{u_3} = \dfrac{0{,}25}{1} = 0{,}25$.

b) La raison est 0,25.
c) $u_n = 64 \times 0{,}25^n$.
d) Le 10^e terme de la suite est u_9.
$u_9 = 64 \times 0{,}25^9 \approx 2{,}44.\ 10^{-4}$.
3. Par lecture graphique, on trouve
$u_1 = -0{,}5$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3{,}5$, $u_4 = 7$ et $u_5 = 11{,}5$
$u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$; la suite n'est pas arithmétique.
$\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$; la suite n'est pas géométrique.
La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
4. a) La suite est arithmétique ;
$u_1 = 0{,}75$; $r = 2$.
b) La suite est géométrique ;
$u_1 = 0{,}1$; $q = 10$.
c) La suite est arithmétique ;
$u_1 = -7{,}7$; $r = 0{,}3$.
d) La suite est arithmétique ;
$u_1 = 1{,}75$; $r = -3$.
e) La suite est géométrique ;
$u_1 = -12$; $q = 2{,}3$.
5. Suite n° 1 :
$u_1 = 100$; $r = -10$; $u_n = 100 - 10(n - 1)$.
Suite n° 2 :
$u_1 = -15$; $r = 20$; $u_n = -15 + 20(n - 1)$.

Calculer les termes d'une suite

6. a) Calculer le 3^e terme d'une suite (u_n) de premier terme u_1 revient à calculer u_3.
b) Calculer le 5^e terme d'une suite (u_n) de premier terme u_0 revient à calculer u_4.
7. u_{62} est le 63^e terme de la suite (u_n).
$u_{62} = 13 + 62 \times (-1{,}4) = -73{,}8$.
8. v_{20} est le 20^e terme de la suite (v_n).
$v_{20} = 0{,}000\,15 \times 4^{19}$.
$v_{20} \approx 41\,231\,686{,}04$.
9. a) Cette suite est géométrique.
b) $q = 2{,}1$ et $u_1 = 0{,}7$.
c) $u_{21} = 0{,}7 \times 2{,}1^{20}$.
$u_{21} \approx 1\,947\,529$.
10. a) Cette suite est arithmétique.
b) $r = 4$ et $v_0 = -1$.
c) $v_{1000} = 4 \times 1\,000 - 1 = 3\,999$.

Problèmes

Problème 1

La mise de départ de 0,15 € double à chaque partie. On peut donc considérer une suite géométrique de premier terme 0,15 et de raison 2. Avec un tableur, on obtient le tableau suivant.

	A	B
1	Partie	Mise en euros
2	1	0,15
3	2	0,3
4	3	0,6
5	4	1,2
6	5	2,4
7	6	4,8
8	7	9,6
9	8	19,2
10	9	38,4

Les joueurs peuvent jouer 8 parties de cartes sans dépasser la mise limite de 20 euros.

Problème 2

1. $u_1 = 51\ 625$ et $u_2 = 53\ 302{,}812\ 5$.
2. La suite (u_n) est géométrique.
3. La raison de la suite est 1,032 5.
4. $u_{10} = 50\ 000 \times 1{,}0325^{10.}$
$u_{10} \approx 68\ 844{,}72$.
La valeur acquise, au bout de 10 ans, en plaçant le capital sur ce compte, est 68 844,72 euros.

Problème 3

1. a) La raison de la suite est $r = 30\ 000$.
b) $C_n = 300\ 000 + n \times 30\ 000$.
2. Fin 2020, le chiffre d'affaires sera 600 000 € car
$C_{10} = 300\ 000 + 10 \times 30\ 000 = 600\ 000$.
3. Au bout de la 24^{e} année, le capital dépassera 1 000 000 d'euros.
Remarque : pour trouver ce résultat, on peut utiliser un tableur, une calculatrice graphique ou résoudre, par le calcul, l'inéquation $Cn > 1\ 000\ 000$.

Problème 4

1. =B2+$B$2*0,04.
2. =$C$2*1,035^A3.
3.

	A	B	C
1	Rang *n* de l'année	Capital acquis par Miguel	Capital acquis par Julien
2	0	1 500,00 €	1 500,00 €
3	1	1 560,00 €	1 552,50 €
4	2	1 620,00 €	1 606,84 €
5	3	1 680,00 €	1 663,08 €
6	4	1 740,00 €	1 721,28 €
7	5	1 800,00 €	1 781,53 €
8	6	1 860,00 €	1 843,88 €
9	7	1 920,00 €	1 908,42 €
10	8	1 980,00 €	1 975,21 €
11	9	2 040,00 €	2 044,35 €
12	10	2 100,00 €	2 115,90 €
13	11	2 160,00 €	2 189,95 €
14	12	2 220,00 €	2 266,60 €
15	13	2 280,00 €	2 345,93 €
16	14	2 340,00 €	2 428,04 €
17	15	2 400,00 €	2 513,02 €

4. Au bout de 8 ans, Miguel a le capital acquis le plus important.
Au bout de 15 ans, Julien a acquis le plus grand capital.

Problème 5

Partie I

1. Les remboursements mensuels baissent de 2 % chaque mois par rapport au mois précédent donc :
$1\ 200 \times 2 \div 100 = 24$.
$1\ 200 - 24 = 1\ 176$ donc $u_2 = 1\ 176$.
De même :
$1\ 176 \times 2 \div 100 = 23{,}52$
$1\ 176 - 23{,}52 = 1\ 152{,}48$ donc $u_3 = 1\ 152{,}48$.

2. $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1\ 176}{1\ 200} = 0{,}98$ et

$\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1\ 152{,}48}{1\ 176} = 0{,}98$; les rapports étant égaux et la diminution toujours de 2 %, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,98.

Partie II

1. Dans la cellule C3, le couple peut écrire la formule =C2*0,98.
2. Voir le tableau page 25.

	A	B	C	D	E	F
1	Année n de remboursement	Montant (en €) du remboursement mensuel lors de la n-ième année Banque AA	Montant (en €) du remboursement mensuel lors de la n-ième année Banque BB		Montant (en €) du remboursement annuel lors de la n-ième année Banque AA	Montant (en €) du remboursement annuel lors de la n-ième année Banque BB
2	1	1 047	1 200,00		12564	14400
3	2	1 047	1 176,00		12564	14112,00
4	3	1 047	1 152,48		12564	13829,76
5	4	1 047	1 129,43		12564	13553,16
6	5	1 047	1 106,84		12564	13282,10
7	6	1 047	1 084,70		12564	13016,46
8	7	1 047	1 063,01		12564	12756,13
9	8	1 047	1 041,75		12564	12501,01
10	9	1 047	1 020,92		12564	12250,99
11	10	1 047	1 000,50		12564	12005,97
12	11	1 047	980,49		12564	11765,85
13	12	1 047	960,88		12564	11530,53
14	13	1 047	941,66		12564	11299,92
15	14	1 047	922,83		12564	11073,92
16	15	1 047	904,37		12564	10852,44
17	16	1 047	886,28		12564	10635,40
18	17	1 047	868,56		12564	10422,69
19	18	1 047	851,19		12564	10214,23
20	19	1 047	834,16		12564	10009,95
21	20	1 047	817,48		12564	9809,75
22				Total des remboursements	251280	239322,26

Le montant des mensualités la dernière année de remboursement serait de 817,48 €.

Partie III

1. Voir les colonnes E et F du tableau ci-dessus pour connaître le montant total des remboursements : 251 280 € pour la banque AA et 239 322,26 € pour la banque BB.

2. La banque qui propose la formule où le montant total des versements est le plus faible est la banque BB. C'est donc celle que le couple a intérêt à choisir s'il veut dépenser le moins d'argent sur 20 ans.

Problème 6

1. Si la valeur de la voiture diminue de 20 % chaque année par rapport à l'année précédente, cela revient à multiplier par 0,80 la valeur de la voiture pour connaître sa valeur de revente l'année suivante. La suite (V_n) est donc une suite géométrique de raison 0,80.

2. $V_5 = V_0 \times q^5$
$V_5 = 14\,000 \times 0{,}80^5$
$V_5 = 4\,587{,}52$.
Au bout de 5 ans, la voiture vaudra environ 4 600 €.

3. a) Si le prix des voitures augmente de 2 % chaque année entre 2010 et 2015, alors une voiture valant 14 000 € en 2010 vaudra environ 15 460 € en 2015 car
$14\,000 \times 1{,}02^5 \approx 15\,457{,}13$ soit environ 15 460 €.

b) Romain devra donc dépenser environ 10 860 € pour remplacer sa voiture en 2015 car :
$15\,460 - 4\,600 = 10\,860$.

Problème 7

1. a) La suite de nombres formée par le nombre de logements sociaux de la ville A est une suite arithmétique car on ajoute tous les ans 160 logements supplémentaires.
$a_n = a_0 + nr$; d'où $a_n = 3\,460 + 160\,n$.

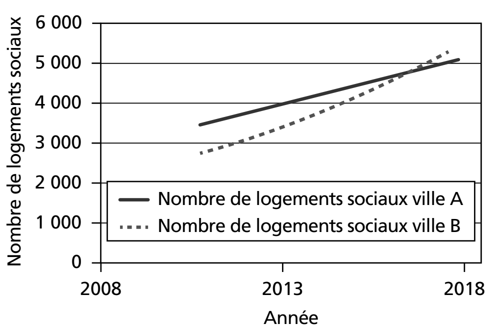
b) En 2019, le nombre de logements sociaux correspond à a_{10}.
$a_{10} = 3\,460 + 160 \times 10 = 5\,060$.
Le nombre de logements sociaux en 2019 n'aura donc pas doublé car il est inférieur à 6 920 logements.

2. La suite (b_n) est une suite géométrique de raison 1,07.

3. a)

	A	B	C	D
1	Année	Rang de l'année	Nombre de logements sociaux ville A	Nombre de logements sociaux ville B
2	2009	0	3 460	2740
3	2010	1	3 620	2931,8
4	2011	2	3 780	3137,026
5	2012	3	3 940	3356,61782
6	2013	4	4 100	3591,58107
7	2014	5	4 260	3842,99174
8	2015	6	4 420	4112,00116
9	2016	7	4 580	4399,84125
10	2017	8	4 740	4707,83013
11	2018	9	4 900	5037,37824
12	2019	10	5 060	5389,99472
13-15	total des logements sociaux construits entre 2010 et 2019		1600	2649,99472

b) On constate que le nombre de logements sociaux de la ville A augmente régulièrement alors que le nombre de logements sociaux de la ville B augmente de plus en plus vite au fil des années.



c) En utilisant le tableur, on peut calculer le nombre de logements sociaux construits pour chaque ville en dix ans : pour la ville A, il y a eu 1 600 logements sociaux supplémentaires construits ; pour la ville B, il y a eu 2 650 logements sociaux nouveaux. La ville la plus active, sur cette période, dans la construction des logements sociaux, est donc la ville B.

Problème 8

1. La production du deuxième mois va augmenter de 5 % par rapport au mois précédent donc :
$4\,000 \times 5 \div 100 = 200$, soit 200 vestes polaires supplémentaires.
Le deuxième mois, la production sera donc de 4 200 vestes polaires. En procédant de même, on trouve que la production sera de 4 410 vestes polaires le troisième mois.
On en déduit $u_2 = 4\,200$ et $u_3 = 4\,410$.

2. $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4\,200}{4\,000} = 1{,}05\,;\ \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{4\,410}{4\,200} = 1{,}05.$

u_1, u_2 et u_3 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,05.

3.

	A	B	C
1	Mois	n	u_n
2	janvier	1	4000
3	février	2	4200
4	mars	3	4410
5	avril	4	4630,5
6	mai	5	4862,025
7	juin	6	5105,12625
8	juillet	7	5360,38256
9	août	8	5628,40169
10	septembre	9	5909,82178
11	octobre	10	6205,31286
12	novembre	11	6515,57851
13	décembre	12	6841,35743
14		TOTAL	63668,5061

4. La production totale de vestes polaires sur l'année 2011 sera d'environ 63 669 vestes polaires.
Pour les fabriquer, il faudra recycler 1 719 063 bouteilles en plastique.
$63\,669 \times 27 = 1\,719\,063$.

5. $u_{36} = 4\,000 \times 1{,}05^{35} \approx 22\,064$.
L'objectif de production de 22 000 vestes polaires fabriquées mensuellement sera

donc bien atteint en moins de 3 ans puisque la production prévue le 36e mois est de 22 064 vestes polaires.

Je teste mes connaissances

Page 47

1. A	6. A
2. B	7. B
3. B	8. C
4. B	9. A
5. C	10. B

Je m'entraîne au CCF

Page 48

Partie A

1. $\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{840}{800} = 1{,}05$; $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{882}{840} = 1{,}05$;

$\dfrac{U_3}{U_2} = \dfrac{926{,}1}{882} = 1{,}05.$

Les rapports $\dfrac{U_n}{U_{n-1}}$ étant égaux, la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

2. $U_n = U_0 \times q^n$, soit $U_n = 800 \times 1{,}05^n$.

3. Le montant du loyer au premier janvier 2015 correspond à U_8.
$U_8 = 800 \times 1{,}05^8 \approx 1\ 181{,}96$.
Le montant du loyer au premier janvier 2015 sera donc d'environ 1 182 €.

