BAC PRO 3 ans
TERMINALE PROFESSIONNELLE

Groupements A et B

Maths

I. Baudet - L. Breitbach - P. Dutarte - D. Laurent
Sous la direction de G. Barussaud

CORRIGÉ

FOUCHER

Votre site associé :
www.editions-foucher.fr/mathsciences
Inscrivez-vous et déclarez vos prescriptions !

Sur le site associé maths-sciences, vous trouverez :
– l'ensemble du guide pédagogique en format PDF ;
– les fichiers corrigés des activités informatiques.
Les fichiers de travail sont présentés dans le guide pédagogique par le logo .

Vous pourrez aussi prendre connaissance de l'ensemble des produits Foucher dans votre matière.

ISBN 978-2-216-11608-9

Sommaire

Statistique à deux variables (1)

Activités

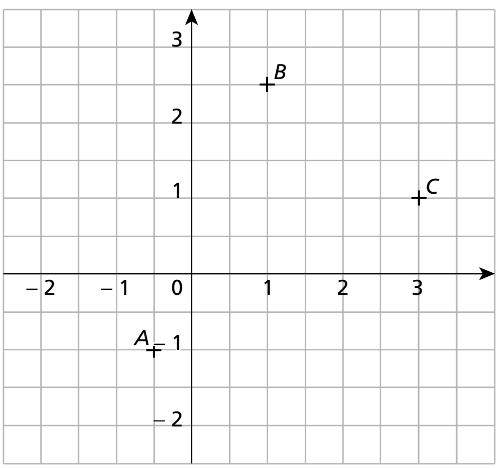
Page 7

On peut estimer l'étendue de la glace dans l'océan Arctique en juin 2050 à :
$-0{,}0424 \times 2\,050 + 96{,}522 \approx 9{,}6$ km^2.

Pages 8 et 9

Est-ce que je sais ?

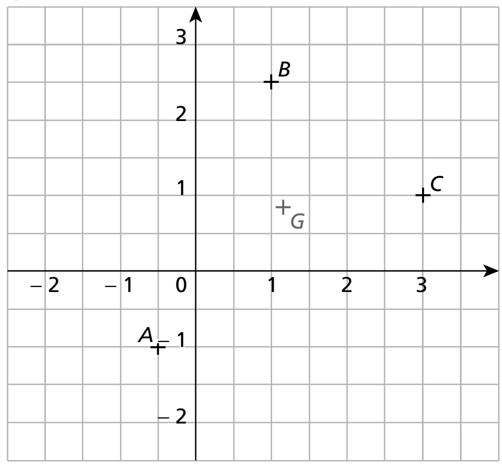
1.



2. a) $\overline{x} = \dfrac{-0{,}5+1+3}{3} = \dfrac{3{,}5}{3} = \dfrac{7}{6}$;

$\overline{y} = \dfrac{-1+2{,}5+1}{3} = \dfrac{2{,}5}{3} = \dfrac{5}{6}$.

b)

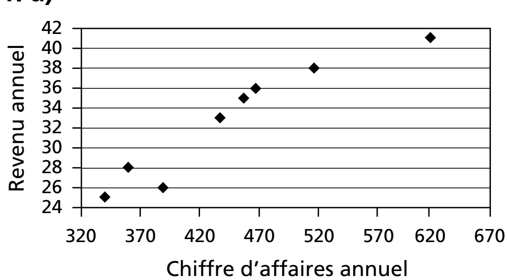


3. On a $\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{6} + b$, d'où $b = \dfrac{10}{12} - \dfrac{7}{12}$;

$b = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

Activité 1

1. a)



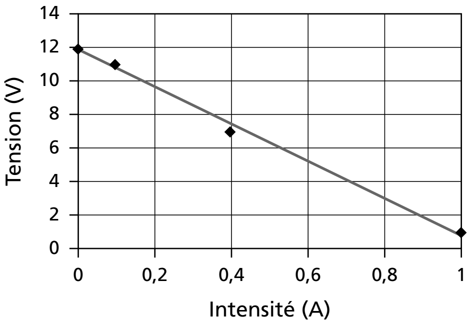
b) Les points du nuage sont proches d'une droite d'équation $y = a\,x + b$ correspondant à un fixe b et à une commission de coefficient de proportionnalité a.

2. a) $\overline{x} = 450$; $\overline{y} = 32{,}75$.

b) Le point $G(450\ ;\ 32{,}75)$ se situe « au centre » du nuage.

Activité 2

a) et b)



c) $e = 12$ et $R = 11$.

Activité 3

1. $\overline{x} = 2\,003{,}5$ et $\overline{y} = 553{,}1$.

2. a) On doit avoir

$553{,}1 = -3{,}33 \times 2\,003{,}5 + b$, d'où

$b = 553{,}1 + 3{,}33 \times 2\,003{,}5$; $b = 7\,224{,}755$.

b) On peut estimer la quantité d'émission de gaz à effet de serre en France en 2015 à :

$-3{,}33 \times 2\,015 + 7\,224{,}755 \approx 515$ millions de tonnes équivalent CO_2.

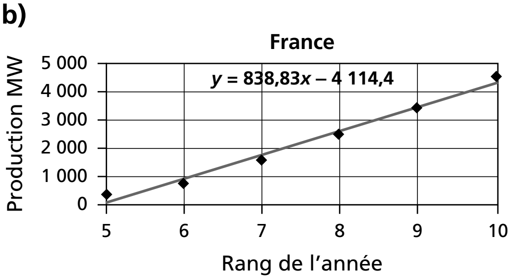
J'utilise un logiciel

Page 13

Ajuster un grand nombre de données

1. a) Un ajustement affine a peu de sens ici car la forme du nuage de points n'est pas allongée le long d'une droite.

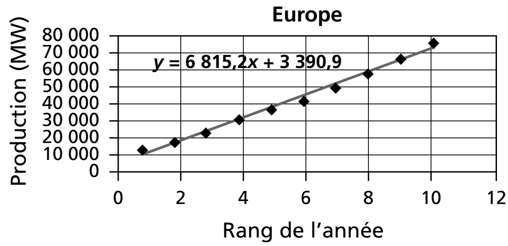
b)



c) On peut estimer la production française en 2012 à :

$839 \times 12 - 4\,114 = 5\,954$ MW.

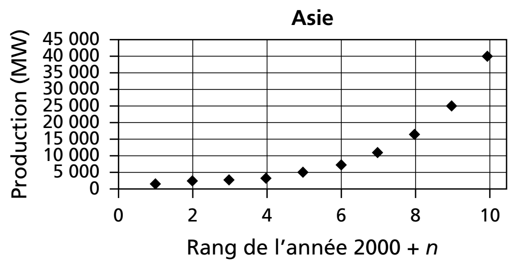
2. a) et b)



c) On peut estimer la production européenne en 2013 à :

$6\,815 \times 12 + 3\,391 = 85\,171$ MW.

d) et e)



Un ajustement affine de la production en Asie n'est pas justifié car l'augmentation de la production s'accélère.

f) On peut estimer la production asiatique en 2012 à :

$973{,}77 \times 1{,}42^{12} \approx 65\,451$ MW.

Comprendre le principe des « moindres carrés »

1. a) $\overline{x}$ est calculé en B7 et $\overline{y}$ est calculé en C7.

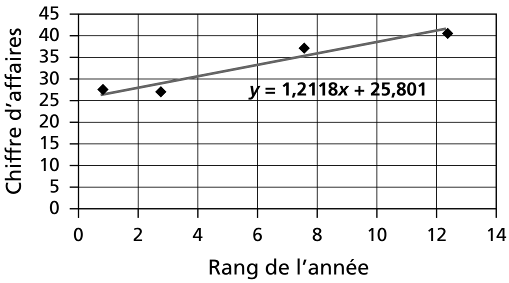
b) La formule entrée en B9 est =C7-B8*B7 où C7 correspond à $\overline{y}$, B8 à a et B7 à $\overline{x}$.

c) Les écarts négatifs se soustraient aux écarts positifs, alors que les écarts au carré sont tous positifs.

d) On trouve $a = 1{,}2$.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	Rang de l'année	Chiffre d'affaires en milliards d'euros	y = ax + b	Ecarts verticaux	Ecarts au carré
2	1998	1	28	27,075	0,925	0,855625
3	2000	3	27,2	29,475	-2,275	5,175625
4	2005	8	37,6	35,475	2,125	4,515625
5	2010	13	40,7	41,475	-0,775	0,600625
6					Somme	**11,1475**
7	Moyennes	6,25	33,375			
8	a =	**1,2**				
9	b =	25,875				

2. a) Le tableur donne comme équation :
$y = 1{,}2118x + 25{,}801$.



b) On a $1{,}2 \approx 1{,}2118$.

Exercices et problèmes

Pages 15 à 18

Exercices

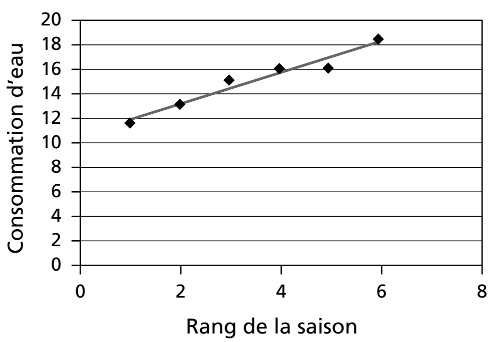
Déterminer le point moyen

1. a) On a $\bar{x} = 300$ et $\bar{y} = 20$,
d'où $G(300 ; 20)$.

b) On a $0{,}084 \times 300 - 5{,}2 = 20$.

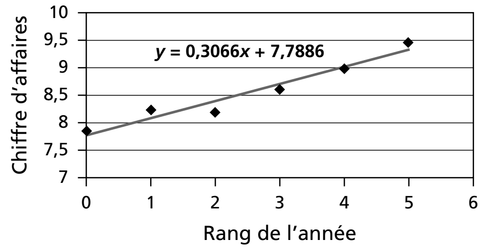
2. On a
$y = -\,3{,}8857 \times 2\,020 + 9\,461{,}3 \approx 1\,612$ m.

3. a) et b)



c) On peut estimer la consommation d'eau en 2011 (année de rang 10) à :
$1{,}2 \times 10 + 11 = 23$ millions de m^3.

4. a) b) et c)



d) On peut estimer le chiffre d'affaires en 2011 (année de rang 6) à :
$0{,}3 \times 6 + 7{,}8 = 9{,}6$ millions d'euros.

5. a) La calculatrice donne l'équation :
$y = 0{,}1734x - 339{,}64$.

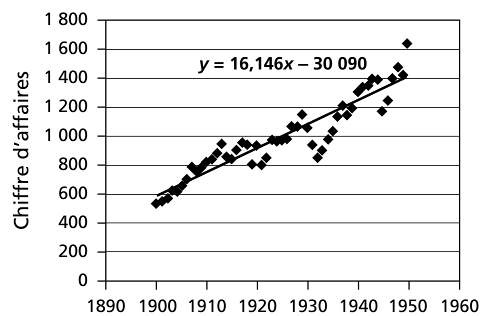
b) On peut estimer le SMIC en 2012 à :
$y = 0{,}1734 \times 2\,012 - 339{,}64 \approx 9{,}24$ €.

6. a) La calculatrice donne l'équation (résultats arrondis à 10^{-2}) : $y = 0{,}04x$.

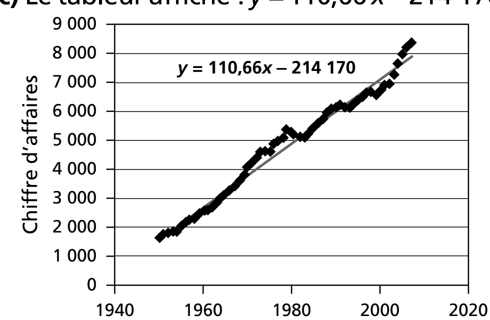
b) On en déduit que $R = 0{,}04\ \Omega$.

7. a) Un ajustement affine du nuage de points n'est pas justifié car la tendance globale n'est pas celle d'une droite.

b) Le tableur affiche : $y = 16{,}146\,x - 30\,090$.



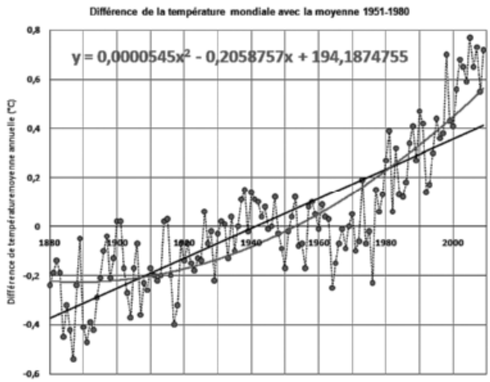
c) Le tableur affiche : $y = 110{,}66\,x - 214\,170$.



d) L'affirmation est exacte. On retrouve les coefficients directeurs des droites d'ajustement, arrondis à l'unité.

Exploiter un ajustement non affine

8.

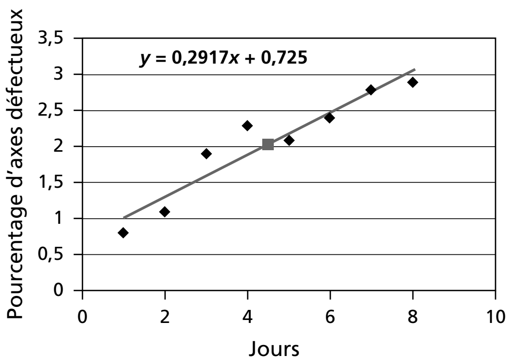


a) L'équation affichée par le tableur est :
$y = 0{,}0061x - 11{,}817$.
b) L'ajustement qui semble préférable est l'ajustement par la parabole.
c) Estimation de l'écart de température globale en 2040 par rapport à la période 1951-1980 :
– à l'aide de l'ajustement affine :
$0{,}0061 \times 2040 - 11{,}817 = 0{,}627$;
– à l'aide de l'ajustement parabolique :
$0{,}0000545 \times 2040^2 - 0{,}20588 \times 2040$
$+ 149{,}19 = 1{,}002$.

Problèmes

Problème 1

1.



2. On a $\overline{x} = 4{,}5$ et $\overline{y} = 2{,}0375$,
donc $G(4{,}5 ; 2{,}0375)$.

3. La calculatrice donne (en arrondissant les coefficients à 10^{-3}) :
$y = 0{,}292x + 0{,}725$.

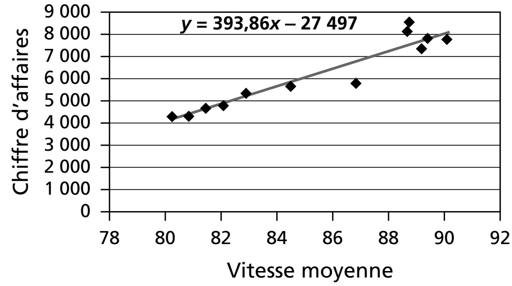
4. Voir la droite tracée sur le graphique.

5. On peut estimer le pourcentage d'axes défectueux produits le 11^{e} jour à :
$0{,}292 \times 11 + 0{,}725 = 3{,}937$, d'où environ 3,9 % d'axes défectueux.

Problème 2

1. On peut formuler l'hypothèse que le nombre de morts est lié à la vitesse moyenne.

2. a)



b) Le nuage de points a une forme allongée et l'hypothèse faite à la question 1 est confirmée. On peut envisager un ajustement affine du nombre de morts en fonction de la vitesse moyenne. L'hypothèse faite au 1. est donc confirmée.

3. a) Le tableur fournit l'équation :
$y = 393{,}86x - 27\,497$.
b) Pour une vitesse moyenne de 78 km/h, on peut estimer le nombre de morts à :
$393{,}86 \times 78 - 27\,297 \approx 3\,424$.
Le nombre de vies sauvées serait :
$4\,273 - 3\,424 = 849$ vies.

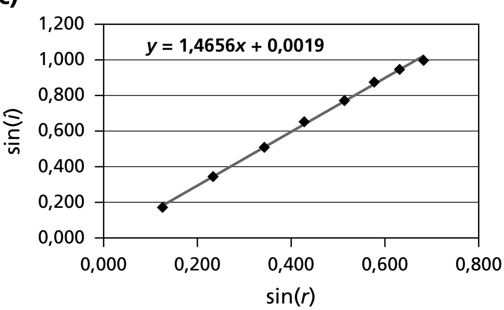
Problème 3

1. a) et b)

Incidence	Réfraction	sin *r*	sin *i*	
i	*r*	*xi*	*yi*	(sin *i*) / sin(*r*)
10°	7°	0,122	0,174	1,42
20°	13,5°	0,233	0,342	1,47
30°	20°	0,342	0,500	1,46
40°	25,5°	0,431	0,643	1,49
50°	31°	0,515	0,766	1,49
60°	35,5°	0,581	0,866	1,49
70°	39,5°	0,636	0,940	1,48
80°	43,5°	0,688	0,985	1,43

On constate que le quotient $\frac{\sin i}{\sin r}$ est pratiquement constant.

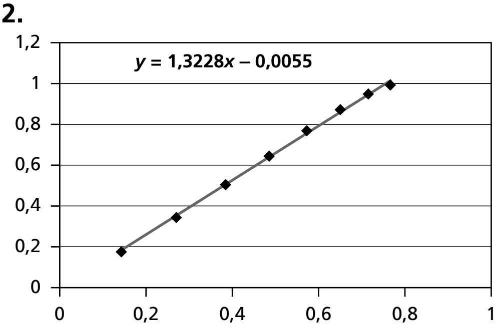
c)



On obtient : $y = 1{,}47x$.

d) On peut estimer l'indice de réfraction du plexiglas à environ 1,47.

2.



On peut estimer l'indice de réfraction de l'eau à environ 1,32.

Je teste mes connaissances

Page 19

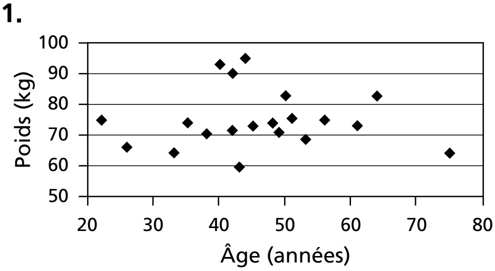
1. B
2. A
3. C
4. C
5. C
6. C
7. A
8. C
9. A
10. C

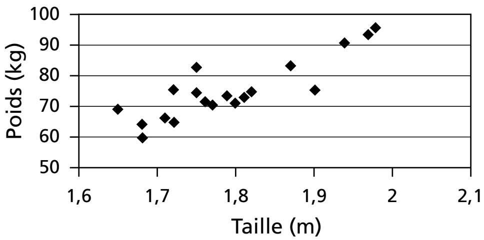
Je m'entraîne au CCF

Page 20

Partie A

1.





2. Le poids n'est pas lié à l'âge car le nuage des points M_i est très dispersé.
Le poids est lié à la taille car le nuage des points N_i a une forme allongée.
3. Le tableur fournit la droite d'ajustement d'équation :
$y = 85{,}708x - 78{,}797$.
4. Selon la tendance observée, on peut estimer le poids d'un homme mesurant 1,85 m à :
$85{,}708 \times 1{,}85 - 78{,}797 \approx 79{,}8$ kg.

Partie B

1. La formule de Lorentz fournit :
– pour un homme de 1,85 m :
$100 \times (0{,}85 - \frac{0{,}35}{4}) = 76{,}25$ kg ;
– pour une femme de 1,73 m :
$100 \times (0{,}73 - \frac{0{,}23}{2{,}5}) = 63{,}8$ kg.
2. Pour un garçon de 0,8 m, on obtient :
$100 \times (-\,0{,}2 - \frac{-0{,}7}{4}) = -\,2{,}5$ kg ;
ce qui n'a pas de sens.
3. On a :
$100 \times (x - 1 - \frac{x - 1{,}5}{4})$
$= 100 \times (x - 1 - 0{,}25x + 0{,}375)$
$= 100 \times (0{,}75x - 0{,}625) = 75x - 62{,}5$.
4. On a $75 \times 1{,}85 - 62{,}5 = 76{,}25$. Ce résultat est inférieur à 79,8.

Dérivée et sens de variation d'une fonction

2

Activités

Page 21

Cette question se rapporte au chapitre « Équation d'une tangente – nombre dérivé » de première.

On détermine graphiquement les coefficients directeurs des tangentes à la courbe représentative de la fonction f en $t = 0$ et $t = 5$ s.

On lit $f'(0) = 7$ et $f'(5) = 15$.

La vitesse à l'entrée du tube est 7 m/s et celle à la sortie du tube est 15 m/s.

Pages 22 et 23

Est-ce que je sais ?

a) D_2 est la tangente à C en A.
b) $a_{(D2)} = -1$.
c) $f'(0) = -1$.
d) $f'(3) = 0,7$.

Activité 1

b) $f'(0) = 7$ et $f'(5) = 15$.
c) La courbe obtenue par la trace du point B est une droite. L'équation de cette courbe est $y = 1,6x + 7$.
d) La droite se superpose à la trace du point B.

Activité 2

a) •

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	-4	-2	0	2	4

• La courbe obtenue par la trace du point B est une droite : $y = 2x$.
• On en déduit que la fonction dérivée de la fonction carré est $f'(x) = 2x$.

b) •

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	12	3	0	3	12

• La courbe obtenue par la trace du point B est une parabole : $y = 3x^2$.
• On en déduit que la fonction dérivée de la fonction cube est $g'(x) = 3x^2$.

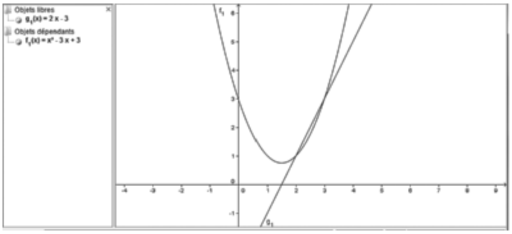
c) • Pour $a = 1$.

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	1	1	1	1	1

• La courbe obtenue par la trace du point B est une droite d'équation $y = 1$ ou $y = a$.
• Lorsque l'on fait varier les coefficients a et b, on obtient une droite d'équation $y = a$.
• On en déduit que la fonction dérivée de la fonction affine est $h'(x) = a$.

Activité 3

1. a) et d)



b) $x = \frac{3}{2 \times 1}$. L'abscisse x du sommet de la parabole est 1,5.
Le sommet de la parabole correspond à un minimum de la fonction f_1.

c)

x	-1		$1,5$		4
$f_1(x)$	7	↘	$-0,75$	↗	7

e) La fonction g_1 représente la fonction dérivée de f_1.

f)

x	-1		$1,5$		4
$g_1(x)$		$-$	0	$+$	

g) Lorsque le signe de g_1 est négatif, la fonction f_1 est décroissante et inversement lorsque g_1 est positif.