4. Lorsque le loyer dépassera 40 % de sa valeur initiale, soit 1 120 €, le couple décidera d'acheter une maison.

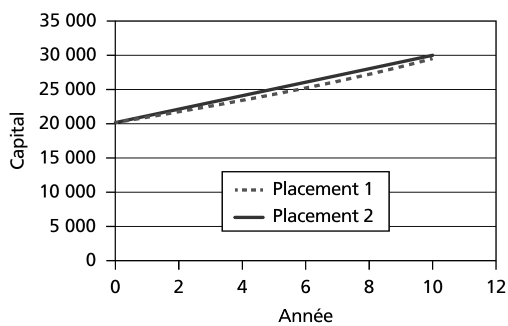
Par calcul, on trouve : $U_6 \approx 1\ 072{,}08$;
$U_7 \approx 1\ 125{,}68$.
C'est donc au cours de la septième année que le couple devra se mettre à la recherche d'une maison.

Remarque : on peut également utiliser un tableur ou une calculatrice graphique pour répondre à cette question.

Partie B

1. Le placement 1 étant à intérêt composé à 4 %, les capitaux acquis chaque année forment une suite géométrique de raison 1,04.
$C_n = C_0 \times 1{,}04^n$ soit $C_n = 20\ 000 \times 1{,}04^n$.
Le placement 2 étant à intérêt simple à 5 %, les capitaux acquis chaque année augmentent de 1 000 € ; ils forment une suite arithmétique de raison 1 000.
$20\ 000 \times 5 \div 100 = 1\ 000$ soit 1 000 euros d'augmentation.
$C'_n = C'_0 + 1\ 000\,n$ soit
$C'_n = 20\ 000 + 1\ 000\,n$.

2.



3. Graphiquement, on trouve que pour obtenir le plus rapidement possible un capital de 30 000 euros, le couple a intérêt à choisir le placement 2.

Probabilités

4

Activités

Page 49

La probabilité de rencontrer Odin et de l'emporter est $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Pages 50 et 51

Est-ce que je sais ?

a) La probabilité que la bille tirée soit verte est $\frac{2}{5}$.

b) La probabilité que la bille tirée ne soit pas verte est $\frac{3}{5}$.

Activité 1

1. a) La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{6}$.

b) Erratum : ceci n'est pas une question.

c) $A = \{4, 5, 6\}$.

d) Il y a 3 cas favorables à A.

e) $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

2. a)

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,25	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05

Il n'y a pas équiprobabilité des six cas possibles.

b) $B = \{2, 4, 6\}$.

c) $P(B) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}45$.

Activité 2

1. a) $A = \{2, 4, 6\}$ et $P(A) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}45$.

b) $\bar{A}$: « le numéro sorti est impair ».

c) $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ et

$P(\bar{A}) = 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}55$.

d) On a $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ou encore $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. a) Les fréquences se stabilisent.

b) On peut estimer que $P(A \cap B) \approx 0{,}20$ et $P(A \cup B) \approx 0{,}55$.

c) $A \cap B = \{4, 6\}$.

d) $P(A \cap B) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}20$. Cela confirme l'estimation précédente.

e) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

f) $P(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}55$. Cela confirme l'estimation précédente.

g) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}45 + 0{,}30 - 0{,}20 = 0{,}55 = P(A \cup B)$.

J'utilise un logiciel

Pages 55 et 56

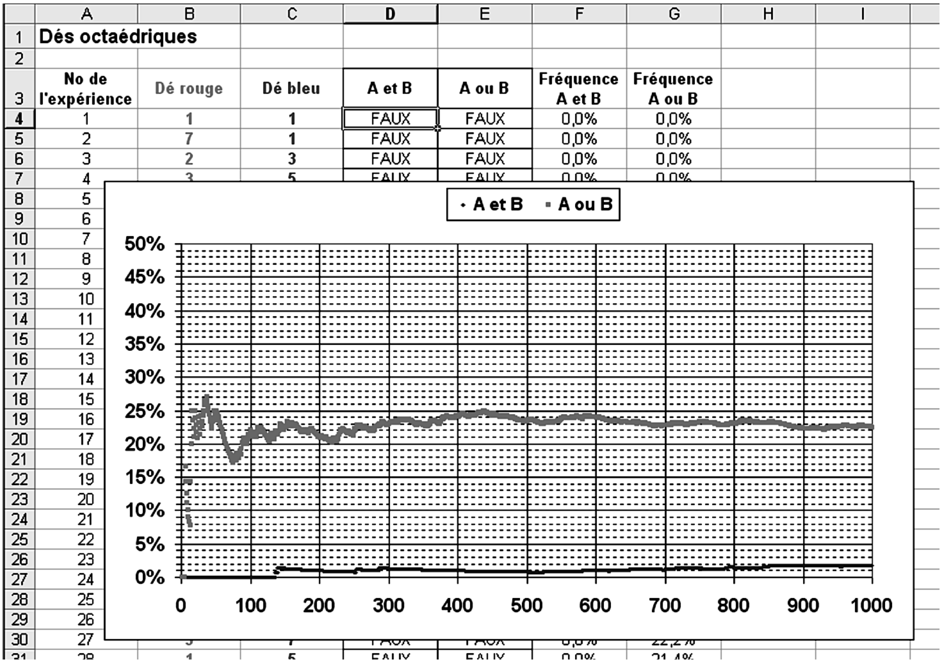
Expérimenter intersection et réunion

1. a) « Faire un double 8 » correspond à l'événement A et B, c'est-à-dire $A \cap B$.

b) L'événement $A \cup B$ correspond à « l'un au moins des deux dés tombe sur la face 8 ».

c) L'événement dont la probabilité semble la plus faible est $A \cap B$.

d)



L'instruction en B4 simule le lancer du dé rouge.

e) La cellule E4 affiche « VRAI » quand B4 vaut 8 ou quand C4 vaut 8. Elle affiche « FAUX » dans tous les autres cas.

f) On peut faire les estimations suivantes : $P(A \cap B) \approx 0{,}24$; $P(A \cup B) \approx 0{,}02$.

2. a) Il y a $8 \times 8 = 64$ chemins possibles.

La probabilité d'une issue est $\frac{1}{64}$.

b) $P(A) = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{1}{8}$;

$P(A \cap B) = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

c) On en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64} \approx 0{,}234$.

3. La probabilité de panne, durant la période de garantie, du réseau 1 est $\frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

La probabilité de panne, durant la période de garantie, du réseau 2 est $\frac{15}{64} \approx 0{,}234$.

Estimer puis calculer une probabilité

1. a) La formule entrée en B3 simule un lancer de pile ou face sous la forme 1 ou 0.

b) La cellule J3 affiche « VRAI » lorsqu'il y a sept « 0 » ou sept « 1 ». Elle affiche « FAUX » dans tous les autres cas.

c) On observe assez rarement l'affichage « VRAI ».

d) On peut estimer la probabilité d'avoir sept « pile » ou sept « face » après sept lancers d'une pièce supposée équilibrée à environ 0,016.

M2 = =NB.SI(J:J;"VRAI")/10000

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Alarme des sept points**												
2	Numéro de l'expérience									Réalisation de l'événement		Fréquence de réalisation	**0,0157**
3	1	1	0	1	0	1	1	1		FAUX			
4	2	0	0	0	1	1	1	1		FAUX			
5	3	1	1	0	1	1	0	0		FAUX			
6	4	0	1	0	0	0	1	1		FAUX			
7	5	0	0	1	0	1	1	1		FAUX			
8	6	0	1	1	1	1	0	1		FAUX			
9	7	1	1	0	1	0	0	1		FAUX			
10	8	1	0	0	0	1	0	1		FAUX			
11	9	1	0	1	1	1	0	0		FAUX			
12	10	0	0	0	0	0	1	0		FAUX			
13	11	0	0	1	1	1	1	0		FAUX			
14	12	0	1	1	1	0	0	1		FAUX			
15	13	0	0	0	0	1	0	1		FAUX			
16	14	0	0	1	1	0	0	0		FAUX			
17	15	1	0	1	1	0	1	1		FAUX			
18	16	0	1	0	1	0	1	1		FAUX			
19	17	0	0	0	0	0	0	0		VRAI			
20	18	0	0	0	0	1	0	0		FAUX			
21	19	1	0	0	1	1	0	1		FAUX			
22	20	0	1	0	0	0	1	0		FAUX			
23	21	0	1	1	0	0	0	1		FAUX			
24	22	0	0	0	1	1	1	0		FAUX			
25	23	0	1	0	0	0	0	1		FAUX			
26	24	1	1	1	0	0	1	0		FAUX			
27	25	0	0	0	1	0	0	0		FAUX			
28	26	1	0	1	0	1	0	0		FAUX			
29	27	1	1	1	1	1	1	1		VRAI			
30	28	0	0	0	1	0	0	1		FAUX			
31	29	1	0	0	1	1	1	1		FAUX			

2. a) Il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$ chemins possibles.
b) Il y a 2 issues favorables sur 128 issues possibles équiprobables. La probabilité recherchée est $\frac{2}{128} = \frac{2}{2^7} = \frac{1}{2^6} \approx 0{,}0156$.

c) Lorsqu'une alerte est donnée, la probabilité que ce soit une fausse alerte est faible.

Exercices et problèmes

Pages 57 à 60

Exercices

Déterminer un modèle de probabilité

1. a) Méthode 2.

b) Méthode 1.

c) Méthode 2.

d) Méthode 1.

2. • Roulette A : la probabilité d'obtenir le rouge est 0,25 ; celle d'obtenir le bleu est 0,5 ; et celle d'obtenir le vert est 0,25.
• Roulette B : la probabilité d'obtenir le rouge est $\frac{1}{3}$; celle d'obtenir le bleu est $\frac{1}{3}$; et celle d'obtenir le vert est $\frac{1}{3}$.

• Roulette C : la probabilité d'obtenir le rouge est 0,3 ; celle d'obtenir le bleu est 0,2 ; et celle d'obtenir le vert est 0,5.

Calculer une probabilité par addition de probabilités d'issues

3. a) On a $5 \times p_1 + p_6 = 1$; d'où $5 \times p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ donc $p_1 = 0{,}04 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$.

b) On a $A = \{2, 4, 6\}$; d'où $P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}8 = 0{,}88$.

Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité

4. a) La probabilité que la fiche tirée soit celle d'un homme est : $\frac{517}{1\,000} = 0{,}517$.

b) La probabilité que la fiche tirée soit celle d'une femme est : $\frac{483}{1\,000} = 0{,}483$.

c) La probabilité que la fiche tirée soit celle d'une personne de moins de 65 ans est : $\frac{800}{1\,000} = 0{,}8$.

5. On peut dresser le tableau suivant :

	Hypothèse 1	Hypothèse 2	total
Aubois	45	92	137
Bellevie	156	85	241
Total	201	177	378

a) Il y a 137 bulletins provenant d'Aubois. La probabilité que le bulletin tiré provienne d'Aubois est $\frac{137}{378} \approx 0{,}36$ (car on est dans une situation d'équiprobabilité).

b) Il y a 201 bulletins en faveur de l'hypothèse 1.
La probabilité que le bulletin tiré soit en faveur de l'hypothèse 1 est $\frac{201}{378} \approx 0{,}53$.

c) Il y a 45 bulletins provenant d'Aubois et en faveur de l'hypothèse 1.
La probabilité que le bulletin tiré provienne d'Aubois et soit en faveur de l'hypothèse 1 est $\frac{45}{378} \approx 0{,}12$.

6. a)

Salaires mensuels	Effectifs
[1 000 ; 1 400[	80
[1 400 ; 1 800[	40
[1 800 ; 2 200[	40
[2 200 ; 2 600[	30
[2 600 ; 3 000]	10
Total	200

b) $P(A) = \frac{80}{200} = 0{,}4$.

$P(B) = \frac{40}{200} = 0{,}2$.

c) $A \cup B$: « Le salarié a un salaire compris entre 1 000 et 1 800 euros (1 800 exclus) ».
$\bar{A}$: « Le salarié a un salaire supérieur ou égal à 1 400 euros ».

d) Erratum : l'élève doit calculer $P(A \cup B)$.
$P(A \cup B) = \frac{100}{200} = 0{,}5$ et $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Passer du langage des probabilités au langage courant et réciproquement

7. a) $\bar{A}$: « La carte tirée n'est pas un cœur ».
b) $A \cap B$: « La carte tirée est une figure de cœur ».
c) Il y a 3 figures de cœur donc
$P(A \cap B) = \frac{3}{32} = 0{,}9375$.

d) $A \cup B$: « La carte tirée est un cœur ou une figure ».

e) Il y a 8 cartes de cœur et 9 figures qui ne sont pas de cœur, donc 17 cartes pouvant conduire à $A \cup B$.

Donc $P(A \cup B) = \frac{17}{32} = 0{,}53125$.

Remarque : on constate que $P(A \cup B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{32} + \frac{12}{32} - \frac{3}{32}$.

8. Figure 1 : jaune A ; bleu $\bar{A}$.
Figure 2 : jaune $A \cup B$; bleu $\bar{A} \cap \bar{B}$.
Figure 3 : jaune $A \cup \bar{B}$; bleu $\bar{A} \cap B$.

Utiliser un tableau ou un arbre

9. a)

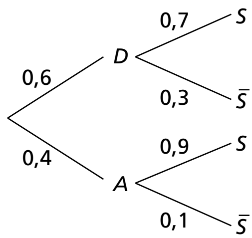
	Coupures de 10 €	Coupures de 20 €	Coupures de 50 €	Total
Billets falsifiés	0	3	2	5
Billets non falsifiés	600	797	598	1 995
Total	600	800	600	2 000

b)

	D	V	C	Total
F	0	0,0015	0,001	0,0025
$\overline{F}$	0,3	0,3985	0,299	0,9975
Total	0,3	0,4	0,3	1

c) $\overline{F}$: « Le billet choisi n'est pas falsifié ». $P(\overline{F}) = 0{,}9975$.
$V \cap F$: « Le billet choisi est un billet de 20 euros falsifié ». $P(V \cap F) = 0{,}0015$.
$V \cup C$: « Le billet choisi est un billet de 20 euros ou un billet de 50 euros ».
$P(V \cup C) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$.

10. a)



b) $A \cap \overline{S}$ correspond à l'événement : « Le tirage au sort a désigné un client de la formule aventure non satisfait ».
$P(A \cap \overline{S}) = 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}04$.

c) $P(\overline{S}) = 0{,}6 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}22$.

Calculer la probabilité de la réunion ou de l'intersection d'événements

11. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}6$.

12. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}6 + 0{,}2 - P(A \cap B)$.

a) Si $P(A \cap B) = 0{,}1$, alors $P(A \cup B)$
$= 0{,}6 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}7$.

b) Si A et B sont deux événements disjoints, $P(A \cap B) = 0$,
alors $P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}2 - 0 = 0{,}8$.

13. a) $\overline{A}$: « Alex donne un avis défavorable ».
$\overline{B}$: « Ben donne un avis défavorable ».
$A \cap B$: « Alex et Ben donnent un avis favorable ».
$A \cup B$: « Alex ou Ben, au moins, donne un avis favorable ».

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}6 = 0{,}9$.

Problèmes

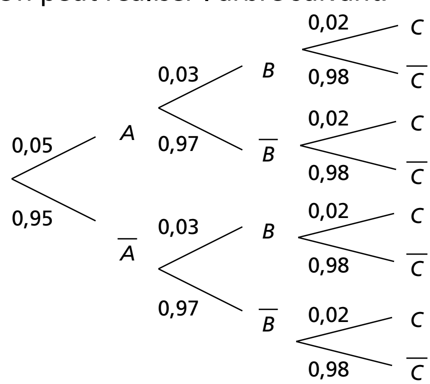
Problème 1

1. D'après les instructions du tableur, $P(A) = 0{,}05$; $P(B) = 0{,}03$; et $P(C) = 0{,}02$.

2. La cellule D2 affiche $1 \times 1 \times 1 = 1$ (sinon elle affiche 0).

3. L'événement $A \cap B \cap C$ s'est réalisé 4 fois.

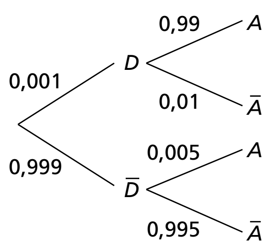
4. On peut réaliser l'arbre suivant.



La probabilité de toucher le jackpot est $0{,}05 \times 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}00003$.

Problème 2

1.



2. La probabilité qu'un jour donné le système de contrôle déclenche une fausse alerte est :

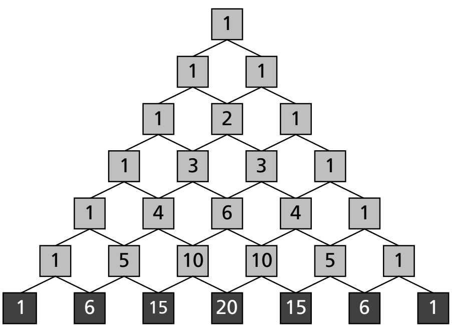
$P(\bar{D} \cap A) = 0{,}999 \times 0{,}005 = 0{,}004995$ soit environ 0,5 % des jours où se déclenche une fausse alerte.

3. $P(A) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}005$
$= 0{,}005985$.
La probabilité qu'un jour donné se déclenche une alerte est 0,005985 (environ 0,6 % des jours).
Remarque : on constate que le rapport entre les fausses alertes et les alertes est $\frac{0{,}004995}{0{,}005985}$, c'est-à-dire qu'environ 83 % des alertes sont de fausses alertes.

Problème 3

1. On peut estimer p_3 à environ 0,32 et p_6 à environ 0,02.

2. a)



b) Au total, il y a
$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$ chemins.
c) En supposant que les 64 chemins sont équiprobables, on en déduit que :

$p_0 = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$;

$p_1 = \frac{6}{64} \approx 0{,}094$;

$p_2 = \frac{15}{64} \approx 0{,}234$;

$p_3 = \frac{20}{64} = 0{,}3125$;

$p_4 = \frac{15}{64} \approx 0{,}234$;

$p_5 = \frac{6}{64} \approx 0{,}094$;

$p_6 = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

Je teste mes connaissances

Page 61

1. B
2. C
3. B
4. C
5. A
6. C
7. B
8. A
9. A
10. A

Je m'entraîne au CCF

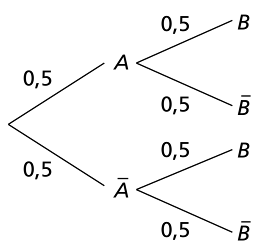
Page 62

Partie A

1. L'affichage « 0 » correspond à « garçon » et l'affichage « 1 » correspond à « fille ».
2. L'affichage VRAI correspond à « au moins une fille parmi les deux enfants ».
L'affichage FAUX correspond à « deux garçons ».
3. Il y a eu 7 495 cas sur 10 000 avec « au moins une fille » sur les deux enfants.
4. La probabilité d'avoir au moins une fille lorsque l'on a deux enfants est d'environ 0,75.

Partie B

1. C'est l'événement $A \cup B$.
2.



3. $P(A \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Ce résultat confirme les observations effectuées par simulation.

Exponentielles et logarithme décimal

5

Activités

Page 63
Nombre d'habitants prévus à Saint-Désert au 1er janvier 2012 : 52 500.
Nombre d'habitants prévus à Saint-Désert au 1er janvier 2013 : 55 135.
Nombre d'habitants prévus à Saint-Désert au 1er juillet 2012 : les élèves peuvent proposer de calculer la moyenne des deux résultats précédents :
$(52\,500 + 55\,135) \div 2 = 53\,812$.
Le calcul exact est :
$50\,000 \times 1{,}05^{1,5} \approx 53\,796$.

Pages 64 et 65

Est-ce que je sais ?

1. $u_3 = 12{,}5$; 6^{e} terme $= u_5 = 1{,}5625$.

2. Les suites géométriques correspondent aux propositions a. c. et d.

Activité 1

1. a) $u_0 = 1$; $u_1 = 10$; $u_2 = 100$; $u_3 = 1\,000$; $u_4 = 10\,000$.

b) La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 10.

c) $u_n = 1 \times 10^n$.

2. a) $t = 1{,}5$.
$h(1{,}5) = 10^{1,5} \approx 32$. La hauteur de la plante au bout d'une semaine et demie est 32 mm.

b) $t = \dfrac{6}{7}$.

$h\left(\dfrac{6}{7}\right) = 10^{6/7} \approx 7$. La hauteur de la plante au bout de 6 jours est 7 mm.

Activité 2

1. a) La fonction f est croissante.

c) Le point N décrit une courbe symétrique de C_f par rapport à la première bissectrice.

d) $10^{0,2} \approx 1{,}58$; alors $\log 1{,}58 \approx 0{,}2$.
$10^{-0,3} \approx 0{,}5$; alors $\log 0{,}5 \approx -0{,}3$.

2. a) $\log 18 \approx 1{,}26$; $\log 2\,570 \approx 3{,}41$.

c) La fonction log est croissante.

e) $\log (10^x) = x$.

Activité 3

a) $\log (4 \times 9) \approx 1{,}556$; $\log 4 \approx 0{,}602$; $\log 9 \approx 0{,}954$.

b) Les valeurs approchées de $\log (4 \times 9)$ et de $\log 4 + \log 9$ sont égales.

J'utilise un logiciel

Pages 69 et 70
Voir fichiers « **05_interpolation_corrige.xls** » et « **05_interpolation_corrige.ods** ».

1. a) $u_0 = 1$; la raison de la suite est 0,5.

b) $u_2 = 0{,}25$; $u_5 = 0{,}03125$.

3. a) La suite u_0, y, u_1 est une suite géométrique. Donc $\dfrac{y}{u_0} = \dfrac{u_1}{y}$.

L'égalité des produits en croix permet d'écrire : $y^2 = u_0 \times u_1$.
$y = \sqrt{1 \times 0,5} \approx 0,70$.

c) La quantité de médicament dans le sang au bout d'une heure et demie est 0,35 centilitre.

4. b) Pour $t = 3,25$, on a $y \approx 0,074$.
La quantité de médicament dans le sang au bout de trois heures et quart est 0,074 centilitre.

Exercices et problèmes

Pages 71 à 74

Exercices

Calculer un logarithme décimal

1. $\log 1\,000 = 3$; $\log 0,01 = -2$; $\log(10^{-5}) = -5$; $\log(10^6) = 6$; $\log 17,2 \approx 1,24$; $\log 0,99 \approx -0,004$, soit 0 en arrondissant au centième.

2. $\log 3,2 \approx 0,51$; $\log\left(\frac{1}{5}\right) \approx -0,70$; $\log\left(6 \times 10^3\right) \approx 3,78$.

3. Un seul calcul est impossible : $\log(-5^2)$.

4. Nombres positifs : $\log(10^3)$; $\log 8,2$; $\log(-5)^2$; $\log 1,05$.

Nombres négatifs : $\log\left(\frac{2}{3}\right)$; $\log(10^{-2})$; $\log 0,9$.

Appliquer les propriétés opératoires du logarithme décimal

5. $\log(10^8) = 8$; $\log(10^{-1}) = -1$;
$\log(10^{3,7}) = 3,7$; $\log(10^{-0,8}) = -8$.

6. $\log 16 = 4 \log 2$; $\log 20 = 1 + \log 2$;
$\log(2 \times 10^{-5}) = \log 2 - 5$;
$3 \log 8 - 7 \log 4 = -5 \log 2$;
$\log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2$;
$\log(2 \times 10^7) + \log 2 = 2 \log 2 + 7$.

7. $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0,778$;
$\log 15 = \log 3 + \log 5 = 1,176$;
$\log 50 = \log 2 + 2\log 5 = 1,699$;
$\log 1,5 = \log 3 - \log 2 = 0,176$;
$\log 2,5 = \log 5 - \log 2 = 0,398$;
$\log 300 = 2\log 2 + \log 3 + 2\log 5 = 2,477$.

8. $\log(1,5x^4) = \log 1,5 + 4 \log x$;
$\log\left(\frac{x}{4}\right) = \log x - \log 4$;
$\log(10x) - 5 \log x = \log x + 1 - 5 \log x$
$= 1 - 4 \log x$.

Calculer une exponentielle

9. $10^5 = 100\,000$; $10^{-4} = 0,0001$;
$10^{2,1} \approx 125,89$; $10^{-1,8} \approx 0,02$;
$0,5^3 = 0,125$; $0,5^{-2} = 4$;
$0,5^{1,6} \approx 0,33$; $0,5^{-0,7} \approx 1,62$.

10. $3^{2,5} \approx 15,59$; $2^{-4} = 0,0625$;
$0,6^{3,5} \approx 0,17$; $7^{-0,8} \approx 0,21$; $1,5^{4,3} = 5,72$.

Appliquer les propriétés opératoires d'une exponentielle

11. $10^{-3} \times 10^{5,1} = 10^{2,1}$; $\frac{10^4}{10^{3,1}} = 10^{0,9}$;
$10^{-9} \times 10 = 10^{-8}$; $(10^{-1,4})^2 = 10^{-2,8}$.

12. $10^{x+1} = 10 \times 10^x$; $10^{2-x} = \frac{100}{10^x}$;
$10^{2+0,5} = 10^{0,5} \times (10^x)^2$.

Résoudre une équation ou une inéquation du type $q^x = a$ ou $q^x \leqslant a$

13. $10^n = 100\,000$; $n = 5$.
$10^n = 0,000001$; $n = -6$.
$0,5^n = 0,03125$; $n = 5$.

14. $3^x = 147$; $x = \frac{\log 147}{\log 3}$.
$5 \times 1,2^x = 15$; $1,2^x = 3$; $x = \frac{\log 3}{\log 1,2}$.
$10^x + 28 = 157$; $10^x = 129$; $x = \log 129$.
$0,5^x = 0,1$; $x = \frac{\log 0,1}{\log 0,5}$.
$10^{x+1} = 23$; $x + 1 = \log 13$; $x = \log 23 - 1$.

15. $10^x < 50$ équivaut à $x < \log 50$.
$6,1^x \geqslant 472,3$ équivaut à $x \geqslant \frac{\log 472,3}{\log 6,1}$.

$0{,}5^x \leqslant 0{,}48$ équivaut à $x \geqslant \dfrac{\log 0{,}48}{\log 0{,}5}$.

$10^{-6x} > 10^{-3}$ équivaut à $-6x > -3$, soit $x < 0{,}5$.

16. a) $C_5 = 20\,000 \times 1{,}035^5 \approx 23\,753{,}73$ €.
La valeur acquise au bout de 5 ans est 23 753,73 €.

b) $20\,000 \times 1{,}035^n = 29\,200$;
$1{,}035^n = 1{,}46$; $n = \dfrac{\ln 1{,}46}{\ln 1{,}035} \approx 11$.