2. a)

- L'abscisse x du sommet de cette parabole vaut 0,5 ; le sommet de la parabole correspond à un maximum de la fonction f_2.

Tableau de variation de f_2.

x	-1		$1,5$		4
$f_2(x)$	-10	↗	$-3,75$	↘	-10

La fonction g_2 représente la fonction dérivée de f_2.
Tableau de signe de g_2.

x	-2		$0,5$		3
$g_2(x)$		$+$	0	$-$	

- L'abscisse x du sommet de cette parabole vaut $-\frac{5}{6}$; le sommet de la parabole correspond à un minimum de la fonction f_3.

Tableau de variation de f_3.

x	-3		$-\frac{5}{6}$		1
$f_3(x)$	10	↘	4,25	↗	6

La fonction g_3 représente la fonction dérivée de f_3.
Tableau de signe de g_3.

x	-3		$-\frac{5}{6}$		1
$g_1(x)$		$-$	0	$+$	

b) Oui, la conjecture est vérifiée pour les fonctions f_2 et f_3.

J'utilise une calculatrice

Pages 27 et 28

Vérifier l'existence d'un extremum

1. Rechercher un extremum

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$. $\Delta = 36$, d'où $f'(x) < 0$ pour x appartenant à $[-1 ; 1]$.

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$. $g'(x) > 0$ pour $x < 0,25$.

$h'(x) = 3x^2$. $h'(x)$ est toujours positive.

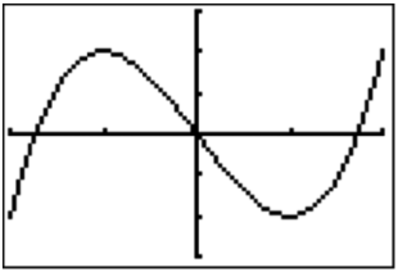
b)

x	-2		-1		1		2
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

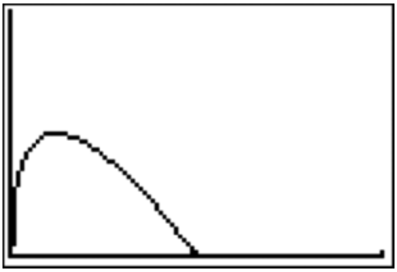
x	$0,2$		$0,25$		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0,247	↗	0,25	↘	

x	-2		0		2
signe de $h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	-8		↗		8

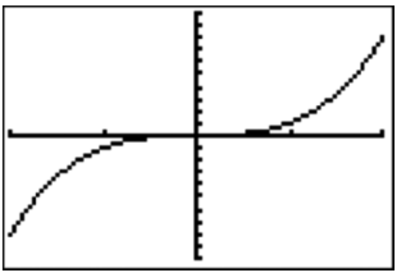
c) f



g



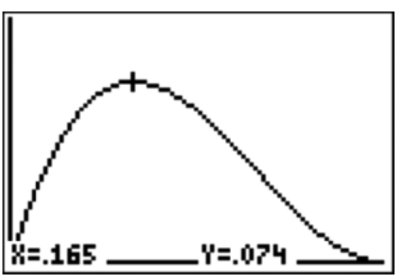
h



d) Non, ce n'est pas toujours le cas. Le tableau de variation de h donne un contre-exemple. En zéro, la dérivée s'annule sans que la fonction h présente un minimum ou un maximum.

2. Déterminer la valeur exacte d'un extremum

a) Largeur : $1 - 2x$;
longueur : $1 - 2x$; hauteur : x.
b) $(1 - 2x)(1 - 2x)x = (4x^2 - 4x + 1)x = 4x^3 - 4x^2 + x$.
c) et d)



L'abscisse du maximum vaut 0,165.

e) $f'(x) = 12x^2 - 8x + 1$.

$f'(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{6}$ et $x = 0,5$.

x	0,2		$\frac{1}{6}$		0,5
signe de $f'(x)$		+	0	–	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{27}$	↘	0

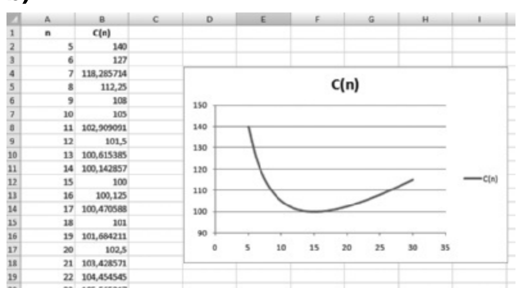
f) La valeur exacte du maximum est $\frac{1}{6}$.

g) Le volume maximal de la boîte vaut $\frac{2}{27}$ m^3.

Déterminer un minimum

1. Calculs de coûts unitaires

a) Erratum : il faut faire varier n de 5 à 30.
La formule à entrer en B2 est
=2*A2+40+450/A2.
b)



n	C(n)
5	140
6	127
7	118,285714
8	112,25
9	108
10	105
11	102,909091
12	101,5
13	100,615385
14	100,142857
15	100
16	100,125
17	100,470588
18	101
19	101,684211
20	102,5
21	103,428571
22	104,454545

c) La valeur du minimum est obtenue pour $n = 15$.

d) Graphiquement, on obtient pour valeurs de n : $9 \leq n \leq 26$.

2. Étude d'une fonction

a) $f'(x) = 2 - \frac{450}{x^2}$.

b) $x^2 = 225$ d'où $x = -15$ ou $x = 15$. Soit sur $[5 ; 30]$ $f'(x) \geq 0$ pour x appartenant à $[15 ; 30]$.

c)

x	5		15		30
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	140	$\searrow$	100	$\nearrow$	115

d) La valeur du minimum est $f(15) = 100$.
e) On se ramène à $2x^2 - 70x + 450 \leq 0$.

$\Delta = 1\,300$; $x_1 = \dfrac{70 - \sqrt{1300}}{4}$ et

$x_2 = \dfrac{70 + \sqrt{1300}}{4}$. Soit pour $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$.

3. Exploitation

a) Le nombre de commandes à réaliser afin d'obtenir un coût unitaire de gestion de stock minimal est 15.
b) Dans ce cas, le montant de ce coût minimal vaut 100 €.
c) Le nombre de commandes correspondant à un coût unitaire de gestion de stock inférieur ou égal à 110 € est compris entre 9 et 26.

Exercices et problèmes

Pages 29 à 32

Exercices

Fonction dérivée

1. a) $f'(x) = -8x$.
b) $f'(x) = -4x + 1{,}5$.
2. a) $f'(x) = 15x^2 - 4$.
b) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, avec $x \neq 0$.
3. a) $f'(x) = 4$.
b) $f'(x) = 6x^2$.
4. a) $f'(x) = \dfrac{4}{x^2}$, avec $x \neq 0$.
b) $f'(x) = -\dfrac{6}{x^2}$, avec $x \neq 0$.
5. a) $f'(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.
b) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.
6. a) $f'(x) = 3x^2 + 2$.
b) $f'(x) = 15x^2 - 4x$.
7. a) $f'(x) = -4x$.
b) $f'(x) = 3x^2 - 7$.
8. a) $f'(x) = 6x - \dfrac{2}{x^2}$, avec $x \neq 0$.
b) $f'(x) = 15x^2 + \dfrac{4}{x^2}$, avec $x \neq 0$.
9. a) $f'(x) = 42x + 1$.
b) $f'(x) = 6x - 6$.
10. a) $f'(x) = 9x^2 + 8x$.
b) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, avec $x \neq 0$.
11. a) $f'(x) = 7$; $f'(1) = 7$.
b) $f'(x) = 8x + 3$; $f'(3) = 27$.
c) $f'(x) = -3x^2 + 14x$; $f'(1) = 11$.
12. a) $f'(x) = -6x - 10$; $f'(0) = -10$.
b) $f'(x) = 14x - \dfrac{2}{x^2}$ avec $x \neq 0$; $f'(2) = 27{,}5$.
13. a) $f'(x) = x + 4$.
b) $f'(2) = 6$.
c) $y = 6x - 5$.

Dérivée et sens de variation

14. a) $f'(x) = 7$. **b)** $f'(x) = -4$.

x	0		10
signe de $f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	65

x	-5		6
signe de $f'(x)$		$-$	
$f(x)$	23	$\searrow$	-21

15. a) $f'(x) = 4x$.

x	-3		0		3
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$2x^2 - 1$	17	$\searrow$	-1	$\nearrow$	17

b) $f'(x) = \dfrac{4}{x^2} + 2$.

x	-5		-1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-9{,}8$	$\nearrow$	2

16. a) $f'(x) = 6x^2 - 2$ **b)** $f'(x) = 2x - 3$.

x	-1		$-\sqrt{1/3}$		$\sqrt{1/3}$		3
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	$\approx -0{,}770$	$\searrow$	$\approx 0{,}770$	$\nearrow$	48

x	0		$1{,}5$		4
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-0{,}25$	$\nearrow$	6

17. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	$\nearrow$	23	$\searrow$	-4	$\nearrow$	7

18. a) $f'(x) = -10x$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$-5x^2 + 2$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3

b) $f'(x) = 9x^2 + 4x - 12$.

x	-3		$\approx -1{,}40$		$\approx 0{,}96$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-24	$\nearrow$	$\approx -15{,}49$	$\searrow$	$\approx -4{,}02$	$\nearrow$	11

Dérivée et extremum

19. $f'(x) = 8x - 2$. Le minimum de f sur $[-1\,;\,1]$ est pour $x = \dfrac{1}{4}$. Il est égal à $\dfrac{3}{4}$.

20. $f'(x) = -81x^2 + 9$. Le maximum de f sur $[0\,;\,2]$ est pour $x = \dfrac{1}{3}$. Il est égal à $f(\dfrac{1}{3}) = 4$.

21. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Le maximum de f sur $[-2\,;\,0]$ est pour $x = -1$. Il est égal à 6.

22. $f'(x) = 1{,}5x^2 - 2$. Le minimum de f sur $[-1\,;\,4]$ est pour $x = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$. Il est égal à $f(\sqrt{\dfrac{4}{3}}) \approx -4{,}732$.

Problèmes

Problème 1

1. a) $C_A(n) = 100 \times n$.

b) Voir le graphique page 16.

2. a)

x	0	30	50	90	150
$f(x)$	4 800	3 000	2 200	1 560	3 000

x	200	300	400	410
$f(x)$	6 400	19 200	40 000	42 520

b) Voir le graphique page 16.

c) $f'(x) = 0{,}8x - 72$.

d) $f'(x) = 0$ pour $x = 90$.

e)

x	0		90		410
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4 800	↘	1 560	↗	42 520

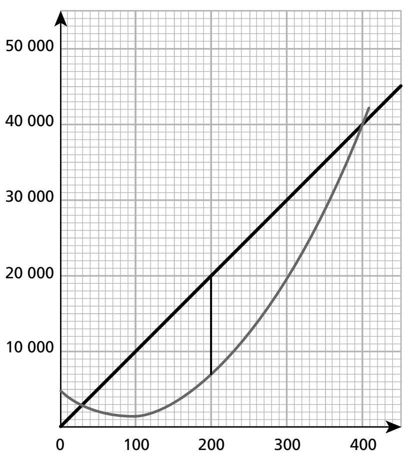
3. a) Les charges sont minimales pour 90 clients.

b) Il s'agit de la différence des extrémités du segment vertical.

20 000 – 6 500 = 13 500.

Soit, avec la précision du graphique, les 13 500 € de bénéfice. 13 600 est aussi acceptable comme valeur.

Graphique pour les questions
1. b), 2. b), 2. f) et 3. b) :



Problème 2

$E'(\theta) = -0{,}032\,\theta + 17{,}8$.

La dérivée s'annule pour $\theta = 556{,}25$.

Donc la f.e.m. atteint sa valeur maximale pour une température de 556,25 °C.

Problème 3

1. A = (21 – 2 × 2)(29,7 – 2 × 3) = 402,9.

La surface imprimable d'une page A4 vaut 402,9 cm^2.

2. $y = \dfrac{623{,}7}{x}$.

3. $A(x) = (x - 4)\left(\dfrac{623{,}7}{x} - 6\right)$

$= 623{,}7 - 6x - 4 \times \dfrac{623{,}7}{x} + 24.$

Soit la relation donnée.

4. a) Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée lorsque $x > 0$.

$A'(x) = -6 + \dfrac{2\,494{,}8}{x^2}$. $A'(x) = 0$ avec $x > 0$, pour $x = \sqrt{415{,}8} \approx 20{,}39$.

L'aire est maximale pour $x = 20{,}39$.

b) $y = \dfrac{623{,}7}{20{,}39} \approx 30{,}59$.

Cette page a pour dimensions
20,4 cm × 30,6 cm.

c) Non.

Problème 4

1. $V'(h) = \dfrac{2}{3}\pi(9 - 3h^2)$. D'où $V'(h) \geq 0$ pour $-\sqrt{3} \leq h \leq \sqrt{3}$.

Donc V est croissante sur $[0\,;\,\sqrt{3}]$ et décroissante sur $[\sqrt{3}\,;\,3]$.

2. D'après la réponse faite au 1, le volume maximal sera pour $h = \sqrt{3}$.

$V(\sqrt{3}) = \dfrac{2}{3}\pi(9 \times \sqrt{3} - \sqrt{3}^3) \approx 21{,}766$. Soit un volume maximal de 21,766 dm^3.

3. On constate que le volume est deux fois plus grand que le volume de 2 cubes de côtés $\sqrt{3}$ (environ 10,39 dm^3).

Problème 5

1. a) $V = \dfrac{\pi d^2}{4} \times h$.

b) $h = \dfrac{4}{\pi d^2}$.

2. a) Surface d'un disque : $\dfrac{\pi d^2}{4}$; surface du rectangle : $\pi d \times h = \pi d \times \dfrac{4}{\pi d^2} = \dfrac{4}{d}$.

On obtient bien $S(d) = \dfrac{\pi d^2}{2} + \dfrac{4}{d}$.

b) Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée lorsque $x > 0$.

$S'(d) = \pi d - \dfrac{4}{d^2}$. $S'(d) = 0$ lorsque $\pi d^3 - 4 = 0$.

Soit $d = \sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}} \approx 1{,}0839$ m.

c) D'après 1.b., on en déduit que $h = 1{,}0839$ m.

3. $h = d$. Le cylindre a la même hauteur que son diamètre.

Problème 6

En changeant d'unité du mètre au décimètre, le problème reste identique.
D'après le problème 5, la boîte a pour dimensions $h = d = 1{,}084$ dm.
Ce n'est pas tout à fait le cas des boîtes vendues dans le commerce qui ont une hauteur légèrement supérieure au diamètre. Mais les dimensions restent proches des dimensions idéales.

Problème 7

1. a) Les coordonnées de O valent (0 ; 0) et la courbe est tangente à l'axe des abscisses.
b) La courbe de f passe par B. Graphiquement, on détermine les coordonnées de B : $B(4\ ;\ 3)$.
Le coefficient directeur de la tangente en B correspond au nombre dérivé en ce point. Soit $f'(4) = 0{,}5$.

2. a) On a bien $f(0) = 0$ et $f(4) = 3$.

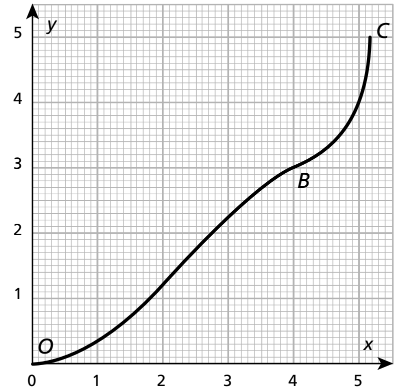
$f'(x) = -\dfrac{3}{16}x^2 + \dfrac{14}{16}x$. On a bien $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0{,}5$. Cette fonction vérifie donc bien les contraintes du problème.

b) $\Delta = \dfrac{49}{64} > 0$; $x_1 = 0$ et $x_2 = \dfrac{14}{3}$.

Soit sur [0 ; 4] :

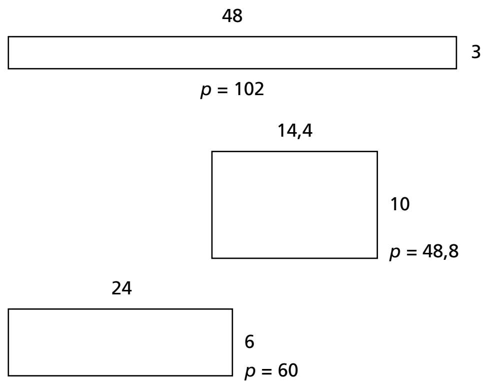
x	0	4
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	3

c)



Problème 8

1. a) et b)



c) Le rectangle de plus petit périmètre semble être le carré de côté 12.

2. a) On a $s = L \times l$ d'où $L = \dfrac{s}{l}$.

Donc $p = 2l + 2L = 2l + \dfrac{2s}{l}$.

b) Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée : $p'(x) = 2 - \dfrac{2s}{x^2}$.

$p'(x) = 0$ lorsque $2x^2 - 2s = 0$, c'est-à-dire, pour $x > 0$, lorsque $x = \sqrt{s}$.
c) Lorsque $x = \sqrt{s}$, le rectangle est un carré, ce qui confirme la conjecture faite en 1.c.

Problème 9

1. $V'(t) = 560t + 560$.
Pour $t = 1$, le débit est de 1 120 m^3/mois.
Pour $t = 2$, le débit est de 1 680 m^3/mois.
2. $V(t) = 630 = 280(1 + t)^2$.

Ce qui revient à résoudre l'équation $280t^2 + 560t - 350 = 0$. Soit pour $t = -2{,}5$ ou $t = 0{,}5$.
Comme $t > 0$, alors $V(t) = 630$ pour $t = 0{,}5$.
Le débit est alors de 840 m^3/mois.

Problème 10

a) $v(t) = 7{,}5t^2 + 6t$. $v(3) = 85{,}5$. Au bout de 3 secondes la bille atteint la vitesse de 85,5 cm/s.
b) On résout $v(t) = 42$. On se ramène à l'équation du second degré
$7{,}5t^2 + 6t - 42 = 0$.
$\Delta = 1\,296 > 0$; $t_1 = -2{,}8$ et $t_2 = 2$.
Le problème amène à prendre les valeurs positives de t.
Donc la bille atteint la vitesse de 42 cm/s au bout de 2 secondes.

Problème 11

a) $B(x) = -x^3 + 3x^2 + 2\,520x - 500$.
$B'(x) = -3x^2 + 6x + 2\,520$.
$\Delta = 30\,276 > 0$; $x_1 = -28$ et $x_2 = 30$.

x	0		30		
signe de $B'(x)$		+	0	−	
$B'(x)$	− 500	↗	50 800	↘	

b) L'ébénisterie doit produire et vendre 30 bureaux chaque mois pour maximiser son bénéfice.

Problème 12

1. La puissance maximale est obtenue lorsque la dérivée s'annule.
$P'(I) = U - 2rI$. $P'(I) = 0$ lorsque $U - 2rI = 0$.
Soit lorsque $I = \dfrac{U}{2r}$.

2. Le terme r de la résistance interne est au dénominateur. Il est donc préférable d'avoir la plus petite résistance interne possible.

Je teste mes connaissances

Page 33

1. A
2. B
3. B
4. A
5. C
6. C
7. B
8. B
9. A
10. B

Je m'entraîne au CCF

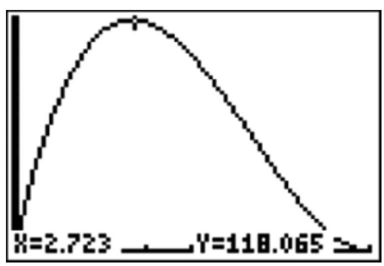
Page 34

Partie A

1. La hauteur x peut prendre les valeurs de l'intervalle $[0 ; 8]$.
2. Pour $x = 0$, $V(0) = 0$.
Pour $x = 4$, $V(4) = \dfrac{25}{16} \times (4^3 - 16 \times 4^2 + 64 \times 4)$
$= 100$.
Pour $x = 8$, $V(8) = \dfrac{25}{16} \times (8^3 - 16 \times 8^2 + 64 \times 8)$
$= 0$.
3. Non, car on ne sait pas encore à quelle hauteur le volume du réservoir est maximal.

Partie B

1.



2. Effectivement, on trouve plutôt le maximum pour x ayant une hauteur d'environ 2,7 au lieu de 4.
3. $f'(x) = \dfrac{75}{16}x^2\ 50x + 100$.
$\dfrac{75}{16}x^2\ 50x + 100 = 0$: $\Delta = 625 > 0$; $x_1 = \dfrac{8}{3}$ et $x_2 = 8$.
La hauteur x pour laquelle le volume du réservoir est maximal est $\dfrac{8}{3}$; soit environ 2,67 m.

Suites numériques

3

Activités

Page 35
À l'aide d'un tableur, on peut calculer les sommes versées chaque année pendant 20 ans avec les propositions A et B. Puis on fait le total des sommes pour les deux propositions et on compare.
Pour calculer le montant avec la proposition A, on écrit dans la cellule B3 la formule =B2*1,04.
Pour calculer le montant avec la proposition B, on écrit dans la cellule C3 la formule =C2+1025.
On recopie ensuite ces deux formules jusqu'à la ligne 21.
Voici un exemple de tableau pouvant être obtenu avec un tableur.

La proposition A permettra à Rémi de gagner davantage d'argent.

	A	B	C
1	Année	Proposition A	Proposition B
2	1	20 000	20 000
3	2	20 800	21 025
4	3	21 632	22 050
5	4	22 497,28	23 075
6	5	23 397,1712	24 100
7	6	24 333,05805	25 125
8	7	25 306,38037	26 150
9	8	26 318,63558	27 175
10	9	27 371,38101	28 200
11	10	28 466,23625	29 225
12	11	29 604,8857	30 250
13	12	30 789,08113	31 275
14	13	32 020,64437	32 300
15	14	33 301,47015	33 325
16	15	34 633,52895	34 350
17	16	36 018,87011	35 375
18	17	37 459,62491	36 400
19	18	38 958,00991	37 425
20	19	40 516,33031	38 450
21	20	42 136,98352	39 475
22	TOTAL	595 562	594 750

Est-ce que je sais ?

1.

Suite numérique	Arithmétique	Géométrique	Ni arithmétique, ni géométrique
10 ; 15 ; 22,5 ; 33,75 ; 50,625		X	
396 ; 306 ; 216 ; 126 ; 36	X		
– 12 ; – 5 ; 2 ; 9 ; 16	X		
20 ; 10 ; 2 ; 1 ; 0,2			X
1 ; $\sqrt{2}$; 2 ; $2\sqrt{2}$; 4		X	

2. a) – 44 ; – 33 ; – 22 ; – 11 ; 0 $r = 11$
24 ; 20,4 ; 16,8 ; 13,2 ; 9,6 $r = -3,6$
b) 1 ; 0,6 ; 0, 36 ; 0,216 $q = 0,6$
0,5 ; 3 ; 18 ; 108 ; 648 $q = 6$

Activité 1

1. Malika gagne 30 points supplémentaires chaque mois.

2. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 30 puisque
$r = u_1 - u_0 = 80 - 50 = 30$.

3.

$u_0 = 50$		
$u_1 = 80$	$+ r$	$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = 110$	$+ 2r$	$u_2 = u_0 + 2r$
$u_3 = 140$	$+ 3r$	$u_3 = u_0 + 3r$
$u_4 = 170$	$+ 4r$	$u_4 = u_0 + 4r$
$u_5 = 200$	$+ 5r$	$u_5 = u_0 + 5r$
$u_6 = 230$	$+ 6r$	$u_6 = u_0 + 6r$
$\vdots$		$\vdots$
u_n	$+ nr$	$\boxed{u_n = u_0 + nr}$

4. $u_{24} = u_0 + 24\,r$,
soit $u_{24} = 50 + 24 \times 30 = 770$.
Malika pourra donc acquérir 770 points si son abonnement dure 24 mois.

5. Ce nombre de points n'est pas suffisant pour recevoir gratuitement le portable offert pour 1 000 points de fidélité.

6. Si l'abonnement rapportait 40 points à Malika, on va considérer que les nombres de points acquis chaque mois forment une suite arithmétique de raison 40 et de premier terme $u_0 = 50$.
Pour trouver, avec cet abonnement, le nombre de mois au bout duquel elle pourra recevoir le portable de 1 000 points, il faut résoudre l'équation :
$1\,000 = 50 + n \times 40$.
On trouve $n = 23,75$.
Malika devra donc attendre 24 mois avec cet abonnement pour obtenir les 1 000 points nécessaires pour obtenir le portable gratuitement.

Activité 2

1. Si le nombre d'adhérents suit le principe de l'association, il y aura 8 adhérents la deuxième année et 16 adhérents la troisième.

2. La suite (v_n) est géométrique, sa raison est $q = 2$, le deuxième terme est $v_2 = 8$ et le troisième terme $v_3 = 16$.

3. $v_n = v_1 \times q^{n-1}$.

4. La sixième année, le nombre d'adhérents sera 128 car :
$v_4 = 32$; $v_5 = 64$; $v_6 = 128$.

L'association ne pourra pas organiser le gala la sixième année car l'objectif de 200 adhérents ne sera pas atteint.
On vérifie avec la formule établie à la question 3.
$v_6 = 4 \times 2^5 = 128$; on retrouve bien 128 adhérents.

J'utilise un logiciel

Pages 41 et 42

Comparer des formules

a) et b) Voir le tableau ci-dessous.
c) Il faut écrire en C3 la formule =$B$3+A3*300.
Le symbole $ permet de fixer la cellule B3 comme cellule de référence (sa valeur ne sera pas modifiée lors de la recopie).
Les résultats des colonnes B et C sont identiques.
d) Il faut écrire en E3 la formule =$D$3*1,03^A3.
Les résultats des colonnes D et E sont identiques.
Les formules écrites dans les cellules C3 et E3 permettent d'obtenir directement, à partir de la valeur de *n*, la production le *n*-ième mois.

	A	B	C	D	E
1		Plan 1		Plan 2	
2	rang n	Pn calculé mois après mois	Pn calculé directement	P'n calculé mois après mois	P'n calculé directement
3	0	6500	6500	6500,00	6500,00
4	1	6800	6800	6695,00	6695,00
5	2	7100	7100	6895,85	6895,85
6	3	7400	7400	7102,73	7102,73
7	4	7700	7700	7315,81	7315,81
8	5	8000	8000	7535,28	7535,28
9	6	8300	8300	7761,34	7761,34
10	7	8600	8600	7994,18	7994,18
11	8	8900	8900	8234,01	8234,01
12	9	9200	9200	8481,03	8481,03
13	10	9500	9500	8735,46	8735,46
14	11	9800	9800	8997,52	8997,52
15	12	10100	10100	9267,45	9267,45
16	13	10400	10400	9545,47	9545,47
17	14	10700	10700	9831,83	9831,83
18	15	11000	11000	10126,79	10126,79
19	16	11300	11300	10430,59	10430,59
20	17	11600	11600	10743,51	10743,51
21	18	11900	11900	11065,81	11065,81
22	19	12200	12200	11397,79	11397,79
23	20	12500	12500	11739,72	11739,72

e) L'objectif de 10 000 pièces par jour est atteint le 12^e jour avec le plan 1 et le 15^e jour avec le plan 2. L'entreprise aura intérêt à choisir le plan 1 qui permettra d'atteindre l'objectif plus rapidement.

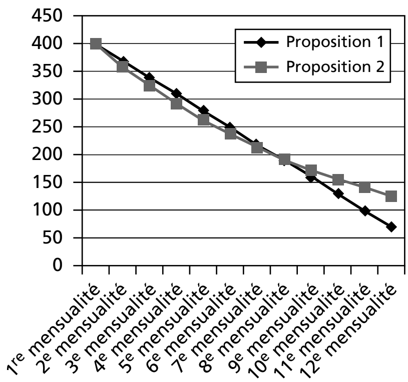
Comparer deux suites avec le tableur

1. Dans la cellule B3, il faut écrire la formule =B2–30 pour obtenir les mensualités de la proposition 1.
Dans la cellule C3, il faut écrire la formule =C2*0,9 pour obtenir les mensualités de la proposition 2.

	A	B	C
1		Proposition 1	Proposition 2
2	1ère mensualité	400	400,00
3	2ème mensualité	370	360,00
4	3ème mensualité	340	324,00
5	4ème mensualité	310	291,60
6	5ème mensualité	280	262,44
7	6ème mensualité	250	236,20
8	7ème mensualité	220	212,58
9	8ème mensualité	190	191,32
10	9ème mensualité	160	172,19
11	10ème mensualité	130	154,97
12	11ème mensualité	100	139,47
13	12ème mensualité	70	125,52
14	TOTAL	2820	2870,28

La suite de nombres formée par les mensualités de la proposition 1 est une suite arithmétique de raison $r = -30$.
La suite de nombres formée par les mensualités de la proposition 2 est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$.

2. Les premiers mois, les mensualités diminuent plus vite avec la proposition 2 qu'avec la proposition 1. À partir du 8^e mois, c'est l'inverse : les mensualités de la proposition 1 diminueront plus rapidement.



3. En comparant le coût total des deux crédits (voir le tableau), on constate que la proposition 1 est plus avantageuse car il faudra rembourser moins.

Exercices et problèmes

Pages 43 à 46

Exercices

Déterminer la nature d'une suite et sa raison

1. a) C'est une suite arithmétique de raison $r = 1,1$.
b) Le sixième terme est 15,6.
c) $u_n = 10,1 + (n - 1) \times 1,1$.
2. a) Cette suite est géométrique car les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sont égaux.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{16}{64} = 0,25$; $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{16} = 0,25$;

$\frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{u_4}{u_3} = \frac{0,25}{1} = 0,25$.

b) La raison est 0,25.

c) $u_n = 64 \times 0,25^n$.

d) Le 10e terme de la suite est u_9.
$u_9 = 64 \times 0,25^9 \approx 2,44.\ 10^{-4}$.
3. Par lecture graphique, on trouve
$u_1 = -0,5$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3,5$, $u_4 = 7$ et $u_5 = 11,5$
$u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$; la suite n'est pas arithmétique.
$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$; la suite n'est pas géométrique.
La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
4. a) La suite est arithmétique ;
$u_1 = 0,75$; $r = 2$.
b) La suite est géométrique ;
$u_1 = 0,1$; $q = 10$.
c) La suite est arithmétique ;
$u_1 = -7,7$; $r = 0,3$.
d) La suite est arithmétique ;
$u_1 = 1,75$; $r = -3$.
e) La suite est géométrique ;
$u_1 = -12$; $q = 2,3$.
5. Suite n° 1 :
$u_1 = 100$; $r = -10$; $u_n = 100 - 10(n - 1)$.
Suite n° 2 :
$u_1 = -15$; $r = 20$; $u_n = -15 + 20(n - 1)$.

Calculer les termes d'une suite

6. a) Calculer le 3e terme d'une suite (u_n) de premier terme u_1 revient à calculer u_3.
b) Calculer le 5e terme d'une suite (u_n) de premier terme u_0 revient à calculer u_4.
7. u_{62} est le 63e terme de la suite (u_n).
$u_{62} = 13 + 62 \times (-1,4) = -73,8$.
8. v_{20} est le 20e terme de la suite (v_n).
$v_{20} = 0,000\ 15 \times 4^{19}$.
$v_{20} \approx 41\ 231\ 686,04$.
9. a) Cette suite est géométrique.
b) $q = 2,1$ et $u_1 = 0,7$.
c) $u_{21} = 0,7 \times 2,1^{20}$.
$u_{21} \approx 1\ 947\ 529$.
10. a) Cette suite est arithmétique.
b) $r = 4$ et $v_0 = -1$.
c) $v_{1000} = 4 \times 1\ 000 - 1 = 3\ 999$.

Problèmes

Problème 1

1. Il s'agit d'une suite géométrique car on passe d'un terme au terme suivant en multipliant par un même nombre. La raison de la suite (l_n) est $\frac{\sqrt{43}}{8}$.

2. La longueur du dixième côté est l_{10}. Avec le tableur, on trouve $l_{10} \approx 1{,}33$.
3. Avec la formule, on trouve :

$l_{10} = 8 \times (\frac{\sqrt{43}}{8})^9 \approx 1{,}33$.

	A	B
1	rang	l_n
2	1	8
3	2	6,55744
4	3	5,37500
5	4	4,40578
6	5	3,61133
7	6	2,96013
8	7	2,42636
9	8	1,98884
10	9	1,63021
11	10	1,33625

Problème 2

1. $u_1 = 51\,625$ et $u_2 = 53\,302{,}8125$.
2. La suite (u_n) est géométrique.
3. La raison de la suite est 1,0325.
4. $u_{10} = 50\,000 \times 1{,}0325^{10}$.
$u_{10} \approx 68\,844{,}72$.
La valeur acquise, au bout de 10 ans, en plaçant le capital sur ce compte, est 68 844,72 euros.

Problème 3

La mise de départ de 0,15 € double à chaque partie, on peut donc considérer une suite géométrique de premier terme 0,15 et de raison 2. Avec un tableur, on obtient le tableau suivant :

	A	B
1	Partie	Mise en euros
2	1	0,15
3	2	0,3
4	3	0,6
5	4	1,2
6	5	2,4
7	6	4,8
8	7	9,6
9	8	19,2
10	9	38,4

Les joueurs peuvent jouer 8 parties de cartes sans dépasser la mise limite de 20 euros.

Problème 4

1. Ouvrir le fichier « **03_podovan corrige.xls** ».
Dans la cellule C5, il faut écrire la formule =C3+C2, puis par recopie on obtient les 200 premiers termes de la suite de Podovan.
2. Avec le tableur, on fait des essais, on peut calculer par exemple la différence $u_n - u_{n-1}$, le rapport u_n/u_{n-1},…
On constate au bout d'un certain rang (53e terme) que les rapports u_n/u_{n-1} sont constants et valent environ 1,324717957.
On peut donc en déduire que pour $n \geq 53$,
$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1{,}324717957$.
3. Sur Internet, on trouve que le nombre plastique a pour symbole Ψ et que sa valeur est :

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}$$

$\approx$ 1,3247179572447460259609088544.

Ce nombre correspond au rapport trouvé précédemment. Le rapport entre deux termes consécutifs de la suite de Podovan (pour n grand) est égal au nombre plastique.

Problème 5

1. La distance d'arrêt d'un véhicule est égale à la somme de la distance de freinage et de la distance de réaction.
• Pour un temps de réaction de 0,1 s, sur route mouillée et à vitesse de 83,5 km/h, la distance d'arrêt sera :
$50 + 2{,}3 = 52{,}3$, soit $D_1 = 52{,}3$ m.
• Pour un temps de réaction de 0,2 s :
$50 + 2{,}3 \times 2 = 54{,}6$, soit $D_2 = 54{,}6$ m.
• Pour un temps de réaction de 0,3 s :
$50 + 2{,}3 \times 3 = 56{,}9$, soit $D_3 = 56{,}9$ m.

2. La suite étant arithmétique, la raison est 2,3.
$D_2 - D_1 = 54,6 - 52,3 = 2,3$.
3. $D_n = D_1 + (n - 1) \times 2,3$;
donc $D_n = 52,3 + (n - 1) \times 2,3$.
4. $D_{10} = 52,3 + 9 \times 2,3 = 73$.
La distance d'arrêt pour un temps de réaction d'une seconde est donc 73 m.
5. Pour trouver le temps de réaction correspondant à une distance d'arrêt de 200 m, on résout l'équation :
$200 = 52,3 + (n - 1) \times 2,3$.
On trouve $n \approx 65, 22$.
On en déduit qu'il ne faut pas dépasser un temps de réaction de 6,5 s si on veut s'arrêter en moins de 200 m.

Problème 6

1. $u_2 = 19,4$; $u_3 = 18,818$;
$u_4 = 18,25346$.
2. La suite (u_n) est géométrique car les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sont égaux.
$\frac{u_2}{u_1} = \frac{19,4}{20} = 0,97$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{18,818}{19,4} = 0,97$;
$\frac{u_4}{u_3} = \frac{18,25346}{18,818} = 0,97$.
La raison est 0,97.
3. $u_n = 20 \times 0,97^{n-1}$.
$u_{18} = 20 \times 0,97^{17} \approx 11,917$.
4. $Q = 20 \times \frac{1 - 0,97^{18}}{1 - 0,97} \approx 281,37$.
La quantité totale Q de terre extraite pendant les 18 jours de chantier est d'environ 281 m^3.

Problème 7

1. La raison de la suite (u_n) est -7 car
$u_2 - u_1 = 143 - 150 = -7$.
$u_3 = 143 + (-7) = 136$.
$u_4 = 136 + (-7) = 129$.
2. Le nombre d'ardoises sur la 20^e rangée correspond à u_{20}.
$u_{20} = 150 + 19 \times (-7) = 17$.
3. Le nombre total d'ardoises nécessaires à la réalisation du toit se calcule avec la formule :
$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
soit $S_{20} = \frac{20}{2}(150 + 17) = 1\,670$.
Il faudra 1 670 ardoises pour réaliser le toit.

Problème 8

1. La production du deuxième mois va augmenter de 5 % par rapport au mois précédent, donc :
$4\,000 \times 5 \div 100 = 200$,
c'est-à-dire 200 polaires supplémentaires.
Le deuxième mois, la production sera de 4 200 polaires. En procédant de même, on trouve que la production sera de 4 410 polaires le troisième mois.
On en déduit $u_2 = 4\,200$ et $u_3 = 4\,410$.
2. $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4\,200}{4\,000} = 1,05$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{4\,410}{4\,200} = 1,05$.
u_1, u_2 et u_3 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,05.
3.

	A	B	C
1	Mois	n	u_n
2	janvier	1	4000
3	février	2	4200
4	mars	3	4410
5	avril	4	4630,5
6	mai	5	4862,025
7	juin	6	5105,12625
8	juillet	7	5360,38256
9	août	8	5628,40169
10	septembre	9	5909,82178
11	octobre	10	6205,31286
12	novembre	11	6515,57851
13	décembre	12	6841,35743
14		TOTAL	63668,5061

4. La production totale sur l'année 2011 sera d'environ 63 669 vestes polaires.
Pour les fabriquer, il faudra recycler 1 719 063 bouteilles en plastique.
$63\,669 \times 27 = 1\,719\,063$.
5. $u_{36} = 4\,000 \times 1,05^{35} \approx 22\,064$.
L'objectif de 22 000 vestes polaires fabriquées mensuellement sera donc bien atteint en moins de 3 ans puisque la production prévue le 36^e mois est de 22 064 vestes.

Problème 9

1. La formule à écrire dans la cellule B3 est =B2+3,25.

2. La formule à écrire dans la cellule E3 est =E2*1,02.

3. Voir le tableau ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	Année	Entreprise CHAUFECO versements annuels	Entreprise CHAUFECO Cumul des versements		Entreprise CHAUFMAX versements annuels	Entreprise CHAUFMAX Cumul des versements
2	2011	150,00 €	150,00 €		150	150,00 €
3	2012	153,25 €	303,25 €		153,00 €	303,00 €
4	2013	156,50 €	459,75 €		156,06 €	459,06 €
5	2014	159,75 €	619,50 €		159,18 €	618,24 €
6	2015	163,00 €	782,50 €		162,36 €	780,61 €
7	2016	166,25 €	948,75 €		165,61 €	946,22 €
8	2017	169,50 €	1 118,25 €		168,92 €	1 115,14 €
9	2018	172,75 €	1 291,00 €		172,30 €	1 287,45 €
10	2019	176,00 €	1 467,00 €		175,75 €	1 463,19 €
11	2020	179,25 €	1 646,25 €		179,26 €	1 642,46 €

4. Les montants inscrits dans les cellules C11 et F11 correspondent au total des versements obtenus pour chaque contrat.

5. Le contrat le plus intéressant financièrement pour Monsieur Eliot est le contrat CHAUFMAX (même si l'écart entre les deux contrats n'est pas très important).

Je teste mes connaissances

Page 47

1. A
2. B
3. B
4. B
5. C
6. A
7. B
8. C
9. A
10. B

Je m'entraîne au CCF

Page 48

Partie A

1. $\dfrac{N_1}{N_0} = \dfrac{4800}{5000} = 0{,}96$;

$\dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{4608}{4800} = 0{,}96$;

$\dfrac{N_3}{N_2} = \dfrac{4423{,}68}{4608} = 0{,}96.$

Les rapports $\dfrac{N_n}{N_{n-1}}$ étant égaux, la suite (N_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

2. $N_n = N_0 \times q^n$, soit : $N_n = 5\,000 \times 0{,}96^n$.

3. Au 8^e essai :

$N_8 = 5\,000 \times 0{,}96^8 \approx 3\,606{,}9479.$

4. Voici ci-dessous un extrait du tableau obtenu avec un tableur.

Ce treuil pourra donc soulever 8 000 N sans tomber en dessous de 50 % de la fréquence de rotation à vide, c'est-à-dire sans être en dessous de 2 500 tr/min.

5. On constate que pour des charges de 15 000 N, la fréquence de rotation descend plus bas que 1 500 tr/min, ce qui est inférieur au 40 % de la valeur à vide (soit 2 000 tr/min). Les essais ne sont donc pas concluants.

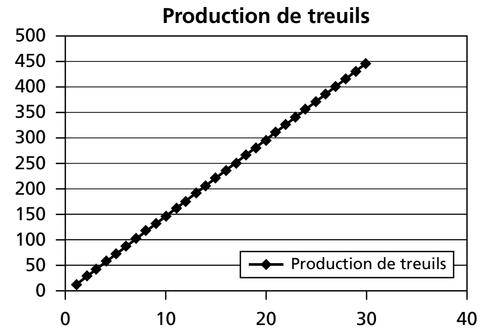
Essai n°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Charge F en newtons	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
Fréquence de rotation N du moteur en tr/min	5 000	4800	4608	4423,68	4246,7328	4076,86349	3913,78895	3757,23739	3606,94789	3462,66998	3324,16318

Essai n°	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Charge F en newtons	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500
Fréquence de rotation N du moteur en tr/min	3191,19665	3063,54879	2941,00684	2823,36656	2710,4319	2602,01462	2497,93404	2398,01668	2302,09601	2210,01217	2121,61168

Essai n°	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Charge F en newtons	11000	11500	12000	12500	13000	13500	14000	14500	15000
Fréquence de rotation N du moteur en tr/min	2036,74722	1955,27733	1877,06623	1801,98358	1729,90424	1660,70807	1594,27975	1530,50856	1469,28822

Partie B

1.



2. L'objectif de 1 000 pièces fabriquées le 30^{e} jour ne sera pas atteint : cela se constate sur le graphique, et par calcul on trouve $P_{30} = 445$.

Géométrie dans l'espace

4

Activités

Page 49

– La nouvelle pyramide obtenue après découpe par un plan parallèle à la base sera également une pyramide à base carrée.

– Le volume initial de la pyramide étant réduit de 25 %, la masse qui est proportionnelle au volume sera également réduite de 25 %. La masse de la nouvelle pyramide sera 450 g car :

$600 \times 0{,}25 = 150$,

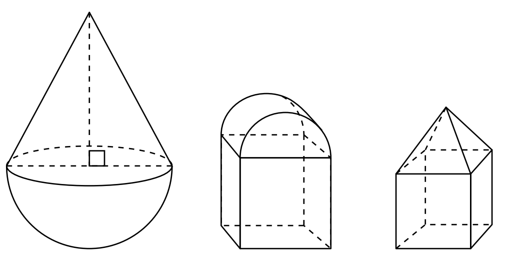
soit une réduction de 150 g,

$600 - 150 = 450$.

Le cahier des charges sera respecté pour cette nouvelle pyramide puisque sa masse est bien comprise entre 300 g et 500 g.

Est-ce que je sais ?

1.



Une demi-sphère et un cône — Un demi-cylindre et un parallélépipède — Une pyramide et un parallélépipède

2. a) *ELCD* est un plan parallèle au plan *FKHG*.

b) *JIHK* est un plan perpendiculaire au plan *ABIJ*.

c) La droite (*IJ*) est parallèle au plan *EKHD*.

d) La droite (*DC*) est perpendiculaire au plan *DEFG*.

Activité 1

1. La toupie est constituée d'une demi-sphère, de cylindres et de troncs de cônes.

2. Coupe a – position 2.

Coupe b – position 3.

Coupe c – position 4.

Coupe d – position 1.

3. Sur la vue de profil, on peut identifier des rectangles, des trapèzes et un demi-disque.

Activité 2

1. $B(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$; $C(0\ ;\ 4\ ;\ 1)$; $D(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$; $E(0\ ;\ 4\ ;\ 0)$; $F(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $G(3\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

2. a) $\overrightarrow{BO}\ (0\ ;\ 0\ ;\ -1)$; $\overrightarrow{CE}\ (0\ ;\ 0\ ;\ -1)$; $\overrightarrow{DF}\ (0\ ;\ 0\ ;\ -1)$; $\overrightarrow{AG}\ (0\ ;\ 0\ ;\ -1)$. Ces vecteurs ont des coordonnées identiques, ils sont égaux.

b) $\overrightarrow{CD}\ (1-0\ ;\ 1-4\ ;\ 1-1)$ d'où $\overrightarrow{CD}\ (1\ ;\ -3\ ;\ 0)$, ce qui correspond aux données de l'énoncé.

c) De même, on obtient :

$\overrightarrow{AB}\ (-3\ ;\ 0\ ;\ 0)$; $\overrightarrow{BC}\ (0\ ;\ 4\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{DA}\ (2\ ;\ -1\ ;\ 0)$.