La valeur acquise est égale à 29 200 € au bout de 11 ans.

c) $1{,}035^n = 2$; $n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}035} \approx 20{,}16$.

Le capital a doublé à la fin de la 21e année.

17. a) $V_2 = 65\,049{,}60$ €.
La valeur de la machine au bout de 2 ans est 65 049,60 €.

b) $n > 2{,}63$. La valeur de la machine est inférieure à 60 000 € au bout de la troisième année.

c) $n \approx 5{,}4$. La machine a perdu la moitié de sa valeur au bout de la sixième année.

Résoudre une équation ou une inéquation du type log *x* = *a* ou log *x* ⩾ *a*

18. $\log x = 2{,}5$; $x = 10^{2,5}$.
$\log x = -4$; $x = 10^{-4} = 0{,}0001$.
$2\log x = 10$; $\log x = 5$; $x = 10^5 = 100\,000$.
$4\log x - 1 = -11$; $\log x = -2{,}5$; $x = 10^{-2,5}$.

19. $\log x > 2$; $x > 100$.
$\log x \leqslant 8$; $0 < x \leqslant 10^8$.
$2\log x + 3 < 13$; $\log x < 5$; $0 < x < 10^5$.
$4 - \log x \geqslant 12$; $\log x \leqslant -8$; $0 < x \leqslant 10^{-8}$.

Étudier une fonction logarithme décimal

20. a) La fonction logarithme décimal est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) $f_1(x) = \log(4x) = \log 4 + \log x$. La fonction f_1 est croissante car on ajoute une constante à la fonction log.
$f_2(x) = -2\log x$. La fonction f_2 est décroissante car on multiplie la fonction log par une constante négative.
$f_3(x) = 5\log(x^3) = 15\log x$. La fonction f_3 est croissante car on multiplie la fonction log par une constante positive.
$f_4(x) = -\log(x^2) + 5 = -2\log x + 5$. La fonction f_4 est décroissante car on multiplie la fonction log par une constante négative. L'addition d'une constante ne change pas le sens de variation.

Étudier une fonction comportant une exponentielle de base 10

21. a) La fonction exponentielle de base 10 est croissante.

b) $f_1(x) = 0{,}6 \times 10^x$. La fonction f_1 est croissante car on multiplie la fonction exponentielle de base 10 par une constante positive.
$f_2(x) = -10^x$. La fonction f_2 est décroissante car on multiplie la fonction exponentielle de base 10 par une constante négative, -1.
$f_3(x) = 10^x - 5$. La fonction f_3 est croissante car on ajoute une constante à la fonction exponentielle de base 10.
$f_4(x) = -4 \times 10^x + 2{,}7$. La fonction f_4 est décroissante car on multiplie la fonction exponentielle de base 10 par une constante négative. L'addition d'une constante ne change pas le sens de variation.

Problèmes

Problème 1

1. a) $V(45) = 110\,545 \times 0{,}995^{45} \approx 88\,222$ €.

b) $V(63) = 110\,545 \times 0{,}995^{63} \approx 80\,610$ €.

2. Nombre de décès entre 45 et 63 ans : 7 612.

Taux de mortalité : $\dfrac{7\,612}{88\,222} \approx 0{,}086$, soit 9 %.

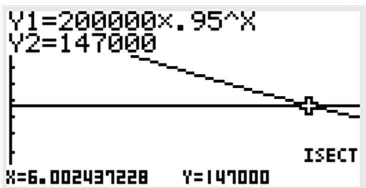
3. L'assureur va accepter le dossier de madame Prévo car ce taux est inférieur à 20 %.

Problème 2

1. a) Montant des charges en 2012 :
$200\,000 \times 0{,}95 = 190\,000$ €.
Montant des charges en 2013 :
$190\,000 \times 0{,}95 = 180\,500$ €.
Montant des charges en 2014 :
$180\,500 \times 0{,}95 = 171\,475$ €.

b) La suite est géométrique car le quotient de deux termes consécutifs est constant. Le premier terme est égal à 200 000 et la raison à 0,95.

2. a) et **b)**



On lit graphiquement $x \approx 6$. Le montant des charges sera de 147 000 € en 2017.

c) $200\,000 \times 0{,}95^x = 147\,000$;
$0{,}95^x = 0{,}735$; $x = \dfrac{\log 0{,}735}{\log 0{,}95} \approx 6$.

Problème 3

1. a) et **b)** Voir fichier « **05_probleme3_corrige.xls** » ou « **05_probleme3_corrige.ods** ».

c) Les charges en personnel semblent augmenter le plus rapidement.

d) $\dfrac{15\,400 - 7\,800}{7\,800} \approx 0{,}97$. L'augmentation des charges de personnel entre l'année 1 et l'année 5 est de 97 %.

e) $\dfrac{5\,500 - 1\,400}{1\,400} \approx 2{,}93$. L'augmentation des charges de sous-traitance entre l'année 1 et l'année 5 est de 293 %.

f) L'impression laissée par le graphique est donc fausse.

2. a) et **b)** Voir à nouveau fichier « **05_probleme3_corrige.xls** » ou « **05_probleme3_corrige.ods** ».

c) Le rapport des charges en personnel d'une année sur l'autre est à peu près constant. Le pourcentage d'augmentation, c'est-à-dire la vitesse d'évolution, est presque le même.

d) Les points ne sont pas alignés. Le pourcentage d'augmentation augmente d'une année sur l'autre. La vitesse d'évolution augmente.

e) Le premier graphique est trompeur. En pourcentage, ce sont les charges de maintenance qui augmentent le plus.

Problème 4

1. a) $\dfrac{I}{I_0} = \dfrac{2 \times 10^{-4}}{10^{-12}} = 2 \times 10^8$.

$L = 10 \times \log (2 \times 10^8) = 10(\log 2 + 8)$
$= 10 \log 2 + 80$.

b) $L \approx 83$ dB.

2. $L' = 10 \times \log (6 \times 10^8) \approx 87{,}8$ dB.
L'augmentation du niveau sonore est de 4,8 dB, c'est-à-dire 10 log 3.

Problème 5

1. $x = 3{,}5 \times 10^{-4}$.
$-\log x \approx 3{,}5$. Le pH de la solution est 3,5.
La solution est acide.
2. pH = 9.
$-\log x = 9$; $\log x = -9$; $x = 10^{-9}$.
La concentration en ions H_3O^+ est
10^{-9} mole par litre.
La solution est basique.

Problème 6

Voir fichiers « **05_probleme6_corrige.xls** » ou « **05_probleme6_corrige.ods** ».

1. b) La forme du nuage de points ne justifie pas un ajustement par une droite.

c) La forme du nuage de points s'allonge.

2. c) On obtient $y = 0{,}14x + 2{,}39$.

d) $\log C_7 = 0{,}14 \times 7 + 2{,}39 = 3{,}37$.

e) $C_7 \approx 29$ (en centaines d'euros). L'estimation demandée est 2 900 €.

Problème 7

Partie A

1. Valeur résiduelle du fourgon en 2012 : 40 160 €.
Valeur résiduelle du fourgon en 2013 : 32 128 €.
Valeur résiduelle du fourgon en 2014 : 25 702,40 €.

2. La suite est géométrique de raison 0,8.

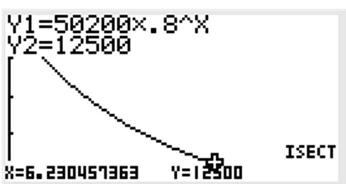
3. $V_n = 50\,200 \times 0{,}8^n$.

Partie B

1. La fonction $x \mapsto 0{,}8^x$ est décroissante sur l'intervalle [0 ; 10] car 0,8 est compris entre 0 et 1. Donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle [0 ; 10] car la multiplication par un nombre positif ne change pas le sens de variation.

2. b) $f(0) = 50\,200$; $f(5) \approx 16\,449{,}53$; $f(10) \approx 5\,390{,}18$.

3. a) et **b)**



c) La solution graphique de l'équation $f(x) = 12\,500$ est 6,23.

Partie C

Le fourgon sera remplacé au cours de la septième année.

Je teste mes connaissances

Page 75

1. B	6. A
2. C	7. C
3. A	8. B
4. C	9. C
5. A	10. A

Je m'entraîne au CCF

Page 76

Exercice 1

1. pH = 5.

2. La fonction logarithme décimal est croissante.
Lorsque la concentration en ions H_3O^+ augmente, le pH diminue.

3. Lorsque la concentration en ions H_3O^+ est divisée par 10, le pH augmente de 1.

$$-\log\left(\frac{x}{10}\right) = -\log x - (-\log 10) = -\log x + 1.$$

4. $7{,}2 = -\log x$; $\log x = -7{,}2$;
$x = 10^{-7{,}2} \approx 6{,}3 \times 10^{-8}$.
La concentration en ions H_3O^+ d'une solution dont le pH est 7,2 est $6{,}3 \times 10^{-8}$ mole par litre.

Exercice 2

1. Nombre de souris encore malades à la fin de la 3e semaine : $1\,000 \times 0{,}5^3 = 125$.

2. a) La fonction $x \mapsto 0{,}5^x$ est décroissante car 0,5 est compris entre 0 et 1.

b) f est le produit de la fonction $x \mapsto 0{,}5^x$ par la constante positive 1 000. La fonction f est donc aussi croissante.

c) $f(x) = 400$; $1\,000 \times 0{,}5^x = 400$;
$0{,}5^x = 0{,}4$; $x = \dfrac{\log 0{,}4}{\log 0{,}5} \approx 1{,}32$.

3. a) $1\,000 \times 0{,}5^{1/7} \approx 906$.
Il y a 906 souris encore malades ; il y a donc 94 souris guéries dès le premier jour.

b) $\dfrac{2}{5}$ des souris sont encore malades, soit 400. Le nombre de jours cherché est donc la solution de l'équation $f(x) = 400$.
1,32 semaine ≈ 9 jours.
Il faut donc environ 9 jours pour que les $\dfrac{3}{5}$ des souris soient guéries.

Primitives

6

Activités

Page 77

– Pour convertir 100 km/h en m/s :

$\frac{100}{3,6} \approx 27,8$. 100 km/h = 27,8 m/s.

$V(14) = a \times 14 = 27,8$. D'où $a = 1,986$.

– Il s'agit de $d_3(t) = 0,99t^2 + k$.

– La fonction d a pour expression $d(t) = 0,99t^2$.

$d(14) = 194,04$.

Pages 78 et 79

Est-ce que je sais ?

a) La dérivée de la fonction carré est $2x$.

b) La dérivée de la fonction cube est $3x^2$.

c) La dérivée de la fonction $x \mapsto x^5$ est $5x^4$, et la dérivée de la fonction $x \mapsto x^6$ est $6x^5$.

d) La formule générale de la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ est nx^{n-1} avec $x \neq 0$.

e) Pour $x \mapsto x^0$, on doit avoir pour dérivée la fonction nulle, et pour $x \mapsto x^{-1}$ on doit avoir pour dérivée la fonction inverse.

f) C'est bien le cas.

Activité 1

1. a) Les courbes sont décalées le long de l'axe (Oy).

b) $F'_1(x) = 2x + 3$; $F'_2(x) = 2x + 3$; $F'_3(x) = 2x + 3$.

c) On constate que $F'_1(x) = F'_2(x) = F'_3(x)$.

d) $F_4(x) = x^2 + 3x - \sqrt{2}$; $F_5(x) = x^2 + 3x + 0,4$.

2. a) $G'(x) = F'_1(x)$.

b) La fonction $G = F_1 + k$ est aussi une primitive de la fonction f.

Activité 2

a) $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^3$.

b) $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ et $G_1(x) = \frac{x^3}{3}$.

c) $H(x) = \frac{1}{x}$.

d) $H_1(x) = -\frac{1}{x}$.

e) $J_1(x) = \frac{x^4}{4}$.

Activité 3

a) $f(x) = 3x^2$ et $g(x) = 2x$.

b) $F(x) + G(x) = x^3 + x^2$.

$(F(x) + G(x))' = 3x^2 + 2x = f(x) + g(x)$.

c) $2F(x) = 2x^3$ et $3G(x) = 3x^2$.

$(2F(x))' = 2 \times 3x^2 = 6x^2 = 2f(x)$;

$(3G(x))' = 3 \times 2x = 6x = 3g(x)$.

d) $2F(x) + 3G(x) = 2x^3 + 3x^2$.

$(2F(x) + 3G(x))' = 6x^2 + 6x = 2f(x) + 3g(x)$.

J'utilise un logiciel

Pages 83 et 84

Coût marginal

1. a) et **b)** Voir fichier « **06_page83.xls** ».

q ième objet	coût marginal $C_m(q)$	coût total de fabrication $F(q)$	coût total estimé $C(q)$	erreur commise %
1	43	43	41,5	3,49
2	46	89	86	3,37
3	49	138	133,5	3,26
4	52	190	184	3,16
5	55	245	237,5	3,06
6	58	303	294	2,97
7	61	364	353,5	2,88
8	64	428	416	2,80
9	67	495	481,5	2,73
10	70	565	550	2,65

• Il faut entrer dans la cellule B2 la formule =3*A2+40.

b) • Il faut entrer dans la cellule C2 =Somme($B$2:B2).

• Le coût de fabrication pour 10 objets supplémentaires est de 565 €.