3. a) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9}$,

d'où $AB = 3$.

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{16}$, d'où $BC = 4$.

$\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$,

d'où $DA \approx 2{,}24$.

b) La distance parcourue par l'outil de coupe lorsqu'il tourne une fois autour de la pièce est d'environ 12,4 :
$AB + BC + CD + DA = 3 + 4 + \sqrt{10} + \sqrt{5} \approx 12{,}4.$

J'utilise un logiciel

Pages 55 et 56

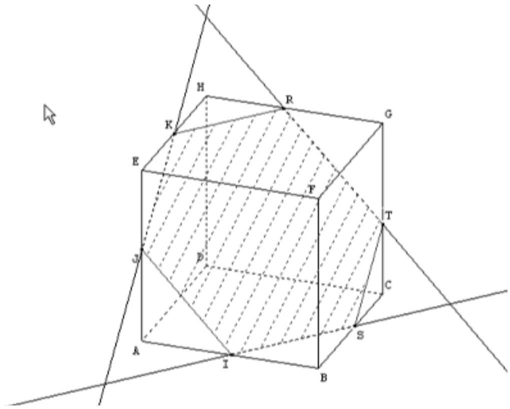
Étudier la section d'un cube par des plans particuliers

1. a) Le plan (*MPO*) est parallèle aux faces *HGFE* et *DCBA*.
La section du cube par le plan (*MPO*) est un carré.
Le plan (*QRT*) est parallèle aux faces *EHDA* et *FGCB*.
La section du cube par le plan (*QRT*) est un carré.
Conjecture : la section d'un cube par un plan parallèle à une face est un carré.
b) Le segment [*IJ*]est parallèle aux arêtes [*EH*], [*FG*], [*AD*] et [*BC*].
La section du plan (*IJK*) avec le cube est un rectangle.
La section peut aussi avoir la forme d'un trapèze, d'un pentagone, etc.

c)

Nombres de faces coupées	3 faces	4 faces	5 faces	6 faces
Nature de la section	triangle	quadrilatère (carré, rectangle, trapèze)	pentagone	hexagone

2. a) Les côtés opposés de l'hexagone semblent parallèles.
b) À l'aide des fonctionnalités du logiciel, on peut tracer la parallèle à un côté passant par un des sommets du côté opposé et on vérifie que les droites soient confondues. C'est le cas de la configuration suivante :



c) Ouvrir le fichier « **04_cube4_corrige.g3w** ». Les parallèles à trois côtés ont été tracées, elles sont confondues avec les côtés opposés qui sont donc bien parallèles. Lorsque l'on déplace le point I, on constate que les côtés opposés restent parallèles.

Opérations sur des vecteurs de l'espace

1. a) Les vecteurs $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont égaux au vecteur $\overrightarrow{FB}$.

b) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

2. a) $C(0 ; 4 ; 0)$; $D(0 ; 0 ; 0)$ et $G(0 ; 4 ; 4)$.

b) $\overrightarrow{AB}$ (0 ; 4 ; 0) ; $\overrightarrow{AC}$ (– 4 ; 4 ; 0) ;
$\overrightarrow{AD}$ (– 4 ; 0 ; 0) ; $\overrightarrow{CG}$ (0 ; 0 ; 4) et
$\overrightarrow{AG}$ (– 4 ; 4 ; 4).

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (– 4 ; 4 ; 0). Ce sont les mêmes coordonnées que le vecteur $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$ (– 4 ; 4 ; 4). Ce sont les mêmes coordonnées que le vecteur $\overrightarrow{AG}$.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.

d) $M(2 ; 2 ; 2)$.
$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG}$; $2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BH}$.

Exercices et problèmes

Pages 57 à 60

Exercices

Identifier des solides usuels, représenter la section d'un solide usuel par un plan

1. Dans la première lanterne, on peut identifier des sphères, cylindres, parallélépipèdes rectangles et un tronc de cône. Dans la deuxième lanterne, on reconnaît des cylindres, troncs de cônes, parallélépipèdes rectangles et une sphère.

2. a) Dé à 4 faces : tétraèdre régulier.
Dé à 8 faces : octaèdre régulier.
Dé à 10 faces : décaèdre régulier.
Dé à 12 faces : dodécaèdre régulier.

b) Pour le dé à 4 faces :
– sur une des faces du cube, dessiner un triangle équilatéral qui définit trois des sommets du dé et la longueur de la base,
– découper la résine autour du triangle, de façon à obtenir un prisme de la hauteur du dé,
– calculer la hauteur et la position du quatrième sommet,
– couper le prisme parallèlement à la base triangulaire et, à la hauteur du quatrième sommet, dessiner la position du sommet sur cette section,
– découper des pyramides dans le prisme selon un plan passant par le sommet et une des arêtes opposées,
– adoucir les angles pour que le dé roule facilement.

Pour le dé à 8 faces :
– sur une des faces du cube, tracer les diagonales : leur point d'intersection sera le premier sommet du dé,
– déterminer la longueur du côté des triangles équilatéraux qui vont constituer le dé, en déduire la hauteur de celui-ci, rogner le dé en résine en conséquence,
– découper des pyramides dans le prisme selon un plan passant par le sommet et une arête située au milieu de la face adjacente au sommet,
– adoucir les angles pour que le dé roule facilement.

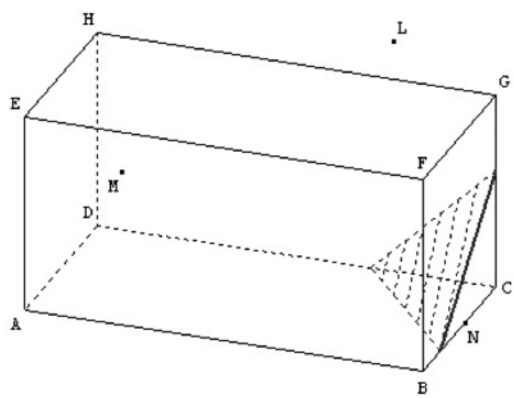
Pour les dés à 10 et 12 faces, il faut utiliser des méthodes de découpage similaires. Les élèves peuvent également réfléchir en utilisant de la pâte à modeler ou de l'argile afin de procéder à des essais de découpages.

3. a) Ouvrir le fichier « **04_beurre_corrige.g3w** ». Déplacer les points L, M et N afin de visualiser différents plans de coupe.

b) On peut obtenir des parallélépipèdes rectangles, des prismes et des pyramides.

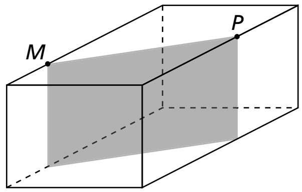
c) Les sections de coupe peuvent être des triangles, rectangles, trapèzes, pentagones…

d) La section obtenue est un triangle.

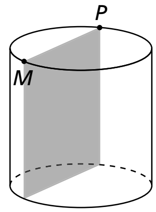


4. (a) : triangle.
(b) : triangle équilatéral, car [*BE*], [*ED*] et [*BD*] étant des diagonales des faces du cube, elles ont la même longueur.
(c) : hexagone.

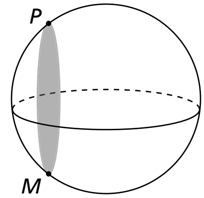
5. a) et b) La section est :



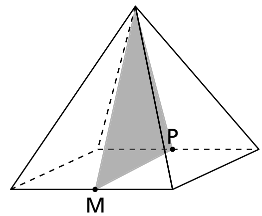
un rectangle



un rectangle



un disque



un triangle

Calculer les coordonnées et la norme d'un vecteur

6. a) $\overrightarrow{AB}$ (2 ; – 1,5 ; – 3).

$\overrightarrow{AC}$ (3 ; – 8,5 ; 1).

$\overrightarrow{BC}$ (1 ; – 7 ; 4).

b) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2^2 + (-1,5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{15,25}$.

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{3^2 + (-8,5)^2 + 1^2} = \sqrt{82,25}$.

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{66}$.

c) Pour savoir si le triangle ABC est rectangle, il faut regarder si la relation de Pythagore est vérifiée : $AC^2 = 82,25$.
$AB^2 + BC^2 = 66 + 15,25 = 81,25$.
Le triangle ABC n'est donc pas rectangle.
d) $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

D'où $\begin{cases} x_c - x_D = 2 \\ y_c - y_D = -1,5 \\ z_c - z_D = -3 \end{cases}$. On en déduit

$D(0 ; – 3,5 ; 5)$.

7. a) $\overrightarrow{MN}$ (– 3 ; 4 ; 0) ; $\overrightarrow{PQ}$ (– 3 ; 4 ; 0) ; $\overrightarrow{MP}$(0 ; 4 ; –3) et $\overrightarrow{NQ}$ (0 ; 4 ; – 3).

$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$.

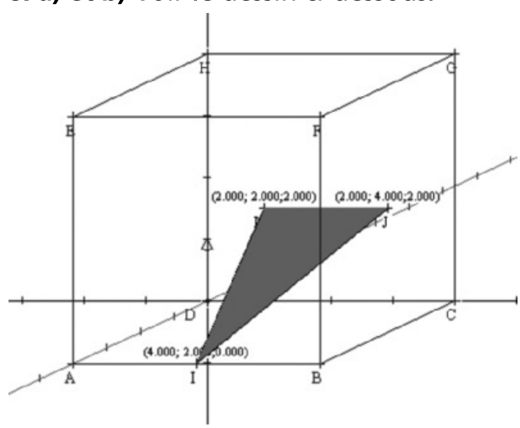
$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$.

$\left\|\overrightarrow{MP}\right\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

$\left\|\overrightarrow{NQ}\right\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

b) Les droites (MN) et (PQ) sont parallèles puisque les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont égaux.
c) Le quadrilatère $MNPQ$ est un losange puisque les côtés sont parallèles deux à deux ($\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$) et les quatre côtés ont pour longueur 5.

8. a) et b) Voir le dessin ci-dessous.



c) $I(4 ; 2 ; 0)$ et $J(2 ; 4 ; 2)$.

d) $\overrightarrow{IJ}$ (– 2 ; 2 ; 2) ; $\overrightarrow{MI}$ (2 ; 0 ; –2) ; $\overrightarrow{MJ}$ (0 ; 2 ; 0).

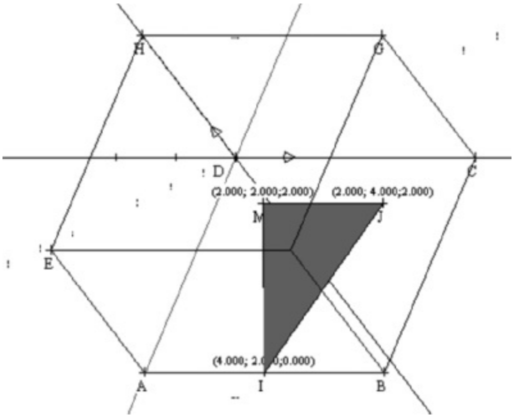
$\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$.

$\left\|\overrightarrow{MI}\right\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.

$\left\|\overrightarrow{MJ}\right\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$.

e) Si le triangle MIJ est rectangle, alors la relation de Pythagore sera vérifiée :
$IJ^2 = (\sqrt{12})^2 = 12$.
$MI^2 + MJ^2 = (\sqrt{8})^2 + 2^2 = 12$.
La relation de Pythagore est vérifiée ; le triangle MIJ est donc rectangle en M.

f) On peut vérifier à l'aide du logiciel. On obtient la vue suivante :



9. a) $\vec{p} + \vec{p'}$ (2,1 ; – 1,4 ; 3,5).

b) $2\vec{p}$ (10,2 ; – 6,8 ; 17).

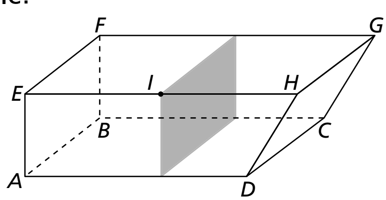
$-3\vec{p'}$ (9 ; – 6 ; 15).

c) $\vec{p} = -1{,}7\vec{p'}$. Les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{p'}$ sont donc colinéaires ; $k = -1{,}7$.

Étudier des figures planes et des volumes

10. a) Les faces *EHDA* et *FGCB* sont des trapèzes, toutes les autres faces sont des rectangles.

b) et c) La section obtenue lorsque l'on coupe le prisme par un plan parallèle à la face *AEFB* et passant par *I* est un rectangle.



d) En l'absence de données, soit on propose des mesures, soit on mesure sur le livre, soit on utilise les dimensions du dessin reproduit (mais, dans ces deux derniers cas, la mesure de *DC* ne sera pas correcte).
Pour calculer le volume, on calcule d'abord l'aire du trapèze *EHDA* puis on multiplie cette aire par la largeur du prisme, soit la distance *DC*.

Mesures proposées : $EH = 3{,}6$ cm ; $EA = 1{,}1$ cm ; $AD = 2{,}9$ cm et $DC = 1{,}25$ cm.
$V = (3{,}6 + 2{,}9) \times 1{,}1 \div 2 \times 1{,}25 \approx 4{,}47$, soit environ 4,47 cm^3.

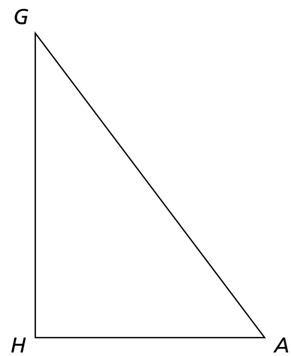
11. a) On applique successivement la relation de Pythagore dans les triangles rectangles *ABC*, *AGC* et *ADH*.

$AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

$AG = \sqrt{(\sqrt{20})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5$.

$AH = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3$.

b)



c) Le triangle *AHG* est un triangle rectangle car :
$AH^2 + HG^2 = AG^2$
$3^2 + 4^2 = 5^2$.
La relation de Pythagore est vérifiée, d'où le nom de « triangle de Pythagore ».

12. a) *A'B'C'D'* est un carré.

b) $A'B' = \dfrac{1}{3} \times 21 = 7$ cm.

$SH' = \dfrac{1}{3} \times 31{,}2 = 10{,}4$ cm.

c) $\mathcal{A} = 21^2 = 441$ cm^2.
$\mathcal{A}' = 7^2 = 49$ cm^2.

On a $\mathcal{A}' = \dfrac{1}{9}\mathcal{A}$.

d) $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 441 \times 31{,}2 = 4\,586{,}4$ cm^3.

$\mathcal{V}' = \dfrac{1}{3} \times 49 \times 10{,}4 \approx 169{,}87$ cm^3.

On a $\mathcal{V}' = \dfrac{1}{27}\mathcal{V}$.

Problèmes

Problème 1

1. Le pentagone *ABCDE* peut être décomposé en un trapèze et un rectangle.

$\frac{(B+b)h}{2}+L\times l=\frac{(2+1)\times 20}{2}+30\times 20=90.$

L'aire du pentagone est 90 m².

2. Pour obtenir le volume du bassin, on multiplie l'aire du pentagone trouvée précédemment par la largeur du bassin, soit 20 m.

$90\times 20=1\ 800.$

Le volume du bassin est 1 800 m$^{3.}$

3. a) $\tan\alpha=\frac{1}{20}=0{,}05.$ On en déduit $\alpha=2{,}86°$ soit $\alpha=3°$.

b) Le bassin est conforme à la réglementation puisque la pente est inférieure à 4°.

Problème 2

1. $\overrightarrow{OA}$ (25 ; 0 ; 0) ; $\overrightarrow{AF}$ (0 ; 0 ; – 25) ;
$\overrightarrow{OD}$ (0 ; 25 ; 0) ; $\overrightarrow{HG}$ (0 ; 0 ; – 8).

2. En observant les coordonnées des points *A*, *J* et *D*, on constate que *AODJ* est un carré dont le côté mesure 25. Lorsque l'outil de coupe suit le contour de ce carré, il parcourt 25×4, soit une distance de 100.

Problème 3

1. *B*(0 ; 195 ; 18) ; *D*(315 ; 220 ; 18) ;
F(340 ; 140 ; 18) ; *H*(437 ; 125 ; 18) ;
J(355 ; 85 ; 18) ; *L*(340 ; 25 ; 18) ;
N(25 ; 0 ; 18).

2. a) $\overrightarrow{AB}$ (0 ; 170 ; 0) ; $\overrightarrow{CD}$ (290 ; 0 ; 0) ;
$\overrightarrow{EF}$ (0 ; –55 ; 0).
$\overrightarrow{GH}$ (82 ; 0 ; 0) ; $\overrightarrow{IJ}$ (– 82 ; 0 ; 0) ;
$\overrightarrow{MN}$ (– 290 ; 0 ; 0).

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires ; $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

b) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{0^2+170^2+0^2}=\sqrt{170^2}=170,$

d'où $AB=170$.

De même, on trouve $CD=290$, $EF=55$, $GH=82$, $IJ=82$ et $MN=290$. Ces distances peuvent être vérifiées sur le plan.

Je teste mes connaissances

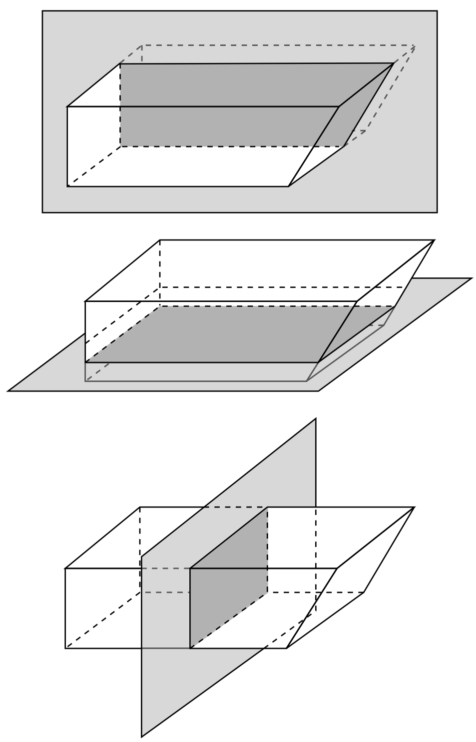
Page 61

1. C	6. C
2. B	7. A
3. B	8. B
4. C	9. A
5. B	10. C

Je m'entraîne au CCF

Exercice 1

1.



2. Dans le premier cas, la section est un trapèze ; dans les deux autres cas, c'est un rectangle.

3. Pour calculer le volume initial du prisme, on détermine l'aire de la face trapézoïdale puis on multiplie par la largeur du prisme.

$V = (4{,}3 + 3{,}5) \times 1{,}5 \div 2 \times 2{,}1 = 12{,}285$ soit $12{,}285\ \text{cm}^3$.

4. Une solution possible :

On considère que le plan de coupe sera parallèle à la face trapézoïdale *EHDA*. Le volume du prisme formé aura pour volume : $V = A \times h'$ où A est l'aire du trapèze *EHDA* et h' la distance séparant le point A de la position du plan.

$A = (4{,}3 + 3{,}5) \times 1{,}5 \div 2 = 5{,}85$, soit

$A = 5{,}85\ \text{cm}^2$.

Si on réduit le volume initial de $12{,}285\ \text{cm}^3$ de 15 %, le volume recherché est approximativement $10{,}442\ \text{cm}^3$. La recherche de la valeur de h' correspondant peut se faire par calcul, à l'aide de la calculatrice, d'un tableur ou d'un logiciel de géométrie 3D.

On trouvera $h' \approx 1{,}785$ cm. Le plan de coupe parallèle à la face *EHDA* doit donc se situer à une distance de 1,785 cm du point A pour que le volume du prisme soit réduit de 15 %.

Exercice 2

1. $A(1{,}5\ ;\ 0\ ;\ 2{,}1)$; $D(1{,}5\ ;\ 3{,}5\ ;\ 2{,}1)$; $H(0\ ;\ 4{,}3\ ;\ 2{,}1)$.

2. $\overrightarrow{AD}\ (0\ ;\ 3{,}5\ ;\ 0)$; $\overrightarrow{DH}\ (-1{,}5\ ;\ 0{,}8\ ;\ 0)$; $\overrightarrow{HE}\ (0\ ;\ -4{,}3\ ;\ 0)$; $\overrightarrow{EA}\ (1{,}5\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

3. La distance parcourue par l'outil de coupe lorsqu'il tourne une fois autour de la pièce correspond au périmètre du quadrilatère *AEHD*. En utilisant la norme des vecteurs précédents, on détermine les longueurs *AD*, *DH*, *HE* et *EA*.

$AD = 3{,}5$;

$DH = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 0{,}8^2 + 0^2} = \sqrt{2{,}89}$;

$HE = 4{,}3$ et $EA = 1{,}5$.

$AD + DH + HE + EA$

$= 3{,}5 + \sqrt{2{,}89} + 4{,}3 + 1{,}5 = 11$.

Le contour de la pièce vaut 11.

Fonctions logarithmes

5

Activités

Page 63

$f(0{,}25) = -\,8\,310 \times \ln 0{,}25 \approx 11\,520$.
Le mammouth fossilisé est vieux d'environ 11 520 ans.

Pages 64 et 65

Est-ce que je sais ?

1. a) $f'(x) = 6x - 6$.

b) $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[-\,1 ; 1]$. Donc f est décroissante sur cet intervalle.
$f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$. Donc f est croissante sur cet intervalle.

x	$-\,1$		1		3
$f(x)$	9	$\searrow$	$-\,3$	$\nearrow$	9

2. La fonction g a le même sens de variation que f car f est multipliée par la constante positive 2.

x	$-\,1$		1		3
$g(x)$	18	$\searrow$	$-\,6$	$\nearrow$	18

La fonction h varie en sens contraire de f car f est multipliée par la constante négative $-\,0{,}4$.

x	$-\,1$		1		3
$h(x)$	$-\,3{,}6$	$\nearrow$	$1{,}2$	$\searrow$	$-\,3{,}6$

Activité 1

1. a) $f_1'(x) = x$; $f_2'(x) = x^2$; $f_3'(x) = x^3$;
$f_4'(x) = 2x - 1$.

b) f_2' est égale à la fonction carré.

c) f_3' est égale à la fonction cube.

d) Aucune des dérivées obtenues n'est égale à la fonction inverse.

$\ln 1 = 0$; $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.