2. $F(q) = 3 \times 1 + 40 + 3 \times 2 + 40 + \ldots + 3 \times q + 40$;

$F(q) = 3 \times (1 + 2 + \ldots + q) + 40q$

$= 3 \times \frac{q}{2}(1 + q) + 40q$;

$F(q) = \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}q^2 + 40q = \frac{3}{2}q^2 + 41{,}5q.$

Le coût total de fabrication des q premiers objets supplémentaires est bien égal à : $F(q) = \frac{3}{2}q^2 + 41{,}5q.$

3. a) $C(q) = \frac{3}{2}q^2 + 40q.$

Il faut entrer dans la cellule D2 la formule =3/2*A2^2+40*A2.

b) Voir à nouveau le fichier « **06_page83.xls** ».

c) Plus q augmente et plus l'erreur commise diminue.

d) L'erreur commise est due à la différence entre $F(q)$ et $C(q)$ de $1{,}5q$.

Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Voir le fichier « **06_page84.xlsx** ».

Partie A

1. a)

n	$p(n)$			
1	349			
2	632	N =	21420	
3	855			
4	1024	N1=	12636	
5	1145			
6	1224			
7	1267			
8	1280			
9	1269			
10	1240			
11	1199			
12	1152			
13	1105			
14	1064			
15	1035			
16	1024			
17	1037			
18	1080			
19	1159			
20	1280			

• Il faut entrer dans la cellule B2 la formule =A2^336*A2*A2+384*A2.

b) $N = 21\ 420$.

c) $\dfrac{21\ 420}{20} = 1\ 071$.

Le nombre moyen de jeux informatiques vendus par mois est 1 071 jeux.

2. a) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 12x^3 + 192x^2$.

b) $F(0) = 0$ et $F(20) = 20\ 800$.

c) $\mu = \dfrac{20\ 800}{20} = 1\ 040$.

La valeur moyenne de f sur l'intervalle [0 ; 20] est 1 040.

d) La valeur moyenne de f et le nombre moyen de ventes sont légèrement différents mais relativement proches tout de même.

Partie B

a) $N = 12\ 636$.
Le nombre total de ventes durant la première année est 12 636.

b) $\dfrac{12\ 636}{12} = 1\ 053$.

Le nombre moyen de jeux vendus par mois la première année est 1 053 jeux.

c) $\dfrac{F(24) - F(12)}{12} = 1\ 296$.

d) Le nombre moyen de jeux vendus par mois la seconde année est 1 296 jeux.

e) Il y a une augmentation du nombre moyen mensuel de ventes.

Exercices et problèmes

Pages 85 à 87

Exercices

Primitives d'une fonction

1. a) $F(x) = 1{,}5x^2 - 5x + k$.

b) $G(x) = -0{,}5x^2 + 2x + k$.

2. a) $F(x) = -\dfrac{1}{7}x^2 - 15x + k$.

b) $G(x) = x - 5{,}5x^2 + k$.

3. a) $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + 6x + k$.

b) $G(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + 2x^2 - \dfrac{1}{5}x + k$.

4. a) $F(x) = \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{7}{2}x^2 + 5x + k$.

b) $G(x) = -\dfrac{1}{12}x^3 + 3x^2 - \dfrac{1}{7}x + k$.

5. a) $F(x) = -\dfrac{0{,}01}{3}x^3 + 3x + k$.

b) $G(x) = -\dfrac{\sqrt{11}}{3}x^3 - 2x + k$.

6. a) $F(x) = -\dfrac{3}{x} + k\ (x \neq 0)$.

b) $G(x) = \dfrac{2}{x} + k\ (x \neq 0)$.

7. a) $F(x) = 3 \ln x + k\ (x > 0)$.

b) $G(x) = -2 \ln x + k\ (x > 0)$.

8. a) $F(x) = -6 \ln x + k\ (x > 0)$.

b) $G(x) = -\dfrac{4}{x} + k\ (x \neq 0)$.

9. a) $F(x) = -2x^2 + \ln x + k\ (x > 0)$.

b) $G(x) = -3x^3 - 2 \ln x + k\ (x > 0)$.

10. a) $F(x) = 4 \ln x + 0{,}5x^4 + k\ (x > 0)$.

b) $G(x) = -\dfrac{1}{x} - 3 \ln x + k\ (x > 0)$.

11.a) $F(x) = -0{,}5x^6 + 0{,}75x^4 - 2x^2 + k$.

b) $G(x) = x^5 - \dfrac{7}{3}x^3 - 2x + k$.

Primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné

12. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 + x + \dfrac{1}{6}$.

13. $F(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - 2{,}5x^2 + 7x + \dfrac{46}{9}$.

14. $F(x) = x + 3 \ln x + 2\ (x > 0)$.

15. $F(x) = -2 \ln x + \dfrac{x^2}{2} + x + 2 + 2\ln 7\ (x > 0)$.

16. $F(x) = -4\ln x - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}$.

17. $F(x) = -\frac{2}{3}x^6 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 63$.

18. a) $F(2) - F(0) = 6$.

b) $F(3) - F(1) = 20$.

19. a) $F(2) - F(1) = -3$.

b) $F(2) - F(2) = 8$.

20. a) $F(1) - F(0) = \frac{1}{18}$.

b) $F(0{,}85) - F(0{,}85) \approx 3{,}969\ 6$.

21. $F(2) - F(1) = 2$.

22. $F(3) - F(1) = 4\ln 3$.

23. $F(3) - F(1) = \frac{4}{3}$.

Problèmes

Problème 1

1. $Q(t) = 0{,}005t^2 + 4{,}5t$.

2. Les réserves seront épuisées lorsque $Q(t) = 100$. Il faut donc résoudre l'équation $0{,}005t^2 + 4{,}5t - 100 = 0$.
Cette équation n'a qu'une solution positive : 21,7.
Il faudra donc 21 ou 22 ans pour épuiser les réserves de gaz naturel.

Problème 2

a) $F(q) = -0{,}006q^2 + 16q + k$.

b) $F(q) = -0{,}006q^2 + 16q + 4{,}006$.

c) $F(60) = 942{,}406$.
Le coût total de production de 60 survêtements est de 942,41 €.

Problème 3

a) $F(q) = -0{,}008q^2 + 24q + 4{,}008$.

b) $F(100) = 2\ 324{,}008$.
Le coût total de production de 100 pièces est de 2 324 €.

Problème 4

a) $F(q) = -\frac{0{,}2}{3}q^3 + 3q^2 + 10q + 40\ 000$.

b) $F(11) - F(8) = 40\ 384{,}27 - 40\ 237{,}87 = 146{,}40$.
Le coût de production de trois centaines d'objets supplémentaires, lorsque la production est de 800 objets, est de 146,40 milliers d'euros.

Problème 5

a) $C_k(q) = 0{,}3q^2 + k$.

b) La constante k représente le coût fixe de la production. Elle ne doit pas dépendre de q.

c) Lorsque $C_k(100) = 6\ 000$, la constante k prend la valeur 3 000. On en déduit que le coût fixe de cette production vaut 3 000 €.

Problème 6

1. a) $S(t) = 0{,}0025t^4 - 0{,}17t^3 - t^2 + 680t$.

b) $S(0) = 0$ et $S(15) = 9\ 527{,}8125$.

c) $S_{m1} = \frac{1}{15} \times 9\ 527{,}8125 = 635{,}1875$.

Soit une valeur moyenne $S_{m1} = 635$.

2. a) $S(16) = 10\ 091{,}520$ et $S(30) = 16\ 935$.

b) $S_{m2} = \frac{1}{15} \times 6\ 843{,}48 = 456{,}232$.

Soit une valeur moyenne $S_{m2} = 456$.

3. $S_m = \frac{1}{30} \times 16\ 935 = 564{,}5$.

Soit un niveau moyen du stock au cours des trente jours d'observation $S_m = 565$.

4. La valeur S_m est la moyenne entre les valeurs S_{m1} et S_{m2}. La légère différence provient du fait que l'on ne tient pas compte de l'intervalle [15 ; 16].

5. a) $200 \times 30 \times S_m = 200 \times 30 \times 565 = 3\ 390\ 000$. Le coût total de gestion de ce stock au cours des trente jours d'observation s'élève à 3,39 milliers d'euros.

b) Voir le fichier « **06_probleme6.xlsx** ».

t	s(t)	coût journalier
1	677,5	135500
2	674,04	134808
3	669,68	133936
4	664,48	132896
5	658,5	131700
6	651,8	130360
7	644,44	128888
8	636,48	127296
9	627,98	125596
10	619	123800
11	609,6	121920
12	599,84	119968
13	589,78	117956
14	579,48	115896
15	569	113800
16	558,4	111680
17	547,74	109548
18	537,08	107416
19	526,48	105296
20	516	103200
21	505,7	101140
22	495,64	99128
23	485,88	97176
24	476,48	95296
25	467,5	93500
26	459	91800
27	451,04	90208
28	443,68	88736
29	436,98	87396
30	431	86200
		3362040

Il faut entrer dans la cellule B2 la formule : =0,01*A2^3-0,51*A2^2-2*A2+680.
Il faut entrer dans la cellule C2 la formule : =B2*200.

c) Le coût total de gestion de ce stock durant cette période s'élève à 3,362 milliers d'euros.

d) Les valeurs sont très proches. La différence provient d'un mode de calcul avec des valeurs discrètes et avec un mode de calcul avec une fonction continue.

Problème 7

a) $C(t) = 1\,000t + k$.

b) $C(0) = k$ et $C(1) = 1\,000 + k$.

c) $C(1) - C(0) = 1\,000$.
La formation du capital généré est de 1 000 €.

d) La 2^e année, le capital généré est :
$C(2) - C(1) = 1\,000$.
La 3^e année, le capital généré est :
$C(3) - C(2) = 1\,000$.
La formation du capital généré la 2^e année est de 1 000 euros et de même la 3^e année.

e. On constate que la formation du capital est constante lorsque l'investissement net est constant.

Problème 8

a) $C(t) = 1{,}5t^2 + k$.

b) $C(1) = 1{,}5 + k$ et $C(2) = 6 + k$.

c) $C(2) - C(1) = 4{,}5$.
La formation du capital généré la 2^e année est de 4,5 milliers d'euros.

d) La 3^e année, le capital généré est :
$C(3) - C(2) = 7{,}5$.
La 4^e année, le capital généré est :
$C(4) - C(3) = 10{,}5$.
La formation du capital généré la 3^e année est de 7,5 milliers d'euros, et, la 4^e année, de 10,5 milliers d'euros.

Je teste mes connaissances

Page 88

1. B	6. B
2. B	7. A
3. A	8. B
4. C	9. C
5. C	10. C

Fonction logarithme népérien

7

Activités

Page 89

$f(0{,}25) = -8\,310 \times \ln 0{,}25 \approx 11\,520$.

Le mammouth fossilisé est vieux d'environ 11 520 ans.

Pages 90 et 91

Est-ce que je sais ?

1. a) $f'(x) = 6x - 6$.

b) $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
Donc f est décroissante sur cet intervalle.
$f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$. Donc f est croissante sur cet intervalle.

x	-1		1		3
$f(x)$	9	↘	-3	↗	9

2. La fonction g a le même sens de variation que f car f est multipliée par la constante positive 2.

x	-1		1		3
$g(x)$	18	↘	-6	↗	18

La fonction h varie en sens contraire de f car f est multipliée par la constante négative $-0{,}4$.

x	-1		1		3
$h(x)$	$-3{,}6$	↗	$1{,}2$	↘	$-3{,}6$

Activité 1

1. a) $f'_1(x) = x$; $f'_2(x) = x^2$; $f'_3(x) = x^3$; $f'_4(x) = 2x - 1$.

b) f'_2 est égale à la fonction carré.

c) f'_3 est égale à la fonction cube.

d) Aucune des dérivées obtenues n'est égale à la fonction inverse.

$\ln 1 = 0$; $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.

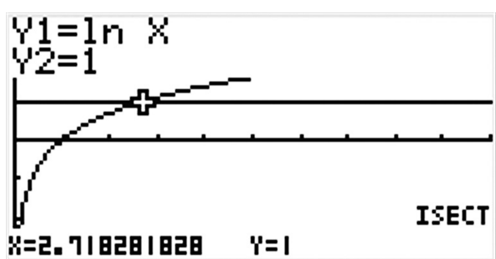
2. $\ln 0{,}2 \approx -1{,}61$; $\ln 0{,}8 \approx -0{,}22$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}18$; $\ln 2 \approx 0{,}69$.

3. a) $\dfrac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$.

b) La fonction ln est donc croissante sur $]0 ; +\infty[$.

c) La courbe représentative obtenue est bien celle d'une fonction croissante.

d) Une valeur arrondie au centième du point d'ordonnée 1 est 2,72.



Activité 2

b) L'ordonnée de M n'est pas toujours de même signe. Elle est positive lorsque $x > 1$. Elle est négative lorsque $x < 1$.

c)

x	0		1		6
Signe de ln x		$-$	0	$+$	

Activité 3

a) $\ln x + \ln 7 = \ln (7x)$;

$\ln 0{,}5 - \ln x = \ln\left(\dfrac{0{,}5}{x}\right)$;

$\ln (5x) = \ln 5 + \ln x$.

b) $\ln (x^2) = 2 \ln x$ pour $x > 0$.

c) $AC = 2AB$. La réponse faite au b. est donc confirmée.