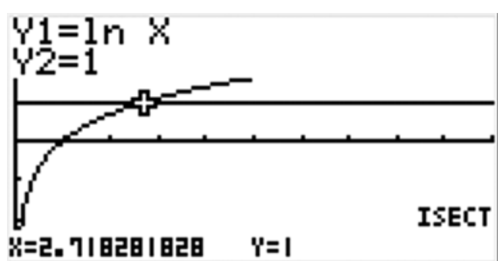
2. $\ln 0{,}2 \approx -\,1{,}61$; $\ln 0{,}8 \approx -\,0{,}22$;
$\ln 1{,}2 \approx 0{,}18$; $\ln 2 \approx 0{,}69$.

3. a) $\dfrac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$.

b) Donc la fonction ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

c) La courbe représentative obtenue est bien celle d'une fonction croissante.

d) Une valeur approchée au dixième du point d'ordonnée 1 est 2,7.



Activité 2

1. pH = – log (10^{-4}) = – (– 4) = 4.

2.

x	0,4	0,8	1	5	10	20
$\dfrac{\ln x}{\ln 10}$	– 0,378	– 0,097	0	0,699	1	1,301
log 10	– 0,378	– 0,097	0	0,699	1	1,301

Sur les deux lignes du tableau, les valeurs approchées sont égales.

3. log 10 = 1 ; log (10^5) = 5 ; log (10^{-2}) = – 2 ; log (10^2) = 2 ; log (10^{-8}) = – 8.
On remarque que log (10^n) = n.

Activité 3

a) ln (3 × 5) ≈ 2,708 ; ln 3 ≈ 1,099 ; ln 5 ≈ 1,609.
Les valeurs approchées de ln (3 × 5) et ln 3 + ln 5 sont égales.

b) $\ln\left(\dfrac{7}{4}\right) \approx 0{,}56$; ln 7 ≈ 1,946 ; ln 4 ≈ 1,386.
Les valeurs approchées de $\ln\left(\dfrac{7}{4}\right)$ et ln 7 – ln 4 sont égales.

c) $\ln\left(2^3\right) \approx 2{,}079$ et 3 × ln 2 ≈ 2,079.

Les valeurs approchées de $\ln\left(2^3\right)$ et 3 × ln 2 sont égales.

J'utilise un logiciel

Pages 69 et 70

Étudier le signe de la fonction ln – Dériver une fonction avec ln

1. Signe de la fonction ln

b) L'ordonnée de M n'est pas toujours de même signe. Elle est positive lorsque $x > 1$. Elle est négative lorsque $x < 1$.

c)

x	0		1		6
signe de ln x		–	0	+	

2. Dérivée d'une fonction comportant un logarithme népérien

a) La fonction dérivée de la fonction ln est la fonction inverse pour $x > 0$.
$g(x) = \dfrac{1}{x}$.

b) $f_1'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f_2'(x) = \dfrac{3}{x}$; $f_3'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$; $f_4'(x) = \dfrac{4}{x}$.

c) On sait que $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10} \times \ln x$.
Or $\dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43$.
Donc $f'(x) = 0{,}43 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{0{,}43}{x}$.

Utiliser un logarithme en statistique

Voir fichier « **05_cout_corrige.xls** » ou « **05_cout_corrige.ods** ».

1. Premier nuage de points

b) La forme du nuage de points ne justifie pas un ajustement par une droite.

c) La forme du nuage de points s'allonge.

2. Deuxième nuage de points

c) On obtient $y = 0{,}14x + 2{,}39$.

d) $\ln C_7 = 0{,}14 \times 7 + 2{,}39 = 3{,}37$.

e) $C_7 \approx 29$ (en centaines d'euros). L'estimation demandée est de 2 900 €.

Exercices et problèmes

Pages 71 à 74

Exercices

Calculer un logarithme

1. $\ln 18 \approx 2{,}89$; $\ln 2{,}5 \approx 0{,}92$;
$\ln 0{,}2 \approx -1{,}61$; $\ln 0{,}58 \approx -0{,}55$;
$\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}51$; $\ln\left(\frac{4}{7}\right) \approx -0{,}56$.

2. $\log 1\,000 = 3$; $\log 0{,}01 = -2$;
$\log\left(10^{-5}\right) = -5$; $\log\left(10^{6}\right) = 6$;
$\log 17{,}2 \approx 1{,}24$; $\log 0{,}99 \approx -0{,}00$.

3. $\ln 7 \approx 1{,}95$; $\log 3{,}2 \approx 0{,}51$;
$\log\left(\frac{1}{5}\right) \approx -0{,}70$; $\ln 0{,}187 \approx -1{,}68$;
$\ln\left(\frac{17}{3}\right) \approx 1{,}73$; $\log\left(6 \times 10^{3}\right) \approx 3{,}78$.

4. Les calculs impossibles sont : $\ln(-4)$ et $\log(-3^2)$.

5. Nombres positifs : $\log(10^3)$; $\log 8{,}2$; $\log(-5)^2$; $\log 1{,}05$.
Nombres négatifs : $\log\left(\frac{2}{3}\right)$; $\log(10^{-2})$; $\log 0{,}9$.

Appliquer les propriétés opératoires

6. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$.

7. $\ln(3a) = \ln 3 + \ln a$; $\ln\left(\frac{5}{a}\right) = \ln 5 - \ln a$;
$\ln(a^7) = 7\ln a$; $\ln(6a^2) = \ln 6 + 2\ln a$;
$5\ln(a^2) + 3\ln(2a) = 10\ln a + 3\ln 2 + 3\ln a$
$= 13\ln a + 3\ln 2$.

8. $\log 16 = 4\log 2$; $\log 20 = 1 + \log 2$;
$\log(2 \times 10^{-5}) = \log 2 - 5$;
$3\log 8 - 7\log 4 = -5\log 2$;
$\log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2$;
$\log(2 \times 10^7) + \log 2 = 2\log 2 + 7$.

9. $\ln 27 = 3\ln 3$; $4\ln 3 - \ln 9 + 2\ln\left(\frac{1}{3}\right)$
$= 4\ln 3 - 2\ln 3 - 2\ln 3 = 0$; $\ln\left(\frac{e}{3}\right) = 1 - \ln 3$;
$5\ln 9 + \ln\left(e^3\right) = 10\ln 3 + 3$.

10. $\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0{,}778$;
$\log 15 = \log 3 + \log 5 \approx 1{,}176$;
$\log 50 = \log 5 + 1 \approx 1{,}699$;
$\log 1{,}5 = \log 15 - 1 \approx 0{,}176$;
$\log 2{,}5 = 2\log 5 - 1 \approx 0{,}398$;
$\log 300 = \log 3 + 2 \approx 2{,}477$.

Rechercher l'exposant d'une puissance à l'aide d'un logarithme

11. $4^n = 16\,384$; $n = \frac{\ln 16\,384}{\ln 4} = 7$.

$7^n = 5\,764\,801$; $n = \frac{\ln 5\,764\,801}{\ln 7} = 8$.

$10 \times 1{,}5^n = 75{,}9375$; $n = \frac{\ln 7{,}59375}{\ln 1{,}5} = 5$.

12. $5^n < 100$; $n < 2{,}86$ et n entier ; $n = 2$.
$2{,}8^n \geq 42{,}3$; $n \geq 3{,}03$ et n entier ; $n = 4$.
$0{,}4^n \leq 0{,}17$; $n \geq 1{,}93$ et n entier ; $n = 2$.
$10^{-3n} > 10^{-5}$; $n < \frac{5}{3}$ et n entier ; $n = 1$.

13. a) $C_5 = 20\,000 \times 1{,}035^5 \approx 23\,753{,}73$ €.
b) $20\,000 \times 1{,}035^n = 29\,200$;
$1{,}035^n = 1{,}46$; $n = \frac{\ln 1{,}46}{\ln 1{,}035} \approx 11$.
La valeur acquise est égale à 29 200 € au bout de 11 ans.
c) $1{,}035^n = 2$; $n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}035} \approx 20{,}16$.
Le capital a doublé à la fin de la 21e année.

14. a) $V_2 = 65\,049{,}60$ €
b) $n > 2{,}63$.
La valeur de la machine est inférieure à 60 000 € au bout de la troisième année.
c) $n \approx 5{,}4$.
La machine a perdu la moitié de sa valeur au bout de la sixième année.

Dériver une fonction comportant un logarithme népérien

15. a) $f'(x) = -\frac{1}{x}$; $f'(x) < 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.
Donc f est décroissante sur cet intervalle.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0,1 ; 4]$. Donc f est croissante sur cet intervalle.

c) $f'(x) = \dfrac{2}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0,1 ; 4]$. Donc f est croissante sur cet intervalle.

d) $f'(x) = \dfrac{4}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0,1 ; 4]$. Donc f est croissante sur cet intervalle.

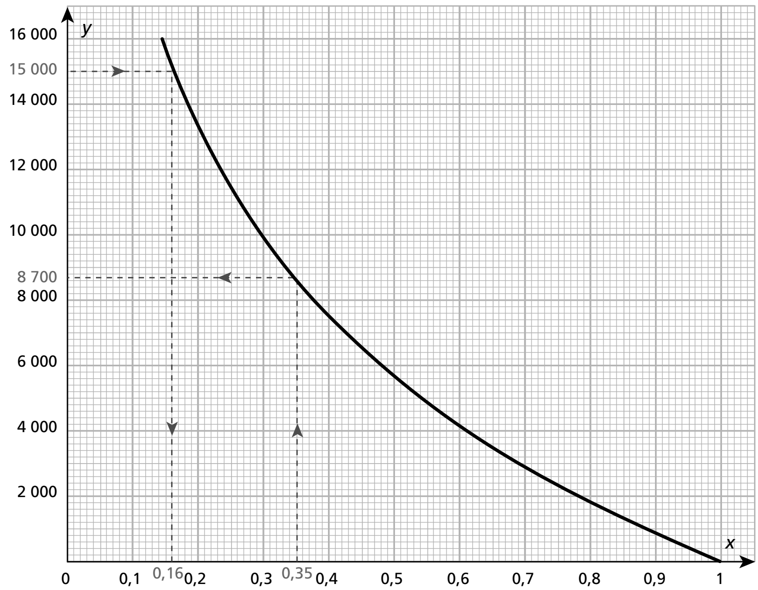
Problèmes

Problème 1

1. a) $f'(x) = -\dfrac{8\,310}{x}$ sur l'intervalle $[0,2 ; 1]$.

b) $f'(x) < 0$. Donc f est décroissante sur $[0,2 ; 1]$.

c)



2. a) $f(0,35) = 8\,700$. L'âge du fossile est 8 700 ans.

b) Voir graphique.

c) Voir graphique. La fraction de carbone 14 restant est environ 16 %.

Problème 2

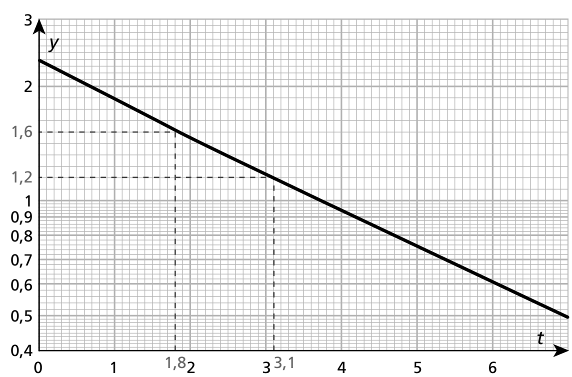
1. a) $Q_1 = 2,4 \times 0,8 = 1,92$ mg ;
$Q_2 = 1,92 \times 0,8 = 1,536$ mg.

b) $Q_{n+1} = 0,8\, Q_n$.

c) (Q_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $Q_0 = 2,4$.

d) $Q_n = 2,4 \times 0,8^n$.

2.



a) $Q_1 \approx 1{,}9$ mg ; $Q_2 \approx 1{,}5$ mg.
b) La quantité de médicament présente dans le sang au bout de 7 heures est 0,5 mg.
c) La quantité de médicament présente dans le sang est de 1,6 mg au bout de 1,8 h, soit 1 h 48 min.
d) La quantité de médicament présente dans le sang est divisée par 2 au bout de 3,1 h, soit 3 h 6 min.

Problème 3

1. a) $\frac{P_e - P_s}{P_e} = \frac{5 - 1{,}84}{5} = 0{,}632$;
soit 63,2 %.
b) $A = \frac{1}{5} \times 10 \times \log\left(\frac{5}{1{,}84}\right) \approx 0{,}9$.
La référence de la fibre optique est FO2.
2. a) $0{,}9 = \frac{1}{L} \times 10 \times \log 2$.
En transformant, on obtient :
$L = \frac{10 \log 2}{0{,}9} \approx 3{,}345$ km.
b) On a alors $\frac{P_e}{P} = \frac{100}{10} = 10$.
$0{,}9 = \frac{1}{L} \times 10 \times \log 10$.
D'où $L = \frac{10}{0{,}9} \approx 11{,}111$ km.

Problème 4

Voir fichier « **05_planete_corrige.xls** » ou « **05_planete_corrige.ods** ».
1. b) La forme du nuage ne justifie pas un ajustement par une droite.
2. a)

i	$d_i - d_0$	$\ln (d_i - d_0)$
0	0	
1	50	3,912
2	92	4,522
3	170	5,136
5	721	6,581
6	1 370	4,110
7	2 814	7,942

c) $\ln (d_4 - d_0) = 0{,}676 \times 4 + 3{,}181 \approx 5{,}885$;
$\ln (d_8 - d_0) = 0{,}676 \times 8 + 3{,}181 \approx 8{,}589$.
3. a) $d_4 = 24{,}071 \times 1{,}966^4 + 58 \approx 417$ millions de km.
b) $d_8 = 24{,}071 \times 1{,}966^8 + 58 \approx 5\,430$ millions de km.
4. a) $\frac{417 - 414}{414} \approx 0{,}007$, soit 0,7 % d'écart.
b) $\frac{5\,430 - 4\,500}{4\,500} \approx 0{,}206$, soit 21 % d'écart.

Problème 5

1. a) $\frac{I}{I_0} = \frac{2 \times 10^{-4}}{10^{-12}} = 2 \times 10^8$.
$L = 10 \times \log (2 \times 10^8) = 10(\log 2 + 8)$
$= 10 \log 2 + 80$.
b) $L \approx 83$ dB.
2. $L' = 10 \times \log (6 \times 10^8) \approx 87{,}8$ dB.
L'augmentation est de 4,8 dB, c'est-à-dire 10 log 3.

Je teste mes connaissances

Page 75

1. B	6. A
2. C	7. C
3. A	8. C
4. B	9. A
5. B	10. A

Je m'entraîne au CCF

Page 76

Partie A

1. pH = 5.
2. La fonction logarithme décimal est croissante.
Lorsque la concentration en ions H_3O^+ augmente, le pH diminue.
3. Voir fichier **« 05_pH_corrige.xls »** ou **« 05_pH_corrige.ods »**.

4. Lorsque la concentration en ions H_3O^+ est divisée par 10, le pH augmente de 1.

$$-\log\left(\frac{x}{10}\right) = -\log x - (-\log 10) = -\log x + 1.$$

5. La concentration en ions H_3O^+ est divisée par 10^3 lorsque le pH augmente de 3 unités.

$$\text{pH} + 3 = -\log x + \log\left(10^3\right) = -\log\left(\frac{x}{10^3}\right).$$

Partie B

Voir fichier « **05_pH_corrige.xls** » ou « **05_pH_corrige.ods** ».

1. Le graphique n'est pas utilisable pour une lecture graphique.

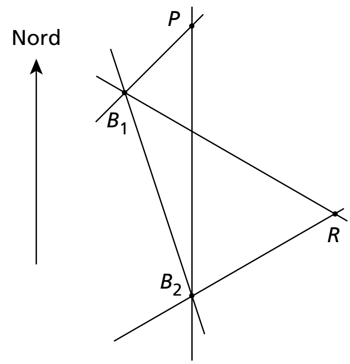
2. On obtient des points alignés car l'échelle logarithmique permet d'avoir des points dont la différence d'abscisses est la même.

$\log(10^{-2}) - \log(10^{-1}) = \log(10^{-3}) - \log(10^{-2}) = \ldots = -1.$

Relations trigonométriques - Fonction cosinus (6)

Activités

Page 77



– Le cap a une valeur d'environ 342° ou – 38° par rapport au Nord.

Pages 78 et 79

Est-ce que je sais ?

a) $\cos \alpha = 0{,}25$ et $\sin \alpha = 0{,}95$.

b) $\widehat{AOM} \approx 75°$ ou $76°$.

c) $\alpha \approx \dfrac{5\pi}{12}$ rad.

d) $\cos \widehat{AOM} \approx 0{,}259$ et $\sin \widehat{AOM} \approx 0{,}966$.

Activité 1

1. a) Les points sont symétriques par rapport à l'axe (Ox).

b) et c) $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

2. a) Les points sont symétriques par rapport à l'axe (Oy).

b) et c) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

3. a) Les points sont symétriques par rapport au point O.

b) et c) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

4. a) Les points sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

b) et c) $\cos(\dfrac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
et $\sin(\dfrac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

Activité 2

a) La valeur de α est 45°.

b) $\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos a = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos b = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$;
$\sin \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin a = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $\sin b = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

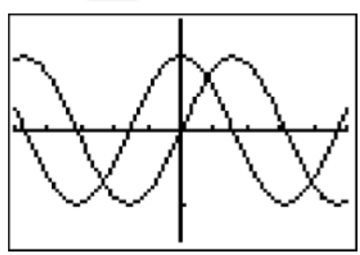
c) $\cos(a + b) = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{10}} \times \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
$= \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

d) Arcos $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 45° = \alpha$.

e) $\sin(a + b) = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{3}{\sqrt{10}}$
$= \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Activité 3

a)



b) La fonction cosinus est décalée par rapport à l'axe (Ox) de $\pi/2$ radians par rapport à la fonction sinus.
La période de la fonction cosinus est donc 2π.

c) La courbe représentative de la fonction cosinus est une sinusoïde.

d)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1

Exercices et problèmes

Pages 83 et 84

Exercices

Angles associés

1. a)

Angles (°)	30	45	60	120	135	150
Sinus	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5
Cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	– 0,5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b)

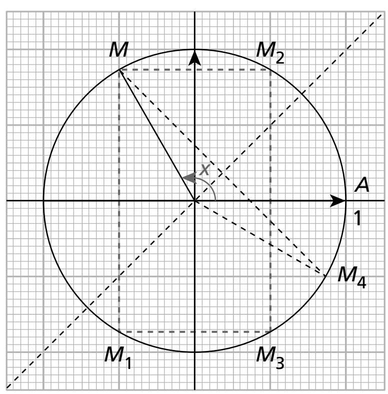
Angles (°)	– 30	– 45	– 60	– 120	– 135	– 150
Sinus	– 0,5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	– 0,5
Cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	– 0,5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. a) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\cos\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{9\pi}{6} = 0$;
$\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$; $\sin\frac{5\pi}{6} = 0{,}5$; $\sin\frac{7\pi}{6} = -0{,}5$;
$\sin\frac{9\pi}{6} = 1$.

b) $\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$; $\cos\frac{4\pi}{3} = -0{,}5$;
$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}5$; $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$;
$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. a)



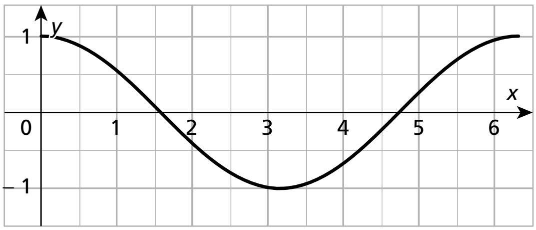
b) $\cos(-x) = -0{,}5$; $\cos(\pi - x) = 0{,}5$;
$\cos(\pi + x) = 0{,}5$; $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\sin(-x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\sin(\pi + x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -0{,}5$.

Fonction cosinus

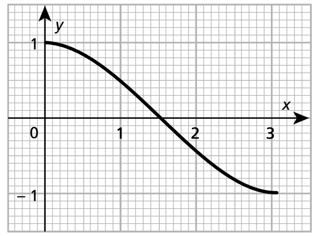
4. a) Une sinusoïde.

b) Il y a deux périodes.

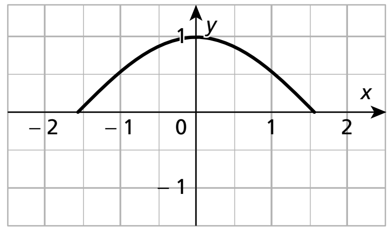
5.



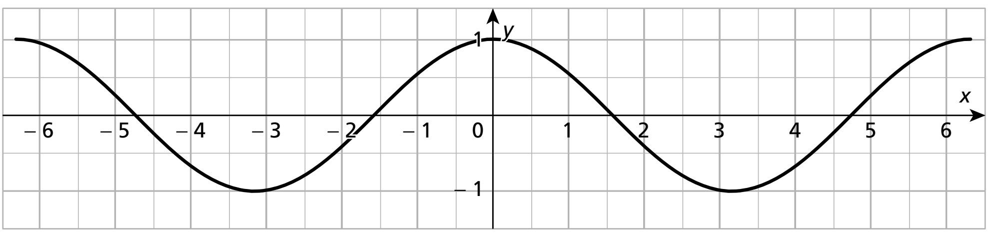
6.



7.



8.



9.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	-1	↗ 0	↗ 1	↘ 0	↘ -1

12.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	1	↘ 0	↘ -1	↗ 0	↗ 1

10.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	↘ 0	↘ -1

11.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	0	↗ 1	↘ 0

Formules d'addition

13. $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

14. $\cos\frac{13\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{6}$

$= \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

$\sin \frac{13\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4}$
$= \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

15. $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos(-\frac{\pi}{4}) - \sin \frac{\pi}{3} \sin(-\frac{\pi}{4})$
$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos (-\frac{\pi}{4}) + \sin (-\frac{\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{3}$
$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

16. a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$.

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}$
$= \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x$
$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$.

c) $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{2\pi}{3}$
$- \sin x \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$.

$\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \cos x$
$= -\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$.

17. a) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$
$= \cos x + \cos x \cos \frac{2\pi}{3} - \sin x \sin \frac{2\pi}{3} + \cos x$
$\cos \frac{4\pi}{3} - \sin x \sin \frac{4\pi}{3} = \cos x + (-\frac{1}{2} \cos x$
$- \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x) + (-\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x) = 0$.

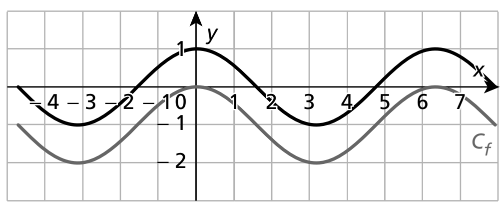
b) $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$
$= \sin x + \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \cos x + \sin x$
$\cos \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} \cos x = \sin x + (-\frac{1}{2} \sin x$
$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) + (-\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x) = 0$.

18. $\sin 2x = \sin (x + x) = \sin x \cos x + \sin x$
$\cos x = 2\sin x \cos x$.

Problèmes

Problème 1

1.



2. a) Sur $[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}]$, $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et 2π.

b) Deux formulations possibles :
– les solutions sont distantes d'une période de 2π ;
– il y a une infinité de solutions périodiques.

Problème 2

a) D'après le tableau de variation sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$, la fonction cosinus présente un maximum pour $\theta = 0$ rad. Donc l'éclairement est maximal pour $\theta = 0$ rad.

b) Le personnage doit se situer au-dessous du projecteur.

Problème 3

1. $\cos \widehat{B} \sin \widehat{C} + \cos \widehat{B} \sin \widehat{C} = \sin(\widehat{B} + \widehat{C})$

$= \sin (\frac{\pi}{2})$.

D'où $\widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$. Donc $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$. Le triangle *ABC* est rectangle en *A*.

2. $\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} = \cos (\widehat{B} - \widehat{C})$

$= \cos (\frac{\pi}{2})$.

D'où $\widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$. On ne peut pas conclure sur une valeur particulière de $\widehat{A}$.
Le triangle *ABC* est quelconque.

3. $\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} - \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} = \cos (\widehat{B} + \widehat{C})$

$= \cos (0)$.

D'où $\widehat{B} + \widehat{C} = 0$. Donc $\widehat{A} = \pi$. Le triangle *ABC* est plat.

4. $\cos \widehat{B} \sin \widehat{C} + \sin \widehat{B} \cos \widehat{C} = \sin(\widehat{B} + \widehat{C})$

$= \sin (\frac{\pi}{3})$.

D'où $\widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\pi}{3}$. Donc $\widehat{A} = \frac{2\pi}{3}$. Le triangle *ABC* est obtus.

Problème 4

1. $\cos \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

2. $\cos \frac{7\pi}{12} = \cos (\pi - \frac{5\pi}{12}) = -\cos \frac{5\pi}{12}$

$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin (\pi - \frac{5\pi}{12}) = \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Je teste mes connaissances

Page 85

1. B
2. B
3. A
4. C
5. C
6. A
7. B
8. C
9. C
10. B

Je m'entraîne au CCF

Page 86

Exercice 1

1. La fonction *E* est proportionnelle à la fonction cosinus.
On obtient directement le tableau de variation de la fonction *E* :

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$E(\theta)$	0	↗	1	↘	0

2. D'après le tableau de variation sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$, la fonction *E* présente un maximum pour $\theta = 0$ rad.
Donc l'éclairement est maximal pour $\theta = 0$ rad.

L'éclairement est nul pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$ rad et $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad.

3. L'éclairement *E* est le même que pour la valeur de θ.

Exercice 2

1. $\cos (x + \pi) = \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi$
$= -\cos x$.
2. $\sin (x + \pi) = \sin x \cos \pi + \sin \pi \cos x$
$= -\sin x$.

3. Les résultats obtenus sont conformes à ce qui est attendu puisqu'il s'agit d'angles dont la différence des mesures est π.

Exercice 3

$\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} - \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} = \cos (\widehat{B} + \widehat{C})$

$= \cos (\frac{\pi}{2})$.

D'où $\widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$. Donc, $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$. Le triangle ABC est rectangle en A.

Probabilités

7

Activités

Page 87

La probabilité de rencontrer Odin et de l'emporter est $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Pages 88 et 89

Est-ce que je sais ?

a) La probabilité que la bille tirée soit verte est $\frac{2}{5}$.

b) La probabilité que la bille tirée ne soit pas verte est $\frac{3}{5}$.

Activité 1

1. a) La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{6}$.

b) $A = \{4, 5, 6\}$.

c) Il y a 3 cas favorables à A.

d) $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

2. a)

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,25	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05

Il n'y a pas équiprobabilité des six issues.

b) $B = \{2, 4, 6\}$.

c) $P(B) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}45$.

Activité 2

1. a) $A = \{2, 4, 6\}$ et
$P(A) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}45$.

b) $\bar{A}$: « Le numéro sorti est impair ».

c) $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ et
$P(\bar{A}) = 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}55$.

d) On a $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ou encore
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. a) Les fréquences se stabilisent.

b) On peut estimer que $P(A \cap B) \approx 0{,}20$ et $P(A \cup B) \approx 0{,}55$.

c) $A \cap B = \{4, 6\}$.

d) $P(A \cap B) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}20$. Cela confirme l'estimation précédente.

e) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

f) $P(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}55$. Cela confirme l'estimation précédente.

g) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}45 + 0{,}30 - 0{,}20 = 0{,}55 = P(A \cup B)$.

J'utilise un logiciel

Pages 93 et 94

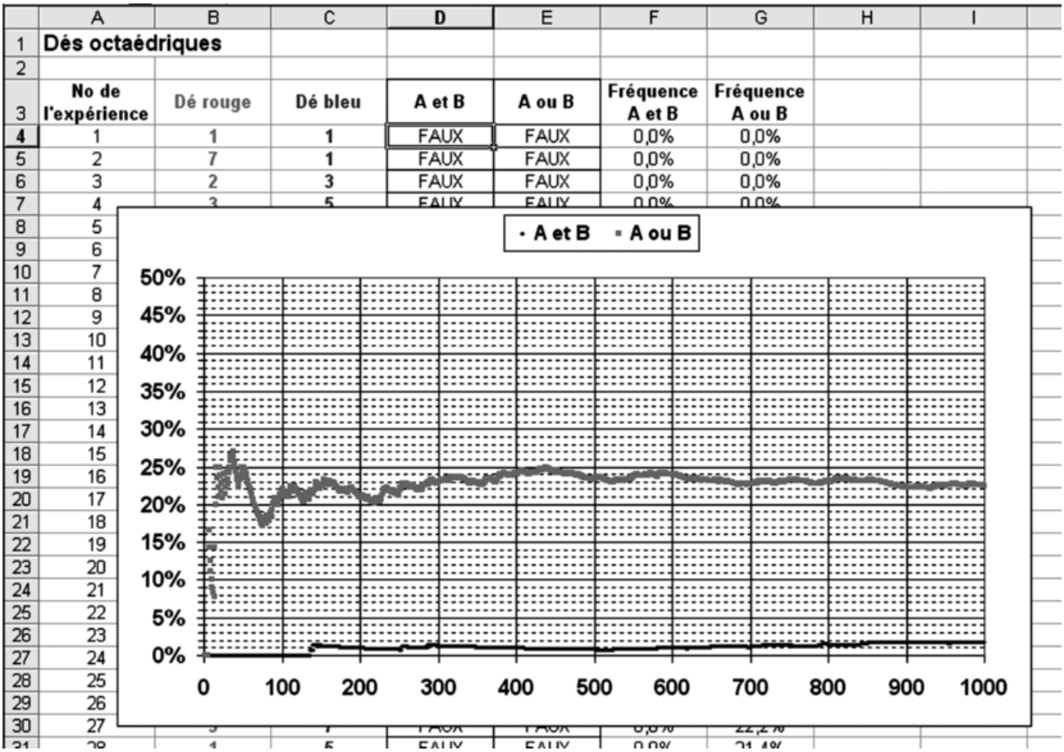
Expérimenter intersection et réunion

1. a) « Faire un double 8 » correspond à l'événement A et B, c'est-à-dire $A \cap B$.

b) L'événement $A \cup B$ correspond à « L'un au moins des deux dés tombe sur la face 8 ».

c) L'événement dont la probabilité semble la plus faible est $A \cap B$.

d)



L'instruction en B4 simule le lancer du dé rouge.

e) La cellule E4 affiche « VRAI » quand B4 vaut 8 ou quand C4 vaut 8, et affiche « FAUX » dans tous les autres cas.

f) On peut faire les estimations suivantes : $P(A \cap B) \approx 0{,}24$; $P(A \cup B) \approx 0{,}02$.

2. a) Il y a $8 \times 8 = 64$ chemins possibles.

La probabilité d'une issue est $\frac{1}{64}$.

b) $P(A) = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{1}{8}$;

$P(A \cap B) = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

c) On en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64} \approx 0{,}234$.

3. La probabilité de défaillance en série est $\frac{15}{64} \approx 0{,}234$.

La probabilité de défaillance en parallèle est $\frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

Estimer puis calculer une probabilité

1. a) La formule en B3 simule un lancer de pile ou face sous la forme 1 ou 0.

b) La cellule J3 affiche « VRAI » lorsqu'il y a sept « 0 » ou sept « 1 ». Elle affiche « FAUX » dans tous les autres cas.

c) On observe assez rarement l'affichage « VRAI ».

d) On peut estimer la probabilité d'avoir sept « pile » ou sept « face » à environ 0,016.

2. a) Il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$ chemins possibles.

On peut se contenter d'un arbre incomplet permettant de comprendre le principe du calcul.

b) Il y a 2 issues favorables sur 128 issues possibles équiprobables. La probabilité recherchée est $\frac{2}{128} = \frac{2}{2^7} = \frac{1}{2^6} \approx 0{,}0156$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Alarme des sept points**												
2	Numéro de l'expérience									Réalisation de l'événement		Fréquence de réalisation	**0,0157**
3	1	1	0	1	0	1	1	1		FAUX			
4	2	0	0	0	1	1	1	1		FAUX			
5	3	1	1	0	1	1	0	0		FAUX			
6	4	0	1	0	0	0	1	1		FAUX			
7	5	0	0	1	0	1	1	1		FAUX			
8	6	0	1	1	1	1	0	1		FAUX			
9	7	1	1	0	1	0	0	1		FAUX			
10	8	1	0	0	0	1	0	1		FAUX			
11	9	1	0	1	1	1	0	0		FAUX			
12	10	0	0	0	0	0	1	0		FAUX			
13	11	0	0	1	1	1	1	0		FAUX			
14	12	0	1	1	1	0	0	1		FAUX			
15	13	0	0	0	0	1	0	1		FAUX			
16	14	0	0	1	1	0	0	0		FAUX			
17	15	1	0	1	1	0	1	1		FAUX			
18	16	0	1	0	1	0	1	1		FAUX			
19	17	0	0	0	0	0	0	0		VRAI			
20	18	0	0	0	0	1	0	0		FAUX			
21	19	1	0	0	1	1	0	1		FAUX			
22	20	0	1	0	0	0	1	0		FAUX			
23	21	0	1	1	0	0	0	1		FAUX			
24	22	0	0	0	1	1	1	0		FAUX			
25	23	0	1	0	0	0	0	1		FAUX			
26	24	1	1	1	0	0	1	0		FAUX			
27	25	0	0	0	1	0	0	0		FAUX			
28	26	1	0	1	0	1	0	0		FAUX			
29	27	1	1	1	1	1	1	1		VRAI			
30	28	0	0	0	1	0	0	1		FAUX			
31	29	1	0	0	1	1	1	1		FAUX			

c) Lorsqu'une alerte est donnée, la probabilité que ce soit une fausse alerte est faible.

Exercices et problèmes

Pages 95 à 98

Exercices

Déterminer un modèle de probabilité

1. a) Méthode 2.
b) Méthode 1.
c) Méthode 2.
d) Méthode 1.

2. • Roulette A : la probabilité d'obtenir le rouge est 0,25 ; celle d'obtenir le bleu est 0,5 ; et celle d'obtenir le vert est 0,25.

• Roulette B : la probabilité d'obtenir le rouge est $\frac{1}{3}$; celle d'obtenir le bleu est $\frac{1}{3}$; et celle d'obtenir le vert est $\frac{1}{3}$.

• Roulette C : la probabilité d'obtenir le rouge est 0,3 ; celle d'obtenir le bleu est 0,2 ; et celle d'obtenir le vert est 0,5.

Calculer une probabilité par addition des probabilités d'événements élémentaires composés d'une issue

3. a) On a $5 \times p_1 + p_6 = 1$,
d'où $5 \times p_1 = 1 - 0,8 = 0,2$
donc $p_1 = 0,04 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$.

b) On a $A = \{2, 4, 6\}$,
d'où $P(A) = p_2 + p_4 + p_6$
$= 0,04 + 0,04 + 0,8 = 0,88$.

Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité

4. a) La probabilité que la fiche tirée soit celle d'un homme est : $\frac{517}{1\,000} = 0{,}517$.

b) La probabilité que la fiche tirée soit celle d'une femme est : $\frac{483}{1\,000} = 0{,}483$.

c) La probabilité que la fiche tirée soit celle d'une personne de moins de 65 ans est : $\frac{800}{1\,000} = 0{,}8$.

5. On peut dresser le tableau suivant.

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Atelier 1	6	194	200
Atelier 2	4	96	100
Total	10	290	300

a) Il y a 200 pièces produites par l'atelier 1. La probabilité que la pièce tirée provienne de l'atelier 1 est $\frac{200}{300} = \frac{2}{3}$.
b) Il y a 10 pièces défectueuses. La probabilité que la pièce tirée soit défectueuse est $\frac{10}{300} = \frac{1}{30}$.
c) Il y a 6 pièces défectueuses dans la production de l'atelier 1.
d) La probabilité que la pièce tirée soit défectueuse et provienne de l'atelier 1 est $\frac{6}{300} = \frac{1}{50}$.

6. a)

Salaires mensuels	Effectifs
[1 000 ; 1 400[	80
[1 400 ; 1 800[	40
[1 800 ; 2 200[	40
[2 200 ; 2 600[	30
[2 600 ; 3 000]	10
Total	200

b) $P(A) = \frac{80}{200} = 0{,}4$.
$P(B) = \frac{40}{200} = 0{,}2$.

c) $A \cup B$: « Le salarié a un salaire compris entre 1 000 et 1 800 euros (1 800 exclus) ».
$\bar{A}$: « Le salarié a un salaire supérieur ou égal à 1 400 euros ».

d) $P(A \cup B) = \frac{100}{200} = 0{,}5$;
et $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Passer du langage des probabilités au langage courant et réciproquement

7. a) $\bar{A}$: « La carte tirée n'est pas un cœur ».
b) $A \cap B$: « La carte tirée est une figure de cœur ».
c) Il y a 3 figures de cœur donc
$P(A \cap B) = \frac{3}{32} = 0{,}9375$.

d) $A \cup B$: « La carte tirée est un cœur ou une figure ».
e) Il y a 8 cartes de cœur et 9 figures qui ne sont pas de cœur, donc 17 cartes pouvant conduire à $A \cup B$.
Donc $P(A \cup B) = \frac{17}{32} = 0{,}53125$.

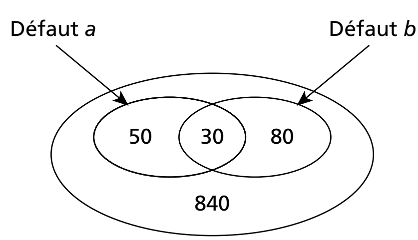
Remarque : on constate que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{32} + \frac{12}{32} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32}$.

8. Figure 1 : jaune A ; bleu $\bar{A}$.
Figure 2 : jaune $A \cup B$; bleu $\bar{A} \cap \bar{B}$.
Figure 3 : jaune $A \cup \bar{B}$; bleu $\bar{A} \cap B$.

Utiliser un tableau, un arbre, un diagramme

9. a) Le nombre d'appareils ne présentant aucun défaut est $1\,000 - 50 - 30 - 80 = 840$.

b)



c)

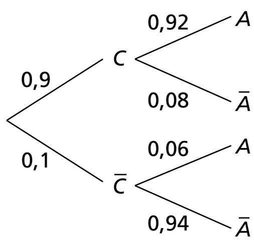
	Défaut *a*	Non défaut *a*	Total
Défaut *b*	30	80	110
Non défaut *b*	50	840	890
Total	80	920	1 000

d)

	A	$\overline{A}$	Total
B	$\frac{30}{1\,000} = 0{,}03$	$\frac{80}{1\,000} = 0{,}08$	$\frac{110}{1\,000} = 0{,}11$
$\overline{B}$	$\frac{50}{1\,000} = 0{,}05$	$\frac{840}{1\,000} = 0{,}84$	$\frac{890}{1\,000} = 0{,}89$
Total	$\frac{80}{1\,000} = 0{,}08$	$\frac{920}{1\,000} = 0{,}92$	1

e) $\overline{A}$: « L'appareil ne présente pas le défaut *a* ». $P(\overline{A}) = 0{,}92$.
$A \cup B$: « L'appareil présente au moins le défaut *a* ou le défaut *b* ».
$P(A \cup B) = 0{,}03 + 0{,}08 + 0{,}05 = 0{,}16$.
$\overline{A} \cap \overline{B}$: « L'appareil ne présente ni le défaut *a* ni le défaut *b* ». $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}84$.

10. a)



b) La probabilité pour que la pièce tirée soit :
– conforme et acceptée par le contrôle est $P(C \cap A) = 0{,}9 \times 0{,}92 = 0{,}828$;
– conforme et rejetée par le contrôle est $P(C \cap \overline{A}) = 0{,}9 \times 0{,}08 = 0{,}072$;
– défectueuse et acceptée par le contrôle est $P(\overline{C} \cap A) = 0{,}1 \times 0{,}06 = 0{,}006$;
– défectueuse et rejetée par le contrôle est $P(\overline{C} \cap \overline{A}) = 0{,}21 \times 0{,}94 = 0{,}094$.

Calculer la probabilité de la réunion ou de l'intersection d'événements

11. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}6$.

12. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}6 + 0{,}2 - P(A \cap B)$.

a) Si $P(A \cap B) = 0{,}1$ alors $P(A \cup B)$
$= 0{,}6 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}7$.

b) Si A et B sont deux événements disjoints, $P(A \cap B) = 0$ alors
$P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}2 - 0 = 0{,}8$.

13. a) $\overline{A}$: « Alex donne un avis défavorable ».
$\overline{B}$: « Ben donne un avis défavorable ».
$A \cap B$: « Alex et Ben donnent un avis favorable ».
$A \cup B$: « Alex ou Ben, au moins, donne un avis favorable ».

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}6 = 0{,}9$.

Problèmes

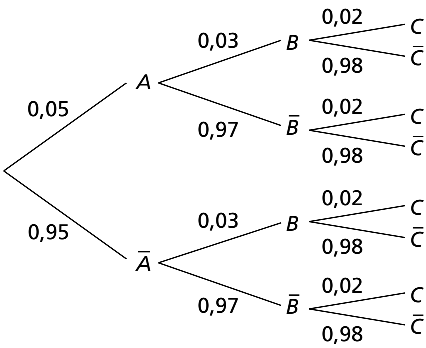
Problème 1

1. D'après les instructions du tableur, $P(A) = 0{,}05$; $P(B) = 0{,}03$ et $P(C) = 0{,}02$.

2. Lorsque l'événement $A \cap B \cap C$ se réalise, la cellule D2 affiche $1 \times 1 \times 1 = 1$ (sinon elle affiche 0).

3. L'événement $A \cap B \cap C$ s'est réalisé 4 fois.

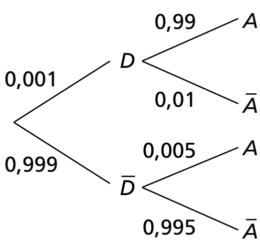
4. On peut réaliser l'arbre suivant.



La probabilité de toucher le jackpot est $0{,}05 \times 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}00003$.

Problème 2

1.



2. La probabilité qu'un jour donné le système de contrôle déclenche une fausse alerte est :

$P(\bar{D} \cap A) = 0{,}999 \times 0{,}005 = 0{,}004995$. Environ 0,5 % des jours se déclenche une fausse alerte.

3. $P(A) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}005$
$= 0{,}005985$.

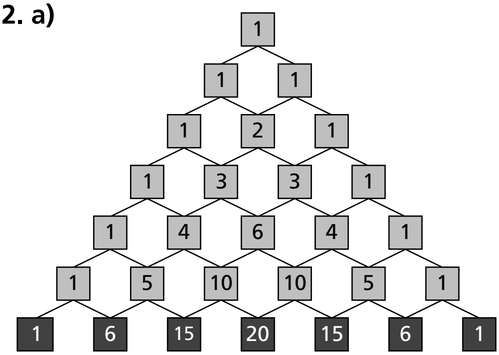
La probabilité qu'un jour donné se déclenche une alerte est 0,005985 (environ 0,6 % des jours).

Remarque : on constate que le rapport entre les fausses alertes et les alertes est $\frac{0{,}004995}{0{,}005985}$, c'est-à-dire qu'environ 83 % des alertes sont de fausses alertes.

Problème 3

1. On peut estimer la probabilité p_3 à environ 0,32 et la probabilité p_6 à environ 0,02.

2. a)



b) Au total, il y a 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 chemins.

c) En supposant que les 64 chemins sont équiprobables, on en déduit que :

$p_0 = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$;

$p_1 = \frac{6}{64} \approx 0{,}094$;

$p_2 = \frac{15}{64} \approx 0{,}234$;

$p_3 = \frac{20}{64} = 0{,}3125$;

$p_4 = \frac{15}{64} \approx 0{,}234$;

$p_5 = \frac{6}{64} \approx 0{,}094$;

$p_6 = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

Je teste mes connaissances

Page 99

1. B
2. C
3. B
4. C
5. A
6. C
7. B
8. A
9. A
10. A

Je m'entraîne au CCF

Page 100

Partie A

1. L'affichage « 0 » correspond à « garçon » et l'affichage « 1 » correspond à « fille ».

2. L'affichage VRAI correspond à « au moins une fille parmi les deux enfants ». L'affichage FAUX correspond à « deux garçons ».

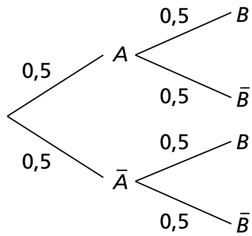
3. Il y a eu 7 495 cas sur 10 000 avec « au moins une fille » sur les deux enfants.

4. La probabilité d'avoir au moins une fille lorsque l'on a deux enfants est d'environ 0,75.

Partie B

1. C'est l'événement $A \cup B$.

2.



3. $P(A \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}75$.
Ce résultat confirme les observations effectuées par simulation.

Fonctions exponentielles

8

Activités

Page 101
$f(2) = 2 \times e^{-0,15\times 2} \approx 1,5$.
Le taux d'alcool du conducteur, deux heures après la prise de sang, est 1,5 g/L. Il ne peut donc pas reprendre le volant.