Exercices et problèmes

Pages 95 à 97

Exercices

Calculer un logarithme népérien

1. $\ln 18 \approx 2{,}89$; $\ln 2{,}5 \approx 0{,}92$;
$\ln 0{,}2 \approx -1{,}61$; $\ln 0{,}58 \approx -0{,}55$;
$\ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 0{,}51$; $\ln\left(\dfrac{4}{7}\right) \approx -0{,}56$.

2. $\ln 7 \approx 1{,}95$; $\ln 3{,}2 \approx 1{,}16$;
$\ln\left(\dfrac{1}{5}\right) \approx -1{,}61$; $\ln 0{,}187 \approx -1{,}68$;
$\ln\left(\dfrac{17}{3}\right) \approx 1{,}73$.

3. Les calculs impossibles sont : $\ln (-4)$ et $\log (-3^2)$.

4. Nombres positifs : $\ln (21^3)$; $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$; $\ln (-3)^2$; $(\ln 0{,}8)^2$.

Nombres négatifs : $\ln 0{,}01$; $\ln\left(\dfrac{1}{7}\right)$.

Appliquer les propriétés opératoires

5. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$.

6. $\ln (3a) = \ln 3 + \ln a$; $\ln\left(\dfrac{5}{a}\right) = \ln 5 - \ln a$;

$\ln (a^7) = 7 \ln a$;
$\ln (6a^2) = \ln 6 + 2 \ln a$;
$5 \ln (a^2) + 3 \ln (2a) = 10 \ln a + 3 \ln 2 + 3 \ln a = 13 \ln a + 3 \ln 2$.

7. $\ln 27 = 3 \ln 3$; $4 \ln 3 - \ln 9 + 2 \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = 4 \ln 3 - 2 \ln 3 - 2 \ln 3 = 0$;

$\ln\left(\dfrac{e}{3}\right) = 1 - \ln 3$;

$5 \ln 9 + \ln (e^3) = 10 \ln 3 + 3$.

Rechercher l'exposant d'une puissance à l'aide d'un logarithme

8. $4^n = 16\,384$; $n = \dfrac{\ln 16\,384}{\ln 4}$; $n = 7$.

$7^n = 5\,764\,801$; $n = \dfrac{\ln 5\,764\,801}{\ln 7}$; $n = 8$.

$10 \times 1{,}5^n = 75{,}9375$; $1{,}5^n = 7{,}59375$;
$n = \dfrac{\ln 7{,}59375}{\ln 1{,}5}$; $n = 5$.

9. $5^n < 100$; $n < 2{,}86$ et n entier ; $n = 2$.
$2{,}8^n \geq 42{,}3$; $n \geq 3{,}03$ et n entier ; $n = 4$.
$0{,}4^n \leq 0{,}17$; $n \geq 1{,}93$ et n entier ; $n = 2$.
$10^{-3n} > 10^{-5}$; $n < \dfrac{5}{3}$ et n entier ; $n = 1$.

10. a) $40\,000 \times 0{,}94 = 37\,600$.
La quantité de rejets prévus en 2012 est 37 600 tonnes.

b) $r_{n+1} = 0{,}94 r_n$.
La suite (r_n) est une suite géométrique.
$r_n = 40\,000 \times 0{,}94^n$.

c) $40\,000 \times 0{,}94^n < 30\,000$; $0{,}94^n < 0{,}75$;
$n < \dfrac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}94}$; $n > 4{,}649$.

La quantité de rejets sera inférieure à 30 000 tonnes au bout de 5 ans, soit à partir de 2016.

11. Soit t le temps exprimé en heures.
a) $10\,000 \times 0{,}95^t \leq 2\,000$; $0{,}95^t \leq 0{,}2$;
$t \geq \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}95}$; $t \geq 31{,}38$, soit 31 h 23 min.

La population devient inférieure au cinquième de la population initiale au bout de 31 h 23 min.

b) $10\,000 \times 1{,}05^t = 20\,000$; $1{,}05^t = 2$;

$t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05}$; $t \approx 14{,}21$, soit 14 h 13 min.

La population double au bout de 14 h 13 min.

Dériver une fonction comportant un logarithme népérien

12. a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$; $f'(x) < 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.

Donc f est décroissante sur cet intervalle.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$. Donc f est croissante sur cet intervalle.

c) $f'(x) = \dfrac{2}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.

Donc f est croissante sur cet intervalle.

d) $f'(x) = \dfrac{4}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.

Donc f est croissante sur cet intervalle.

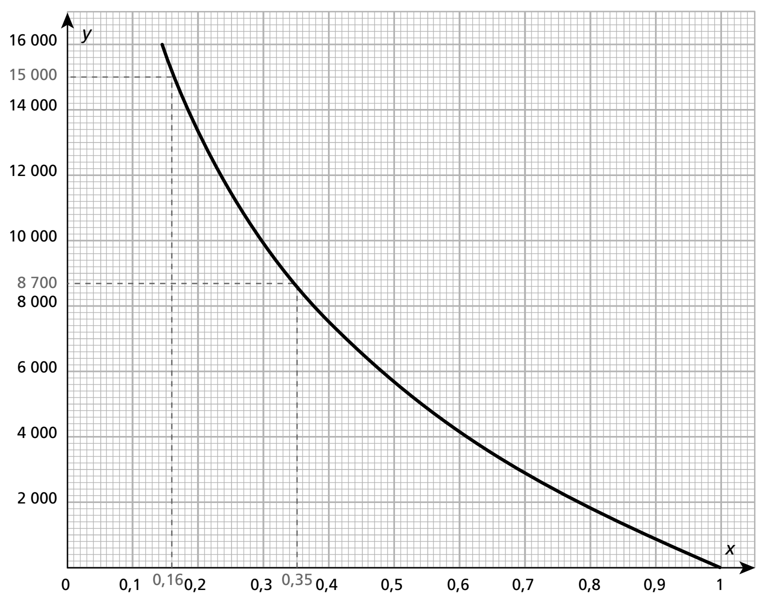
Problèmes

Problème 1

1. a) $f'(x) = -\dfrac{8\,310}{x}$ sur l'intervalle $[0{,}2 ; 1]$.

b) $f'(x) < 0$. Donc f est décroissante sur $[0{,}2 ; 1]$.

c)



2. a) $f(0{,}35) = 8\,700$. L'âge du fossile est 8 700 ans.

b) Voir le graphique ci-dessus.

c) Voir le graphique ci-dessus. La fraction de carbone 14 restant est environ 16 %.

Problème 2

1. a) $Q_1 = 2{,}4 \times 0{,}8 = 1{,}92$ mg ;

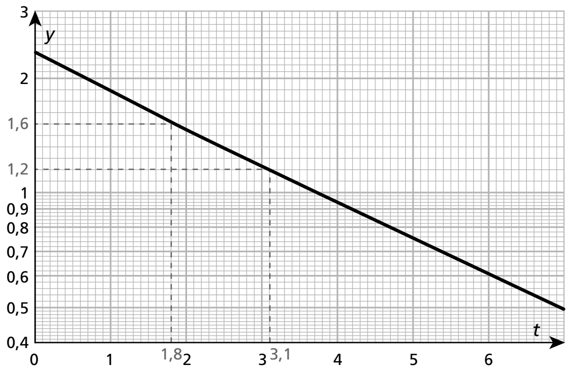
$Q_2 = 1{,}92 \times 0{,}8 = 1{,}536$ mg.

b) $Q_{n+1} = 0{,}8Q_n$.

c) (Q_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $Q_0 = 2{,}4$.

d) $Q_n = 2{,}4 \times 0{,}8^n$.

2.



a) $Q_1 \approx 1{,}9$ mg ; $Q_2 \approx 1{,}5$ mg. Les résultats de la question 1. a. sont donc vérifiés graphiquement.

b) La quantité de médicament présente dans le sang au bout de 7 heures est 0,5 mg.

c) La quantité de médicament présente dans le sang est de 1,6 mg au bout de 1,8 h, soit 1 h 48 min.

d) La quantité de médicament présente dans le sang est divisée par 2 au bout de 3,1 h, soit 3 h 6 min.

Problème 3

Voir fichier « **07_planete_corrige.xls** » ou « **07_planete_corrige.ods** ».

1. b) La forme du nuage ne justifie pas un ajustement par une droite.

2. a)

i	$d_i - d_0$	ln $(d_i - d_0)$
0	0	
1	50	3,912
2	92	4,522
3	170	5,136
5	721	6,581
6	1 370	4 110
7	2 814	7,942

b) Voir à nouveau fichier « **07_planete_corrige.xls** » ou « **07_planete_corrige.ods** ».

c) ln $(d_4 - d_0) = 0{,}676 \times 4 + 3{,}181 \approx 5{,}885$;
ln $(d_8 - d_0) = 0{,}676 \times 8 + 3{,}181 \approx 8{,}589$.

3. a) La distance moyenne au Soleil de la planète numérotée 4 est :
$d_4 = 24{,}071 \times 1{,}966^4 + 58 \approx 417$ millions de km.

b) La distance moyenne au Soleil de la planète numérotée 8 est :

$d_8 = 24{,}071 \times 1{,}966^8 + 58 \approx 5\,430$ millions de km.

4. a) $\dfrac{417 - 414}{414} \approx 0{,}007$; soit 0,7 % d'écart.

b) $\dfrac{5\,430 - 4\,500}{4\,500} \approx 0{,}206$; soit 21 % d'écart.

Je teste mes connaissances

Page 98

1. B
2. A
3. B
4. B
5. C
6. A
7. A
8. C
9. A
10. B

Fonctions exponentielles (8)

Activités

Page 99

$f(2) = 2 \times e^{-0,15 \times 2} \approx 1,5$.

Le taux d'alcool du conducteur, deux heures après la prise de sang, est 1,5 g/L. Il ne peut donc pas reprendre le volant.

Pages 100 et 101

Est-ce que je sais ?

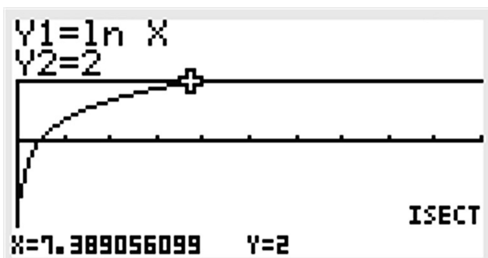
1. $\ln 3 \approx 1,10$; $\ln 1 = 0$; $\ln 0,5 \approx -0,69$; $\ln 1,5 \approx 0,41$; $\ln e = 1$.

On ne peut pas calculer ln (– 2) et ln (– 1).

2. $f'_1(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'_2(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'_3(x) = \dfrac{3}{x}$; $f'_4(x) = \dfrac{1}{x}$.

Activité 1

1. c) $x \approx 7,39$.



2. a)

b	– 3	– 2	– 1	0	0,5	1	2	3
Valeur approchée au centième de e^b	0,05	0,14	0,36	1	1,65	2,72	7,39	20,09

b) $e^3 \approx 20,09$.

On trouve par la même méthode $e^{-3} \approx 0,05$; $e^{-2} \approx 0,14$; $e^{-1} \approx 0,36$; $e^0 = 1$; $e^1 \approx 2,72$; $e^2 \approx 7,39$.

3. a) La fonction f est croissante.

b) e^x est positif quel que soit x.

c) e^x étant positif, la fonction dérivée f' est positive. Donc la fonction f est croissante.

Activité 2

1. a) Il y a 14 657 bactéries après 20 minutes.

b) Le nombre de bactéries après 40 minutes est 17 902, et après 60 minutes 21 865.

Le nombre de bactéries augmente.

c) Pourcentage d'augmentation du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 20$:

$\dfrac{14\,657 - 12\,000}{12\,000} \approx 0{,}221$, soit 22,1 %.

Pourcentage d'augmentation du nombre de bactéries entre $t = 20$ et $t = 40$:

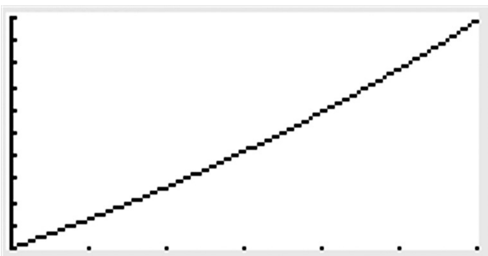
$\dfrac{17\,902 - 14\,657}{14\,657} \approx 0{,}221$, soit 22,1 %.

Pourcentage d'augmentation du nombre de bactéries entre $t = 40$ et $t = 60$:

$\dfrac{21\,865 - 17\,902}{17\,902} \approx 0{,}221$, soit 22,1 %.

Le pourcentage d'augmentation est le même.

d)



e) La fonction f est croissante.

2. a) Il y a 2 678 bactéries après 5 minutes. Le nombre de bactéries après 10 minutes est 597, et après 15 minutes 133.
Le nombre de bactéries diminue.

b) Pourcentage de diminution du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 5$:

$\dfrac{12\,000 - 2\,678}{12\,000} \approx 0{,}777$, soit 77,7 %.

Pourcentage de diminution du nombre de bactéries entre $t = 5$ et $t = 10$:

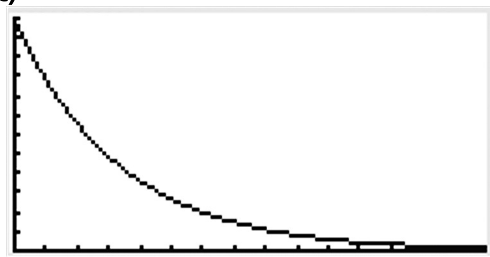
$\dfrac{2\,678 - 597}{2\,678} \approx 0{,}777$, soit 77,7 %.