Pages 102 et 103

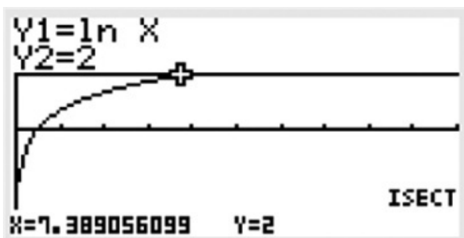
Est-ce que je sais ?

1. $\ln 3 \approx 1,10$; $\ln 1 = 0$; $\ln 0,5 \approx -0,69$; $\ln 1,5 \approx 0,41$; $\ln e = 1$.
On ne peut pas calculer ln (– 2) et ln (– 1).

2. $f'_1(x) = \frac{1}{x}$; $f'_2(x) = \frac{1}{x}$; $f'_3(x) = \frac{3}{x}$; $f'_4(x) = \frac{1}{x}$.

Activité 1

1. c) $x \approx 7,39$.



2. a)

b	– 3	– 2	– 1	0	0,5	1	2	3
Valeur approchée au centième de e^b	0,05	0,14	0,36	1	1,65	2,72	7,39	20,09

b) $e^3 \approx 20,09$.

3. a) La fonction f est croissante.

b) e^x est positif quel que soit x.

c) e^x étant positif, la fonction dérivée f' est positive. Donc la fonction f est croissante.

Activité 2

1. a) Il y a 14 657 bactéries après 20 minutes.

b) Le nombre de bactéries après 40 minutes est 17 902, et après 60 minutes 21 865.
Le nombre de bactéries augmente.

c) Pourcentage d'augmentation du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 20$:
$$\frac{14\,657 - 12\,000}{12\,000} \approx 0,221, \text{ soit } 22,1\ \%.$$

Pourcentage d'augmentation du nombre de bactéries entre $t = 20$ et $t = 40$:

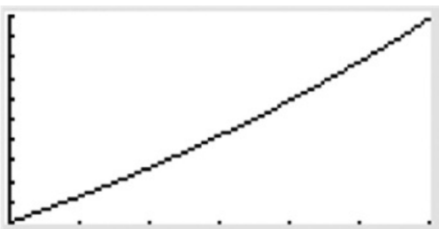
$\dfrac{17\,902 - 14\,657}{14\,657} \approx 0{,}221$, soit 22,1 %.

Pourcentage d'augmentation du nombre de bactéries entre $t = 40$ et $t = 60$:

$\dfrac{21\,865 - 17\,902}{17\,902} \approx 0{,}221$, soit 22,1 %.

Le pourcentage d'augmentation est le même.

d)



e) La fonction f est croissante.

2. a) Il y a 2 678 bactéries après 5 minutes. Le nombre de bactéries après 10 minutes est 597, et 133 après 15 minutes.
Le nombre de bactéries diminue.

b) Pourcentage de diminution du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 5$:

$\dfrac{12\,000 - 2\,678}{12\,000} \approx 0{,}777$, soit 77,7 %.

Pourcentage de diminution du nombre de bactéries entre $t = 5$ et $t = 10$:

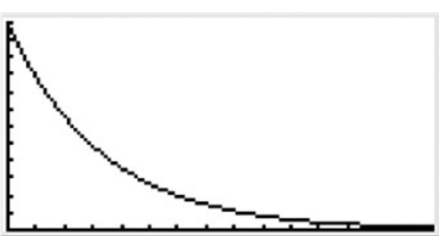
$\dfrac{2\,678 - 597}{2\,678} \approx 0{,}777$, soit 77,7 %.

Pourcentage de diminution du nombre de bactéries entre $t = 10$ et $t = 15$:

$\dfrac{597 - 133}{597} \approx 0{,}777$, soit 77,7 %.

Le pourcentage de diminution est le même.

c)



d) La fonction g est croissante.

Activité 3

a) $e^6 \times e^2 = ?$ ☑ e^{6+2} ☐ $e^{6\times 2}$

b) $\dfrac{e^6}{e^2} = ?$ ☐ $e^{6\div 2}$ ☑ e^{6-2}

c) $(e^6)^2 = ?$ ☐ $e^{(6^2)}$ ☑ $e^{6\times 2}$

J'utilise un logiciel

Pages 107 et 108

Donner l'équation réduite d'une tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle de base e

1. Tangente à la courbe *C* au point d'abscisse 3

b) $f'(x) = e^x$.
$f'(3) = e^3$.
$y = e^3(x - 3) + e^3$; $y = e^3x - 2e^3$;
$y = 20{,}09x - 40{,}17$.
C'est la même équation que celle donnée par le logiciel.

2. Autres tangentes

a) La tangente au point d'abscisse 1 passe par l'origine.
Équation de T : $y = e(x - 1) + e$;
$y = ex - e + e$; $y = ex$.
C'est l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

b) Équation proposée par le logiciel :
$y = 7{,}39x - 7{,}39$.
Les coefficients a et b sont opposés.
$y = e^2(x - 2) + e^2$; $y = e^2x - e^2$.

c) Le coefficient directeur de T et l'ordonnée de M sont égaux.
La remarque est toujours vraie.
Si on note x_M l'abscisse de M, l'ordonnée de M est e^{x_M}.
Le coefficient directeur de T en M est $f'(x_M) = e^{x_M}$.

Ajuster un nuage de points

Voir fichier « **08_ajustement_corrige.xls** » ou « **08_ajustement_corrige.ods** ».

1. Construction des nuages de points

b) Un ajustement affine ne semble pas justifié pour ces nuages.

2. Étude de la demande

c) $y = -0,3983x + 2,1731$.
d) $\ln d = -0,3983x + 2,1731$;
$d = e^{-0,3983x} \times e^{2,1731}$; $d = 8,79e^{-0,40x}$
(coefficients arrondis au centième).
f) $d = \left(8,79 \times e^{-0,4\times 5}\right) \times 1\,000 \approx 1\,190$.
La demande si le prix unitaire est de 5 euros est de 1 190 unités.

3. Étude de l'offre

c) $y = 3,0202x + 0,8672$.
d) $e^r = 3,0202x + 0,8672$;
$r = \ln(3,02x + 0,87)$ (coefficients arrondis au centième).
e) $r = \ln(3,02 \times 5 + 0,87) \times 1\,000 \approx 2\,771$.
L'offre si le prix unitaire est de 5 euros est de 2 771 unités.

4. Prix d'équilibre

Le prix d'équilibre est environ 3,30 €.

Exercices et problèmes

Pages 109 à 112

Exercices

Calculer une exponentielle

1. $e^5 \approx 148,41$; $e^{-1} \approx 0,37$; $e^{0,1} \approx 1,11$; $e^{-0,02} \approx 0,98$; $e^0 = 1$; $e^1 \approx 2,72$; $e^{4,5} \approx 90,02$.

2. $f(-2) \approx 2,44$; $f(-1) \approx 2,21$;
$f(0) = 2$; $f(1) \approx 1,81$; $f(2) \approx 1,64$.

Appliquer les propriétés opératoires

3. $e^3 \times e^{2,5} = e^{5,5}$; $\dfrac{e^{1,3}}{e^{-2}} = e^{3,3}$;
$e^{-4} \times e = e^{-3}$; $\left(e^{-5}\right)^2 = e^{-10}$.

4. $e^{x-4} = e^{-4} \times e^x$; $e^{3-x} = \dfrac{e^3}{e^x}$;
$e^{2x-1} = e^{-1} \times \left(e^x\right)^2$.

Résoudre des équations et des inéquations

5. $\ln x = 2,5$; $x = e^{2,5}$.
$\ln x = -4$; $x = e^{-4}$.
$2 \ln x = 10$; $\ln x = 5$; $x = e^5$.
$4 \ln x - 1 = -11$; $\ln x = -2,5$; $x = e^{-2,5}$.

6. $e^x = 12$; $x = \ln 12$.
$e^x = 0,5$; $x = \ln 0,5$.
$e^x = 1$; $x = 0$.
$e^x = 0$; cette équation n'a pas de solution.
$e^x = -3$; cette équation n'a pas de solution.

7. $e^{2x} = 3,2$; $2x = \ln 3,2$; $x = 0,5 \ln 3,2$.
$e^{-5x} = 14$; $-5x = \ln 14$; $x = -0,2 \ln 14$.
$4\,e^{0,1x} = 12$; $e^{0,1x} = 3$; $0,1x = \ln 3$;
$x = 10 \ln 3$.
$-5e^{-0,8x} = 10$; $e^{-0,8x} = -2$; cette équation n'a pas de solution.

8. $\ln x > 2$; $x > e^2$.
$\ln x \leqslant 8$; $x \leqslant e^8$.
$2 \ln x + 3 < 13$; $\ln x < 5$; $x < e^5$.
$4 - \ln x \geqslant 12$; $\ln x \leqslant -8$; $x \leqslant e^{-8}$.

9. $e^x < 1,5$; $x < \ln 1,5$.
$e^{2x} \geqslant 1$; $2x \geqslant \ln 1$; $x \geqslant 0$.
$e^{-0,2x} < 0$; cette inéquation n'a pas de solution.
$e^{0,5x} - 1 > 2$; $e^{0,5x} > 3$; $0,5x > \ln 3$; $x > 2 \ln 3$.
$3\,e^{4x} \geqslant 6$; $e^{4x} > 2$; $4x > \ln 2$; $x > 0,25 \ln 2$.

Étudier une fonction comportant une exponentielle

10. a) La fonction exponentielle de base e, notée f, est croissante.
b) f_1 est croissante car on multiplie f par une constante positive.
f_2 est décroissante car on multiplie f par une constante négative.
f_3 est croissante car on ajoute une constante à f.
f_4 est décroissante car on multiplie f par une constante négative.

11. a) $f'(x) = 3{,}5\ e^{3{,}5x}$; f est croissante.
b) $f'(x) = -\ 0{,}2\ e^{-0{,}2x}$; f est décroissante.
c) $f'(x) = -\ 20\ e^{5x}$; f est décroissante.
d) $f'(x) = 3\ e^{-10x}$; f est croissante.

12. $f(x) = e^{0{,}3x-2}$.
a) $f(x) = e^{-2}e^{0{,}3x}$. On a donc $k = e^{-2}$.
b) $f'(x) = 0{,}3e^{-2}e^{0{,}3x}$.
c) $f'(x) > 0$ car c'est le produit de trois nombres positifs.
d) La fonction f est donc croissante.

Problèmes

Problème 1

1. a) $200 = K\ e^{-0{,}02\times 20}$; $200 = K\ e^{-0{,}4}$;

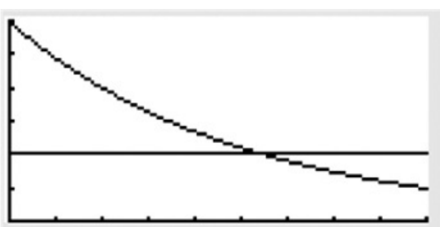
$K = \dfrac{200}{e^{-0{,}4}}$.

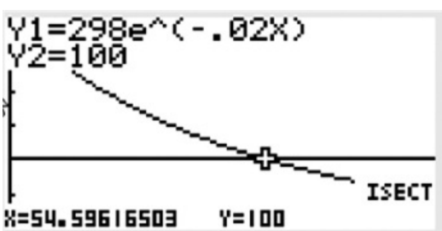
b) $K \approx 298{,}4$.

2. a) $f'(x) = -\ 5{,}96\ e^{-0{,}02x}$.
b) Cette dérivée est négative.
c)

x	0		90
$f(x)$	298	↘	49,3

d)





Coordonnées du point d'intersection :
$x \approx 54{,}6$; $y = 100$.

e) $298\ e^{-0{,}02x} = 100$; $e^{-0{,}02x} = \dfrac{100}{298}$;

$-\ 0{,}02x = \ln\left(\dfrac{100}{298}\right)$; $x = -\ 50\ \ln\left(\dfrac{100}{298}\right) \approx 54{,}6$.

3. La durée d'arrêt du moteur est 55 secondes.

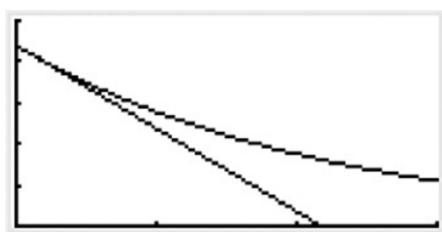
Problème 2

1. a) $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. D'où $\theta_1 = 0{,}955\theta_0$.
b) $\theta_2 = 0{,}955^2 \times \theta_0$; $\theta_3 = 0{,}955^3 \times \theta_0$.
c) $\theta_n = 0{,}955^n \times \theta_0$.
d) La suite (θ_n) est une suite géométrique de raison 0,955.
e) $\theta_{25} = 22 \times 0{,}955^{25}$; $\theta_{25} \approx 7$ °C.

2. a) $e^{-0{,}046} \approx 0{,}955$.
b) $f'(x) = 22 \times (-\ 0{,}0046)\ e^{-0{,}046x}$
$= -\ 1{,}012\ e^{-0{,}046x}$.
Cette dérivée est négative pour tout x de l'intervalle [0 ; 30].
c)

x	0		30
$f(x)$	22	↘	5,5

d) $A(0\ ;\ 22)$
Coefficient directeur de $T = f'(0) \approx -\ 1{,}012$.
Équation de T : $y = -\ 1{,}022x + 22$.



3. a) Temps ≈ 25 secondes.
b) $7{,}2 \div 25 = 0{,}288$.
La vitesse est 0,288 m/s.

Problème 3

1. a)

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln p_i$	1,609	1,723	1,808	1,917	2,028	2,128

c) $y = 0{,}021t + 1{,}61$.

d) $\ln p = 0{,}021t + 1{,}61$; $p = e^{0{,}021t+1{,}61}$; $p = e^{1{,}61} \times e^{0{,}02t}$; $p = 5\ e^{0{,}02t}$.

e) $p_{35} = 5 \times e^{0{,}02\times 35} \approx 178{,}535$ millions d'habitants.

2. a) $f'(t) = 0{,}02 \times 5\ e^{0{,}02t} = 0{,}1\ e^{0{,}02t}$.

b) Cette dérivée est positive.

c)

x	-25		35
$f(t)$	$3{,}03$	$\nearrow$	$10{,}07$

e) $5\ e^{0{,}02t} = 9$; $e^{0{,}02t} = 1{,}8$; $0{,}02t = \ln 1{,}8$; $t = \dfrac{\ln 1{,}8}{0{,}02} = 50 \ln 1{,}8$.

3. a) $f(28) = 5 \times e^{0{,}02\times 28} \approx 8{,}8$ millions d'habitants.

b) $t > 50 \ln 1{,}8$; $t > 29{,}39$.

La population dépassera 9 millions d'habitants au cours de l'année de rang 30.

Problème 4

1. a) $A(100) = 3 \times 10^5\ e^{-0{,}023\times 100}$
$= 30\,078$ Bq $= 3{,}01 \times 10^4$ Bq.

b) $1{,}5 \times 10^5 = 3 \times 10^5\ e^{-0{,}023t}$;
$e^{-0{,}023t} = 0{,}5$; $-0{,}023t = \ln 0{,}5$; $t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}023}$.
$t \approx 30$ années.

2. a)

t	0	40	80	100	140	180
$f(t)$	1	0,40	0,16	0,10	0,04	0,02

b) $f'(t) = -0{,}023 \times e^{-0{,}023t}$.

c) La dérivée est négative.

d)

t	0		180
$f(t)$	1	$\searrow$	$0{,}02$

e) $e^{-0{,}023t} = 0{,}2$; $-0{,}023t = \ln 0{,}2$;
$t = \dfrac{\ln 0{,}2}{-0{,}023}$.

g) $t \approx 70$.

3. L'activité radioactive est de 20 % de sa valeur initiale au bout de 70 ans.

Problème 5

1. a) $i = 30$ mA.

b) $30 \times e^{-0{,}05t} = 3$; $e^{-0{,}05t} = 0{,}1$;
$-0{,}05t = \ln 0{,}1$; $t = \dfrac{\ln 0{,}1}{-0{,}05} \approx 46$ ms.

2. a)

t	0	10	20	30	40	50	68
$f(t)$	30	18,2	11,0	6,7	4,1	2,5	1

b) $f'(t) = 30 \times (-0{,}05) \times e^{-0{,}05t} = -1{,}5\ e^{-0{,}05t}$.

c) $f'(t)$ est négatif quel que soit t.

d) La fonction f est donc décroissante sur $[0 ; 68]$.

3. a) $\Delta i_1 = 11 - 18{,}2 = -7{,}2$ mA.

b) $\Delta i_2 = 6{,}7 - 11 = -4{,}3$ mA.

c) Pour une même variation Δt, la variation Δi n'est pas la même. Il n'y a donc pas proportionnalité.

Problème 6

1. a) $f(3) \approx 70{,}287$. Le nombre d'objets offerts sur le marché pour un prix unitaire de 3 € est 70 287.

$f(5) \approx 257{,}903$. Le nombre d'objets offerts sur le marché pour un prix unitaire de 5 € est 257 903.

b) $g(3) \approx 209{,}963$. Le nombre d'objets demandés par les consommateurs pour un prix unitaire de 3 € est 209 963.

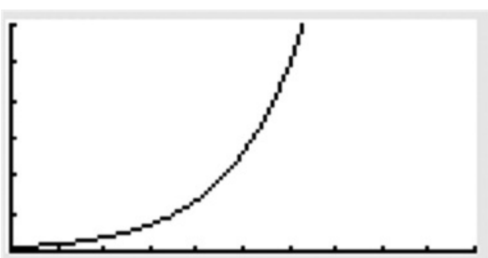
$g(5) \approx 104{,}264$. Le nombre d'objets demandés par les consommateurs pour un prix unitaire de 5 € est 104 264.

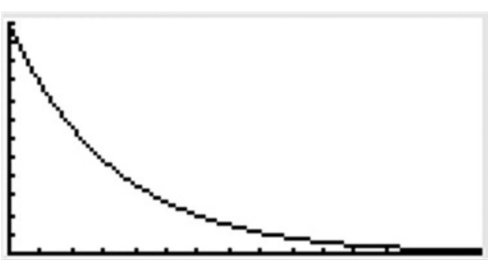
c) $f'(x) = 6{,}5\ e^{0{,}65x}$. Cette dérivée est positive quel que soit x. La fonction f est croissante.
$g'(x) = -\ 210\ e^{-0{,}35x}$. Cette dérivée est négative quel que soit x. La fonction g est décroissante.

d) L'offre augmente avec le prix ; la demande diminue quand le prix augmente.

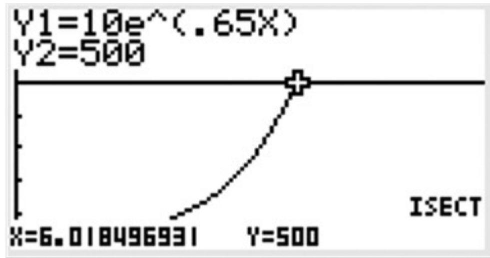
e) $10\ e^{0{,}65x} = 500$; $e^{0{,}65x} = 50$;
$0{,}65x = \ln 50$; $x = \dfrac{\ln 50}{0{,}65} \approx 6{,}02$.
Quand le prix unitaire est de 6,02 €, l'offre est de 500 000 objets.
$600\ e^{-0{,}35x} \leqslant 300$; $e^{-0{,}35x} \leqslant 0{,}5$;
$-0{,}35x \leqslant \ln 0{,}5$; $x \geqslant \dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}35}$; $x \geqslant 2$.
Lorsque le prix unitaire est supérieur ou égal à 2 €, la demande est inférieure ou égale à 300 000 objets.

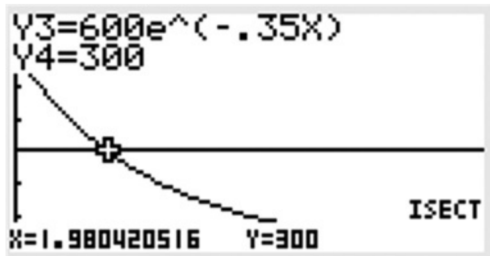
2. b) La courbe représentative de f est bien celle d'une fonction croissante. La courbe représentative de g est bien celle d'une fonction décroissante.



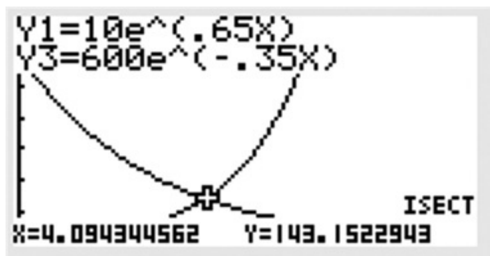


c)





d)



$x \approx 4{,}09$.
L'offre est égale à la demande pour un prix unitaire de 4,09 €. C'est le prix d'équilibre.

Je teste mes connaissances

Page 113

1. B
2. A
3. C
4. B
5. C
6. B
7. A
8. A
9. A
10. C
11. A
12. B

Je m'entraîne au CCF

Page 114

Partie A

1. $f_1(1) \approx 0{,}7788$; $f_1(3) \approx 0{,}4723$.
La probabilité pour que le composant C_1 fonctionne sans panne au bout de 1 000 heures est 0,7788.
La probabilité pour que le composant C_1 fonctionne sans panne au bout de 3 000 heures est 0,4723.

2. $f_2(1) \approx 0{,}6065$; $f_2(3) \approx 0{,}2231$.
La probabilité pour que le composant C_2 fonctionne sans panne au bout de 1 000 heures est 0,6065.
La probabilité pour que le composant C_2 fonctionne sans panne au bout de 3 000 heures est 0,2231.

3. $f_1'(t) = -\,0{,}25\mathrm{e}^{-0{,}25t}$. Cette dérivée est négative quel que soit t. La fonction f_1 est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
$f_2'(t) = -\,0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Cette dérivée est négative quel que soit t. La fonction f_2 est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4. Plus le nombre d'heures d'utilisation des composants est grand, plus la probabilité de ne pas avoir de panne diminue.

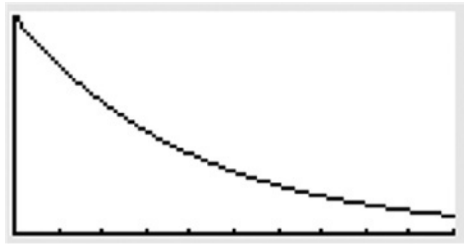
5. $\mathrm{e}^{-0{,}25t} = 0{,}4$; $-0{,}25t = \ln 0{,}4$; $t = \dfrac{\ln 0{,}4}{-0{,}25}$;
$t \approx 3{,}665$.
La probabilité de ne pas avoir de panne avec le composant C_1 est égale à 0,4 après 3 665 heures d'utilisation.