Pourcentage de diminution du nombre de bactéries entre $t = 10$ et $t = 15$:

$\dfrac{597 - 133}{597} \approx 0{,}777$, soit 77,7 %.

Le pourcentage de diminution est le même.

c)



d) La fonction g est décroissante.

Activité 3

a) $e^6 \times e^2 = ?$ ☑ e^{6+2} ☐ $e^{6\times 2}$

b) $\dfrac{e^6}{e^2} = ?$ ☐ $e^{6\div 2}$ ☑ e^{6-2}

c) $(e^6)^2 = ?$ ☐ $e^{(6^2)}$ ☑ $e^{6\times 2}$

J'utilise un logiciel

Pages 105 et 106

Donner l'équation réduite d'une tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle de base e

1. b) $f'(x) = e^x$.
$f'(3) = e^3$.
$y = e^3(x - 3) + e^3$; $y = e^3x - 2e^3$;
$y = 20,\ 09x - 40{,}17$.
C'est la même équation que celle donnée par le logiciel.

2. a) La tangente T au point d'abscisse 1 passe par l'origine.
Équation de T :
$y = e(x - 1) + e$; $y = ex - e + e$; $y = ex$.
C'est l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

b) Équation proposée par le logiciel :
$y = 7,\ 39x - 7{,}39$.
Les coefficients a et b sont opposés.
$y = e^2(x - 2) + e^2$; $y = e^2x - e^2$.

c) Le coefficient directeur de T et l'ordonnée de M sont égaux.

La remarque est toujours vraie quand on déplace le point M.
Si on note x_M l'abscisse de M, l'ordonnée de M est e^{x_M}.
Coefficient directeur de T en $M = f'(x_M) = e^{x_M}$.

Ajuster un nuage de points

Voir fichier « **08_ajustement_corrige.xls** » ou « **08_ajustement_corrige.ods** ».

1. b) Un ajustement affine ne semble pas justifié pour ces nuages.

2. c) $y = -0{,}3983x + 2{,}1731$.

d) $\ln d = -0{,}3983x + 2{,}1731$;
$d = e^{-0{,}3983x} \times e^{2{,}1731}$; $d = 8{,}79e^{-0{,}40x}$ (coefficients arrondis au centième).

f) $d = \left(8{,}79 \times e^{-0{,}4\times5}\right) \times 1\,000 \approx 1\,190$.

3. c) $y = 3{,}0202x + 0{,}8672$.

d) $e^r = 3{,}0202x + 0{,}8672$;
$r = \ln(3{,}02x + 0{,}87)$ (coefficients arrondis au centième).

e) $r = \ln(3{,}02 \times 5 + 0{,}87) \times 1\,000 \approx 2\,771$.

4. Le prix d'équilibre est environ 3,30 €.

Exercices et problèmes

Pages 107 à 109

Exercices

Calculer une exponentielle

1. $e^5 \approx 148{,}41$; $e^{-1} \approx 0{,}37$; $e^{0{,}1} \approx 1{,}11$; $e^{-0{,}02} \approx 0{,}98$; $e^0 = 1$; $e^1 \approx 2{,}72$; $e^{4{,}5} \approx 90{,}02$.

2. $f(-2) \approx 2{,}44$; $f(-1) \approx 2{,}21$; $f(0) = 2$; $f(1) \approx 1{,}81$; $f(2) \approx 1{,}64$.

Appliquer les propriétés opératoires

3. $e^3 \times e^{2{,}5} = e^{5{,}5}$; $\dfrac{e^{1{,}3}}{e^{-2}} = e^{3{,}3}$;
$e^{-4} \times e = e^{-3}$; $\left(e^{-5}\right)^2 = e^{-10}$.

4. $e^{x-4} = e^{-4} \times e^x$; $e^{3-x} = \dfrac{e^3}{e^x}$;
$e^{2x-1} = e^{-1} \times \left(e^x\right)^2$.

Résoudre des équations et des inéquations

5. $\ln x = 2{,}5$; $x = e^{2{,}5}$.
$\ln x = -4$; $x = e^{-4}$.
$2\ln x = 10$; $\ln x = 5$; $x = e^5$.
$4\ln x - 1 = -11$; $\ln x = -2{,}5$; $x = e^{-2{,}5}$.

6. $e^x = 12$; $x = \ln 12$.
$e^x = 0{,}5$; $x = \ln 0{,}5$.
$e^x = 1$; $x = 0$.
$e^x = 0$; cette équation n'a pas de solution.
$e^x = -3$; cette équation n'a pas de solution.

7. $e^{2x} = 3{,}2$; $2x = \ln 3{,}2$; $x = 0{,}5\ln 3{,}2$.
$e^{-5x} = 14$; $-5x = \ln 14$; $x = -0{,}2\ln 14$.
$4e^{0{,}1x} = 12$; $e^{0{,}1x} = 3$; $0{,}1x = \ln 3$; $x = 10\ln 3$.
$-5e^{-0{,}8x} = 10$; $e^{-0{,}8x} = -2$; cette équation n'a pas de solution.

8. $\ln x > 2$; $x > e^2$.
$\ln x \leqslant 8$; $x \leqslant e^8$.
$2\ln x + 3 < 13$; $\ln x < 5$; $x < e^5$.
$4 - \ln x \geqslant 12$; $\ln x \leqslant -8$; $x \leqslant e^{-8}$.

9. $e^x < 1{,}5$; $x < \ln 1{,}5$.
$e^{2x} \geqslant 1$; $2x \geqslant \ln 1$; $x \geqslant 0$.
$e^{-0{,}2x} < 0$; cette inéquation n'a pas de solution.
$e^{0{,}5x} - 1 > 2$; $e^{0{,}5x} > 3$; $0{,}5x > \ln 3$; $x > 2\ln 3$.
$3e^{4x} \geqslant 6$; $e^{4x} > 2$; $4x > \ln 2$; $x > 0{,}25\ln 2$.

Étudier une fonction comportant une exponentielle

10. a) La fonction exponentielle de base e, notée f, est croissante.
b) f_1 est croissante car on multiplie f par une constante positive.
f_2 est décroissante car on multiplie f par une constante négative.
f_3 est croissante car on ajoute une constante à f.

f_4 est décroissante car on multiplie f par une constante négative.

11. a) $f'(x) = 3{,}5\ e^{3{,}5x}$; f est croissante.

b) $f'(x) = -\,0{,}2\ e^{-0{,}2x}$; f est décroissante.

c) $f'(x) = -\,20\ e^{5x}$; f est décroissante.

d) $f'(x) = 3\ e^{-10x}$; f est croissante.

12. $f(x) = e^{0{,}3x-2}$.

a) $f(x) = e^{-2}e^{0{,}3x}$. On a donc $k = e^{-2}$.

b) $f'(x) = 0,\ 3e^{-2}e^{0{,}3x}$.

c) $f'(x) > 0$ car c'est le produit de trois nombres positifs.

d) La fonction f est donc croissante.

Problèmes

Problème 1

1. a) $f(3) \approx 70{,}287$. Le nombre d'objets offerts sur le marché pour un prix unitaire de 3 € est 70 287.
$f(5) \approx 257{,}903$. Le nombre d'objets offerts sur le marché pour un prix unitaire de 5 € est 257 903.

b) $g(3) \approx 209{,}963$. Le nombre d'objets demandés par les consommateurs pour un prix unitaire de 3 € est 209 963.
$g(5) \approx 104{,}264$. Le nombre d'objets demandés par les consommateurs pour un prix unitaire de 5 € est 104 264.

c) $f'(x) = 6{,}5\ e^{0{,}65x}$. Cette dérivée est positive quel que soit x. La fonction f est croissante.
$g'(x) = -\ 210\ e^{-0{,}35x}$. Cette dérivée est négative quel que soit x. La fonction g est décroissante.

d) L'offre augmente avec le prix ; la demande diminue quand le prix augmente.

e) $10\ e^{0{,}65x} = 500$; $e^{0{,}65x} = 50$;

$0,\ 65x = \ln 50$; $x = \dfrac{\ln 50}{0{,}65} \approx 6{,}02$.

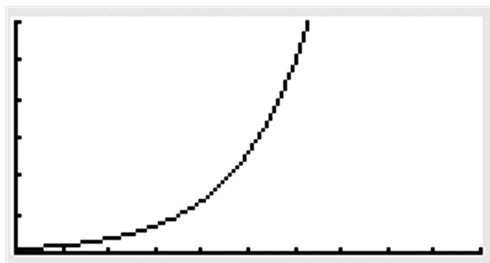
Quand le prix unitaire est de 6,02 €, l'offre est de 500 000 objets.

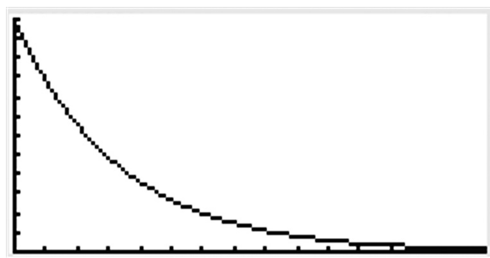
$600\ e^{-0{,}35x} \leqslant 300$; $e^{-0{,}35x} \leqslant 0{,}5$;

$-\,0{,}35x \leqslant \ln 0{,}5$; $x \geqslant \dfrac{\ln 0{,}5}{-\,0{,}35}$; $x \geqslant 2$.

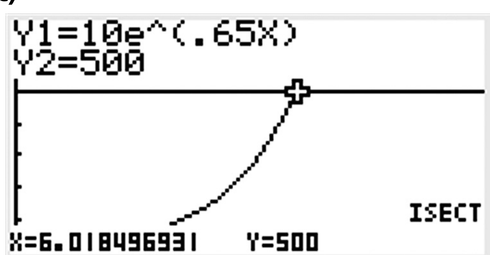
Lorsque le prix unitaire est supérieur ou égal à 2 €, la demande est inférieure ou égale à 300 000 objets.

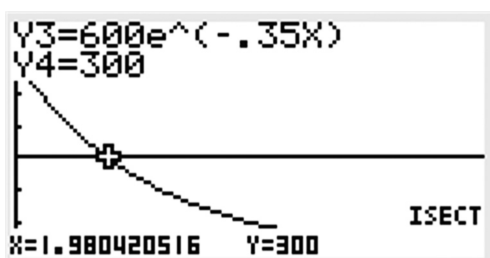
2. b) La courbe représentative de f est bien celle d'une fonction croissante. La courbe représentative de g est bien celle d'une fonction décroissante.



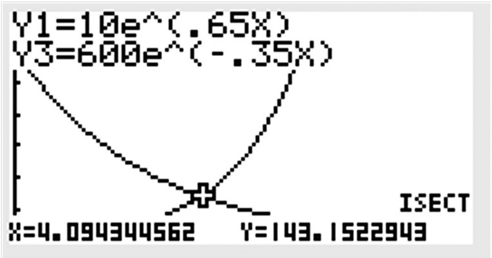


c)





d)



$x \approx 4{,}09$.

L'offre est égale à la demande pour un prix unitaire de 4,09 €. C'est le prix d'équilibre.

Problème 2

1. a) $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. D'où $\theta_1 = 0{,}955\theta_0$.

b) $\theta_2 = 0{,}955^2 \times \theta_0$; $\theta_3 = 0{,}955^3 \times \theta_0$.

c) $\theta_n = 0{,}955^n \times \theta_0$.

d) La suite (θ_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}955$.

e) $\theta_{25} = 22 \times 0{,}955^{25}$; $\theta_{25} \approx 7°$.

2. a) $e^{-0{,}046} \approx 0{,}955$.

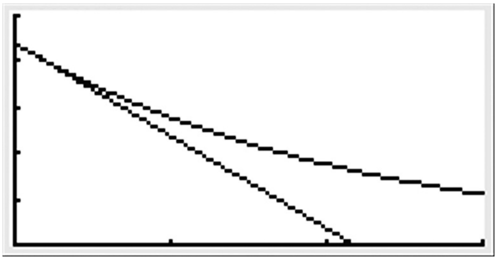
b) $f'(x) = 22 \times (-0{,}0046)\, e^{-0{,}046x}$
$= -1{,}012\, e^{-0{,}046x}$.

Cette dérivée est négative pour tout x de l'intervalle [0 ; 30].

c)

x	0	30
$f(x)$	22 ↘	5,5

d) $A(0\ ;\ 22)$.
Coefficient directeur de $T = f'(0) \approx -1{,}012$.
Équation de T : $y = -1{,}022x + 22$.



3. a) Temps ≈ 25 secondes.
b) $7{,}2 \div 25 = 0{,}288$.
La vitesse est 0,288 m/s.

Problème 3

1. a)

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln p_i$	1,609	1,723	1,808	1,917	2,028	2,128

c) $y = 0{,}021t + 1{,}61$.

d) $\ln p = 0{,}021t + 1{,}61$; $p = e^{0{,}021t + 1{,}61}$; $p = e^{1{,}61} \times e^{0{,}02t}$; $p = 5\, e^{0{,}02t}$.

e) $p_{35} = 5 \times e^{0{,}02 \times 35} \approx 178{,}535$ millions d'habitants.

2. a) $f'(t) = 0{,}02 \times 5\, e^{0{,}02t} = 0{,}1\, e^{0{,}02t}$.
b) Cette dérivée est positive sur l'intervalle [– 25 ; 35].
c)

x	– 25	35
$f(t)$	3,03 ↗	10,07

e) $5\, e^{0{,}02t} = 9$; $e^{0{,}02t} = 1{,}8$; $0{,}02t = \ln 1{,}8$; $t = \dfrac{\ln 1{,}8}{0{,}02} = 50 \ln 1{,}8$.

3. a) $f(28) = 5 \times e^{0{,}02 \times 28} \approx 8{,}8$ millions d'habitants.

b) $t > 50 \ln 1{,}8$; $t > 29{,}39$.
La population dépassera 9 millions d'habitants au cours de l'année de rang 30.

Problème 4

1. a) $A(100) = 3 \times 10^5\, e^{-0{,}023 \times 100}$
$= 30\,078$ Bq $= 3{,}01 \times 10^4$ Bq.
b) $1{,}5 \times 10^5 = 3 \times 10^5\, e^{-0{,}023t}$;

$e^{-0,023t} = 0,5$; $-0,023t = \ln 0,5$; $t = \dfrac{\ln 0,5}{-0,023}$.
$t \approx 30$ années.

2. a)

t	0	40	80	100	140	180
$f(t)$	1	0,40	0,16	0,10	0,04	0,02

b) $f'(t) = -0,023 \times e^{-0,023t}$.

c) La dérivée est négative.

d)

t	0	180
$f(t)$	1 ↘	0,02

e) $e^{-0,023t} = 0,2$; $-0,023t = \ln 0,2$;
$t = \dfrac{\ln 0,2}{-0,023}$.

g) $t \approx 70$.

3. L'activité radioactive est de 20 % de sa valeur initiale au bout de 70 ans.

Problème 5

1. a) $f_1(1) \approx 0,7788$; $f_1(3) \approx 0,4723$.
La probabilité pour que le composant C_1 fonctionne sans panne au bout de 1 000 heures est 0,7788.
La probabilité pour que le composant C_1 fonctionne sans panne au bout de 3 000 heures est 0,4723.

b) $f_2(1) \approx 0,6065$; $f_2(3) \approx 0,2231$.
La probabilité pour que le composant C_2 fonctionne sans panne au bout de 1 000 heures est 0,6065.
La probabilité pour que le composant C_2 fonctionne sans panne au bout de 3 000 heures est 0,2231.

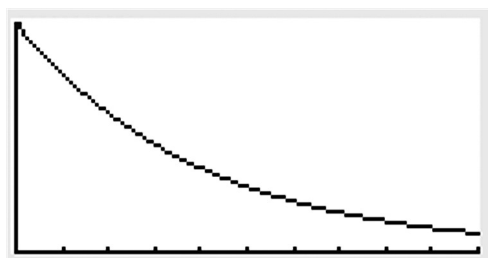
c) $f_1'(t) = -0,25e^{-0,25t}$. Cette dérivée est négative quel que soit t. La fonction f_1 est décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
$f_2'(t) = -0,5e^{-0,5t}$. Cette dérivée est négative quel que soit t. La fonction f_2 est décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

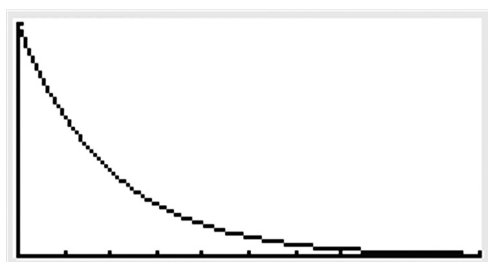
d) Plus le nombre d'heures d'utilisation des composants est grand, plus la probabilité de ne pas avoir de panne diminue.

e) $e^{-0,25t} = 0,4$; $-0,25t = \ln 0,4$;
$t = \dfrac{\ln 0,4}{-0,25}$; $t \approx 3,665$.

$e^{-0,5t} \geqslant 0,3$; $-0,5t \geqslant \ln 0,3$; $t \leqslant \dfrac{\ln 0,3}{-0,5}$;
$t \leqslant 2,408$.
La probabilité de ne pas avoir de panne avec le composant C_1 est égale à 0,4 après 3 665 heures d'utilisation.
La probabilité de ne pas avoir de panne avec le composant C_2 est supérieure ou égale à 0,3 tant qu'on ne dépasse pas 2 408 heures d'utilisation.

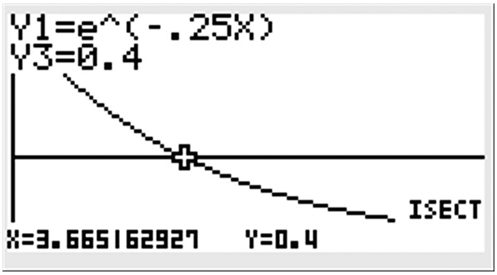
2. a) y est compris entre 0 et 1.
X min : 0 ; X max : 10 ; pas : 1 ; Y min : 0 ; Y max : 1 ; pas : 0,1.

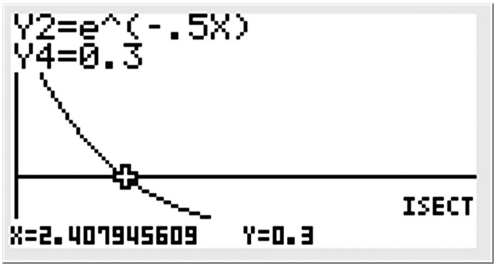




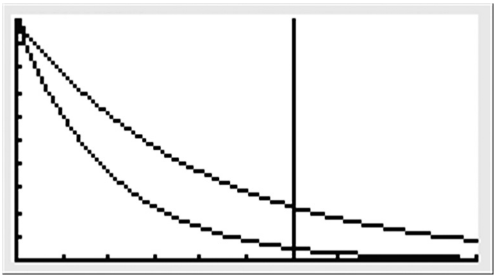
b) Les courbes représentatives de f et g sont bien celles de fonctions décroissantes.

c)





d)



$f_1(6\,000) > f_2(6\,000)$

Le composant C_1 a la plus grande probabilité de fonctionner sans panne après 6 000 heures d'utilisation.

Je teste mes connaissances

Page 110

1. B
2. A
3. C
4. B
5. C
6. B
7. A
8. A
9. A
10. C
11. A
12. B

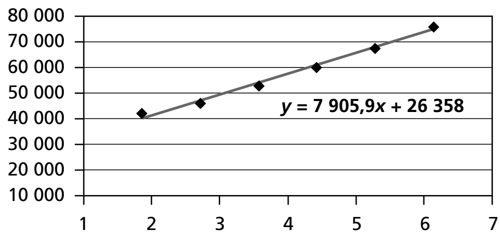
Évaluations

Évaluation vers le Bac pro 1

Pages 112-113

Exercice 1

1. et 2.



3. On peut estimer la puissance du parc européen en 2012 à :
$7\,906 \times 2012 + 26\,358 = 15\,933\,230$ méga watts.

Exercice 2

1. Lorsque la vitesse du vent est de 5 m/s, la puissance théorique de l'éolienne est : $f(5) = 91\,625$ W.
Lorsque la vitesse du vent est de 20 m/s, la puissance théorique de l'éolienne est : $f(20) = 5\,864\,000$ W.

2. Pour tout v dans l'intervalle [5 ; 20], $f'(v) = 3 \times 733\, v^2 = 2\,199\, v^2$.

Pour tout v dans l'intervalle [5 ; 20], $f'(v) > 0$.

3.

v	5	20
$f'(v)$	+	
$f(v)$	91 625 ↗	5 864 000

4. $f(v) = 2.10^6$ équivaut à $733\, v^3 = 2.10^6$

c'est-à-dire $v^3 = \dfrac{2.10^6}{733}$ d'où $v = \left(\dfrac{2.10^6}{733}\right)^{\frac{1}{3}}$

donc $v \approx 14$ mètres par seconde.

Remarque : sans utiliser la puissance $\dfrac{1}{3}$ (ou la racine cubique), on peut obtenir cette valeur par balayage à l'aide de la calculatrice ou du tableur.

Évaluation vers le Bac pro 2

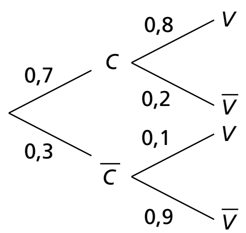
Pages 114-115

Exercice 1

1. Les employés étant tirés au hasard, les probabilités s'obtiennent à partir des fréquences indiquées.

	L'employé a une voiture de fonction (V)	L'employé n'a pas de voiture de fonction ($\overline{V}$)	Total
L'employé est un commercial (C)	$0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$	$0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$	0,70
L'employé n'est pas un commercial ($\overline{C}$)	$0{,}3 \times 0{,}10 = 0{,}03$	$0{,}3 \times 0{,}90 = 0{,}27$	0,30
Total	0,59	0,41	1

ou



2. a) $p(C) = 0{,}7$.

b) $p_C(V) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$.

c) $p_{\overline{C}}(V) = 0{,}3 \times 0{,}10 = 0{,}03$.

3. $\overline{C} \cap V$ est l'événement « l'employé n'est pas un commercial et il a une voiture de fonction ».
$p(\overline{C} \cap V) = 0{,}03$.

Exercice 2

1. La suite (u_n) est une suite géométrique puisque, chaque année, le nombre de clients doit augmenter de 5 %, c'est-à-dire être multiplié par 1,05.

2. $u_n = 1\,700 \times 1{,}05^n$.

3. En 2015, le nombre de clients sera $u_5 = 1\,700 \times 1{,}05^5 = 2\,169{,}67$, soit environ 2 170 clients.

4. Pour connaître le nombre de clients prévus en 2020, on calcule u_{10}, soit
$u_{10} = 1\,700 \times 1{,}05^{10} \approx 2\,769{,}12$.
Avec une augmentation de 5 %, l'objectif de 5 000 clients en 2020 ne sera pas atteint.

5. Avec le tableur, on trouve qu'il faut un coefficient multiplicateur de 1,114 ; ce qui correspond à 11,4 %, c'est-à-dire l'augmentation minimale annuelle permettant d'obtenir 5 000 clients en 2020.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	n	nombre total de clients			
2	2010	0	1700			
3	2011	1	1893,8		Taux d'augmentation	
4	2012	2	2109,6932		1,114	
5	2013	3	2350,198225			
6	2014	4	2618,120822			
7	2015	5	2916,586596			
8	2016	6	3249,077468			
9	2017	7	3619,4723			
10	2018	8	4032,092142			
11	2019	9	4491,750646			
12	2020	10	5003,810219			

Évaluation vers le Bac pro 3

Pages 116-117

Exercice 1

a) $C_M(x) = x^2 - 30x + 300$.

b) On fait cette étude soit à l'aide de la fonction dérivée, soit à partir des coordonnées du sommet de la parabole.
Le coût moyen minimal de C_M sur [0 ; 20] est pour $x = 15$.

c) Le coût de production minimal $C_M(15)$ vaut 75 milliers d'euros.
La production correspondante $C(15)$ vaut 1 125 milliers d'euros.

Exercice 2

a)

	Vis présentant le défaut (a)	Vis ne présentant pas le défaut (a)	Total
Vis présentant le défaut (b)	80	160	240
Vis ne présentant pas le défaut (b)	200	1 560	1 760
Total	280	1 720	**2 000**

b)

	a	$\bar{a}$	Total
b	$\frac{80}{2\,000} = 0{,}04$	$\frac{160}{2\,000} = 0{,}08$	0,12
$\bar{b}$	$\frac{200}{2\,000} = 0{,}1$	$\frac{1\,560}{2\,000} = 0{,}78$	0,88
Total	0,14	0,86	**1**

c) $P(a \cup b) = 0{,}04 + 0{,}08 + 0{,}14 = 0{,}26$.
La probabilité que la vis présente au moins l'un des deux défauts est 0,26.

d) La probabilité que la vis ne présente aucun défaut est 0,86.

Évaluation vers le Bac pro 4

Pages 118-119

1. a) La fonction $x \mapsto 1{,}04^x$ est croissante car 1,04 est supérieur à 1.
Cette fonction est multipliée par 50 000, nombre positif.
Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 20].

b) $50\,000 \times 1{,}04^x \geq 90\,000$; $1{,}04^x \geq 1{,}8$; $x \ln 1{,}04 \geq \ln 1{,}8$; $x \geq \frac{\ln 1{,}8}{\ln 1{,}04}$; $x \geq 14{,}98$.

Le nombre minimum d'années de placement demandé est 15 ans.

c) $f(18) = 50\,000 \times 1{,}04^{18} \approx 101\,290{,}83$.

La valeur acquise au bout de 18 ans est environ 101 291 €.

2. a) $g'(x) = -\,250x + 4\,250$.
$g'(x) = 0$ pour $x = 17$.

b) La fonction g passe par son maximum pour $x = 17$.

x	0	17	20
$g'(x)$	+	0	–
$g(x)$	50 000 ↗	86 125	↘ 85 000

c) La valeur acquise par le capital de madame Basdelaine est alors 86 125 €.

3. a) $f(18) = 101\,291$ et $g(18) = 86\,000$.
Le placement le plus intéressant au bout de 18 ans est donc le placement A.

b) $f(10) = 74\,012$ et $g(10) = 80\,000$.
Le placement le plus intéressant est le placement B si madame Basdelaine arrête son placement au bout de 10 ans.

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

Composition : STDI

Éditions Foucher – Vanves – juillet 2011 – 01 – DL-CLC/EG

Imprimé en France par Jouve