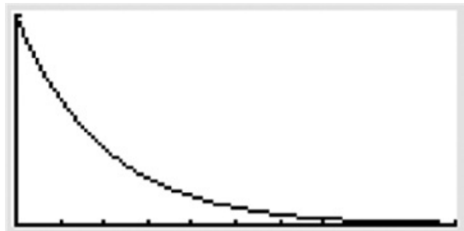
$\mathrm{e}^{-0{,}5t} \geqslant 0{,}3$; $-\,0{,}5t \geqslant \ln 0{,}3$; $t \leqslant \dfrac{\ln 0{,}3}{-0{,}5}$;
$t \leqslant 2{,}408$.
La probabilité de ne pas avoir de panne avec le composant C_2 est supérieure ou égale à 0,3 tant qu'on ne dépasse pas 2 408 heures d'utilisation.

Partie B

1. a) y est compris entre 0 et 1.

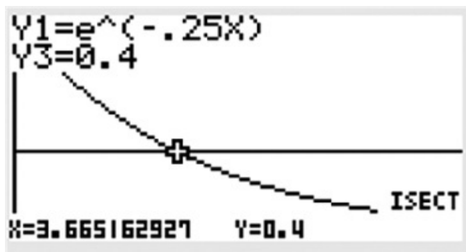
b)

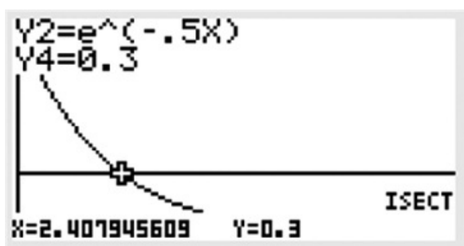




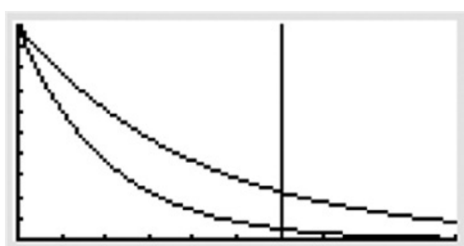
2. Les courbes représentatives de f et g sont bien celles de fonctions décroissantes.

3.





4.



$f_1(6\,000) > f_2(6\,000)$.
Le composant C_1 a la plus grande probabilité de fonctionner sans panne après 6 000 heures d'utilisation.

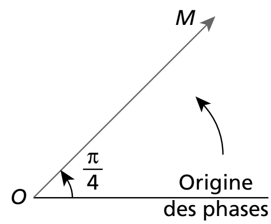
Vecteur de Fresnel - Équations trigonométriques

9

Activités

Page 115

- $T = 20$ ms et $U_{max} = 64$ V.
- $2{,}5 \,.\, 10^{-3} \times 2\pi/20 \,.\, 10^{-3} = \frac{\pi}{4}$ rad.
- $u(t) = 64\sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})$.



Pages 116 et 117

Est-ce que je sais ?

a) $\cos x = 0{,}729$ a pour solution 2,388.

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solution $\frac{3\pi}{4}$.

$\cos x = -\ 0{,}478$ a pour solution 1,072.

b) $\sin x = -\ 0{,}529$ a pour solution – 0,557.

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution $\frac{\pi}{3}$.

$\sin x = 1{,}478$ n'a pas de solution car $1{,}478 > 1$.

Activité 1

1. a) Le paramètre a modifie l'amplitude du signal et du vecteur.
b) Le paramètre ω modifie la période mais pas le vecteur.
c) Le paramètre φ décale la courbe par rapport à l'axe (Ox) et fait tourner le vecteur.

2. Échelle : on choisit 1 cm pour 20 volts.

Activité 2

1. a) Le nombre α vaut $\frac{\pi}{4}$ rad.
b) La deuxième solution est $-\frac{\pi}{4}$ rad, c'est-à-dire $-\ \alpha$.

2. a) Le nombre α vaut $\frac{\pi}{6}$ rad.
b) La deuxième solution est $\frac{5\pi}{6}$ rad, c'est-à-dire $\pi - \alpha$.
c) Les solutions de l'équation $\sin x = 0{,}5$ sont les réels x tels que $x = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ et $x = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$ (k entier relatif).

3. a) Le nombre α_1 vaut $\frac{\pi}{3}$ rad et le nombre α_2 vaut $\frac{2\pi}{3}$ rad.

b) L'équation $4t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ a pour solution $t = \frac{\pi}{24}$ et l'équation $4t + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ a pour solution $t = \frac{\pi}{8}$.
c) La pulsation ω vaut 4. Donc la période T vaut $\frac{\pi}{2}$.

d) Ce sont les réels t tels que $t = \frac{\pi}{24} + k \times \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{\pi}{8} + k \times \frac{\pi}{2}$ (k entier relatif).

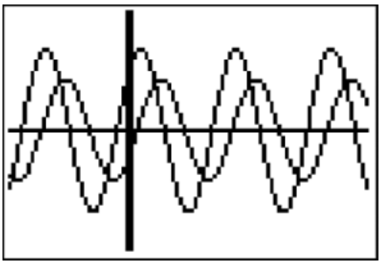
J'utilise un logiciel

Pages 121 et 122

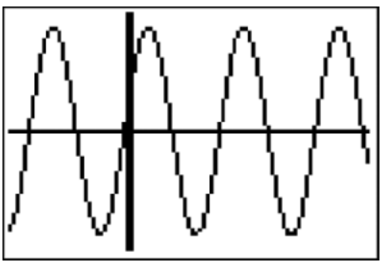
Déterminer la somme de deux fonctions sinusoïdales de même fréquence

1. a) $T_1 = 0{,}02.$; $a_1 = 48$; $T_2 = 0{,}02$; $a_2 = 30$.

b)



et



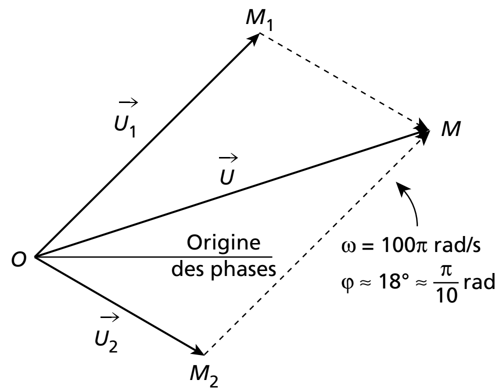
c) Pour la tension somme, graphiquement : $T = 0{,}02$; $a = 62$; et $\varphi = \frac{\pi}{10}$.

d) $u(t) = 62\sin(100\pi t + \frac{\pi}{10})$.

e) Non, car $62 \neq 48 + 30$ et $\frac{\pi}{10} \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$.

f) Elle reste la même.

2. a) Échelle : 1 cm pour 10 V.



b) Graphiquement : $a = 62$ et $\varphi = \frac{\pi}{10}$ rad.

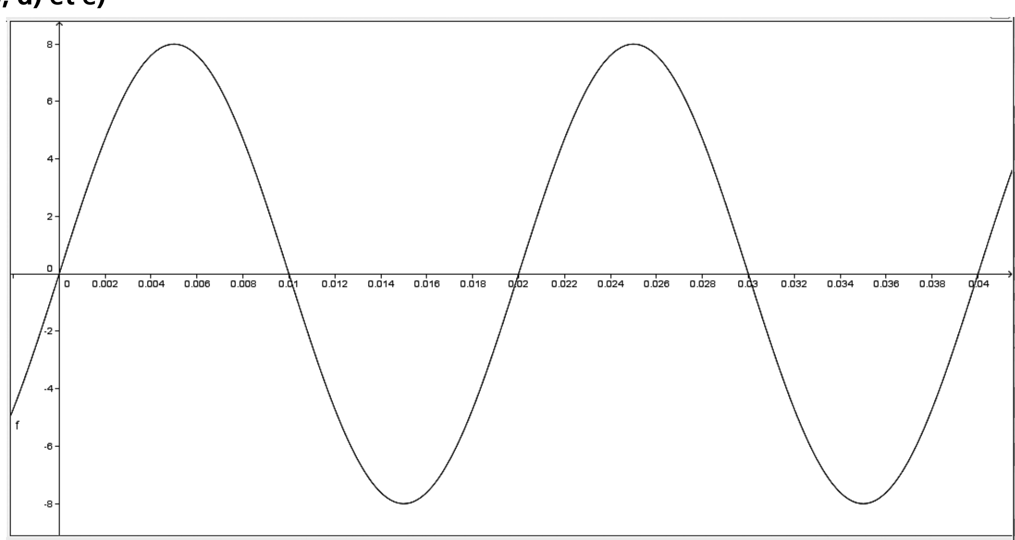
c) On obtient les mêmes résultats.

Déterminer l'allure d'un signal de sortie

1. a) $\omega = 100\pi$ rad/s d'où $T = 0{,}02$ s.

b) L'amplitude du signal d'entrée vaut 8 V.

c), d) et e)

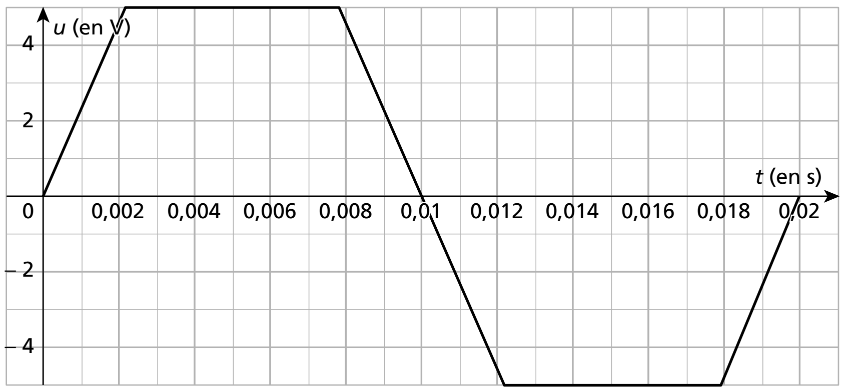


e) On édite les droites d'équations $y = 5$ et $y = -5$.

2. a) et b) Avec $y = 5$, les abscisses des points d'intersection sont 0,0021 ; 0,0079 ; 0,0221 ; 0,0279.

Avec $y = -5$, les abscisses des points d'intersection sont 0,0121 ; 0,0179 ; 0,0321 ; 0,0379.

c)



3. a) Le signal est écrêté sur l'intervalle [0,0021 ; 0,0079].
La durée d'écrêtage est
$0{,}0079 - 0{,}0021 = 0{,}0058$ s.

b) $0{,}0058/0{,}01 = 0{,}58$.
Le signal d'entrée est écrêté à 58 %.

Exercices et problèmes

Pages 123 à 126

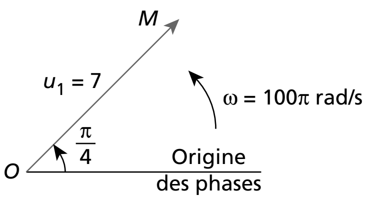
Exercices

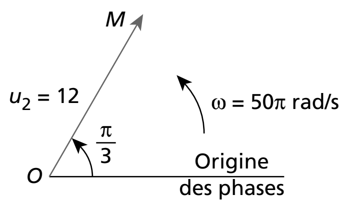
Vecteur de Fresnel

1. a) u_1 : $a = 7$; $\omega = 100\pi$ rad/s ; $T = 0{,}02$ s ; $f = 50$ Hz ; $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

u_2 : $a = 12$; $\omega = 50\pi$ rad/s ; $T = 0{,}04$ s ; $f = 25$ Hz ; $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$.

b)

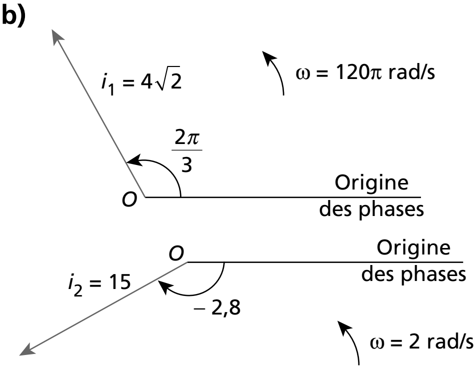




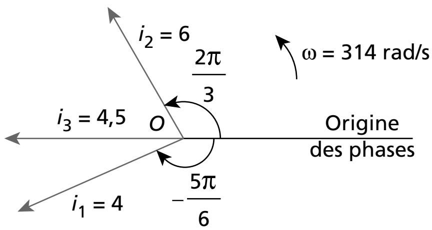
2. a) i_1 : $A = 4\sqrt{2}$; $\omega = 120\pi$; $f = 60$ Hz ; $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

i_2 : $A = 15$; $\omega = 2$; $f = \dfrac{1}{\pi} \approx 0{,}32$ Hz ; $\varphi = -2{,}8$.

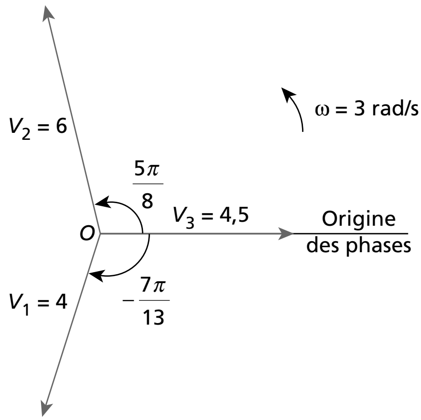
b)



3. a), b) et c)



4. a), b) et c)

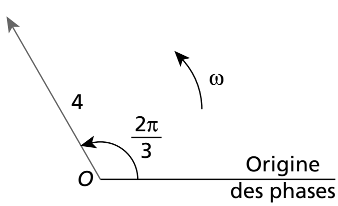


5. $f(t) = 2{,}8\sin(50t)$ et $g(t) = 3{,}7\sin(50t + \frac{\pi}{9})$.

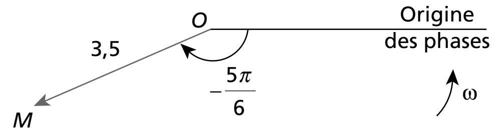
6. $V_1(t) = 1{,}5\sin(20t)$;
$V_2(t) = 1{,}5\sin(20t + \frac{2\pi}{3})$;
$V_3(t) = 1{,}5\sin(20t - \frac{2\pi}{3})$.

7. $V_1(t) = 2\sin(8t)$; $V_2(t) = 2\sin(8t - 0{,}64)$ ou $V_2(t) = 2\sin(8t - \frac{\pi}{5})$;
$V_3(t) = 3\sin(8t + 1{,}44)$.

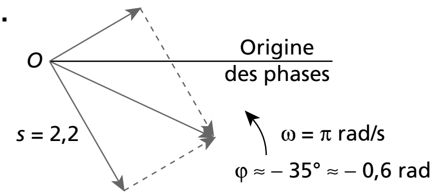
8. a) $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\frac{\pi}{2} - \omega t - \frac{\pi}{6} = -\omega t + \frac{\pi}{3}$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.
Soit $x = \pi - (-\omega t + \frac{\pi}{3}) = \omega t + \frac{2\pi}{3}$.
b)



9. a) $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\frac{\pi}{2} - \omega t - \frac{2\pi}{3} = -\omega t - \frac{\pi}{6}$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.
Soit $x = \pi - (-\omega t - \frac{\pi}{6}) = \omega t + \frac{7\pi}{6}$;
et $x = \omega t - \frac{5\pi}{6}$.
b)



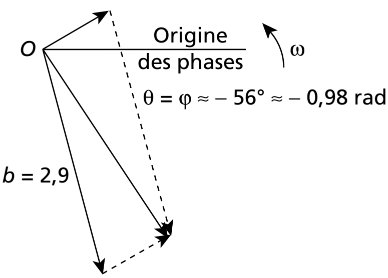
10.



$s(t) = 2{,}2\sin(\pi t - 0{,}6)$.

11. $s(t) = 3\sin(\omega t)$.

12.



Graphiquement, on trouve $b = 2{,}9$ et $\theta = -0{,}98$.

Équations trigonométriques

13. a) $0{,}911 + k \times 2\pi$; $2{,}231 + k \times 2\pi$.
b) $-0{,}201 + k \times 2\pi$; $-2{,}940 + k \times 2\pi$.

14. a) $-5{,}925$; $-3{,}499$; $0{,}358$; $2{,}784$.
b) $-6{,}792$; $-2{,}633$; $-0{,}509$; $3{,}650$.

15. a) $-2{,}862$; $-0{,}280$; $3{,}421$; $6{,}003$.
b) $-5{,}444$; $-3{,}980$; $0{,}839$; $2{,}303$; $7{,}122$; $8{,}586$.

16. a) $-2{,}106 + k \times 2\pi$; $2{,}106 + k \times 2\pi$.
b) $-1{,}000 + k \times 2\pi$; $1{,}000 + k \times 2\pi$.

17. a) $1{,}146$; $5{,}137$; $7{,}429$; $11{,}420$.
b) $2{,}388$; $3{,}895$; $8{,}671$; $10{,}178$.

18. a) $-7{,}996$; $-4{,}570$; $-1{,}713$; $1{,}713$; $4{,}570$; $7{,}996$.

b) $-9{,}347$; $-3{,}219$; $-3{,}064$; $3{,}064$; $3{,}219$; $9{,}347$.

19. a) $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$.

b) $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$.

c) $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.

20. a) $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$.

b) $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$.

c) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$.

21. a) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{12}$.

b) $\frac{31\pi}{96}$; $\frac{47\pi}{96}$; $\frac{79\pi}{96}$; $\frac{95\pi}{96}$; $\frac{127\pi}{96}$; $\frac{143\pi}{96}$; $\frac{175\pi}{96}$; $\frac{191\pi}{96}$.

c) $\frac{\pi}{24}$; $\frac{5\pi}{24}$; $\frac{25\pi}{24}$; $\frac{29\pi}{24}$.

22. a) $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{18}$.

b) $-\frac{27\pi}{32}$; $-\frac{11\pi}{32}$; $\frac{5\pi}{32}$; $\frac{21\pi}{32}$.

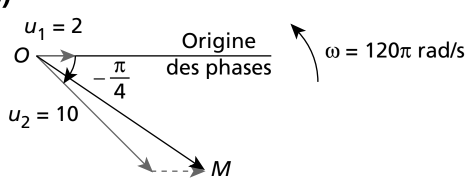
c) $-\frac{9\pi}{12}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$.

Problèmes

Problème 1

1. a) La période est $T = 1/60 \approx 0{,}017$ s.

b)



2. $u(t) \approx 11{,}5\sin(120\pi t - 0{,}68)$.

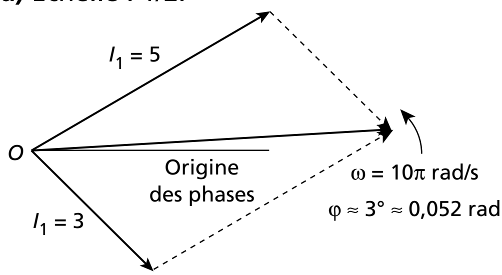
Problème 2

u_1 : $a = 30$; $\varphi = 0$ rad. u_2 : $a = 50$; $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ rad.

À l'aide d'un diagramme de Fresnel, on lit : u : $a = 77{,}5$; $\varphi = -19° = -0{,}332$ rad.
Donc la tension somme a pour valeur efficace $U = 77{,}5$ V et est en retard sur u_1 de 0,332 rad.

Problème 3

a) Échelle : 1/2.



b) Graphiquement, on lit : $a = 6{,}5$; $\phi = 3° = 0{,}052$ rad.

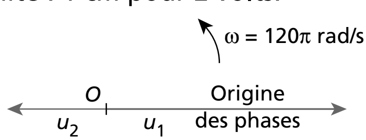
c) $i(t) = 6{,}5\sqrt{2}\sin(100\pi t + 0{,}052)$.

Problème 4

1. $T = \frac{1}{60} \approx 0{,}017$ s ; $\omega = 120\pi$ rad/s.

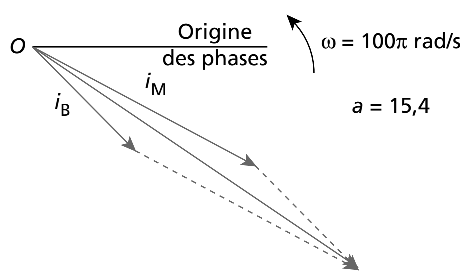
2. a) $u_1(t) = 10\sin(120\pi t)$ et $u_2(t) = 2\sin(120\pi t - \pi)$.

b) Unité : 1 cm pour 2 volts.



Problème 5

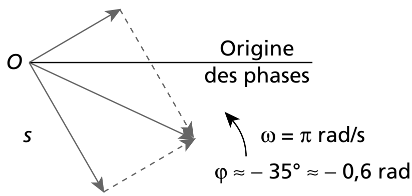
1.



2. L'intensité efficace I vaut $15{,}4\sqrt{2}$ A.

Problème 6

L'intensité du courant du dipôle 3 est obtenue par : $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.



Graphiquement, on lit : $a = 0{,}45$;
$\varphi = -\,19° = -\,0{,}33$ rad.
$i_3(t) = 0{,}45\sqrt{2}\sin(100\pi t - 0{,}33)$.

Problème 7

a) Cela revient à résoudre $\sin(t - \frac{\pi}{3}) = 0{,}5$.

Soient les ensembles de solutions
$\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$; $\frac{7\pi}{6} + k \times 2\pi$ (k entier relatif).

Les solutions sur $[0\ ;\ 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

b) Cela revient à résoudre $\sin(2t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soient les ensembles de solutions

$\frac{\pi}{6} + k \times \pi$; $\frac{\pi}{3} + k \times \pi$ (k entier relatif).

Les solutions sur $[0\ ;\ 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

c) Cela revient à résoudre $\sin(t + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soient les ensembles de solutions
$\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$; $\pi + k \times 2\pi$ (k entier relatif).

Les solutions sur $[0\ ;\ 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{2}$ et π.

d) Cela revient à résoudre $\sin(3t) = 1$.
Soient les ensembles de solutions
$\frac{\pi}{6} + k \times \frac{2\pi}{3}$ (k entier relatif).

Les solutions sur $[0\ ;\ 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Problème 8

D'après l'énoncé, $A = 20$,
$\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi$ et $u(0) = 20$.

$u(0) = 20\sin(\varphi) = 20$. D'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad.
L'expression de la tension est
$u(t) = 20\sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$.

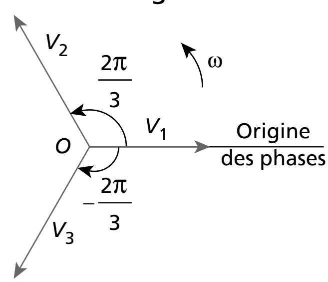
Problème 9

a) La pulsation vaut 100π. Donc la période vaut 0,02 s.
D'où $T = 0{,}02$.
b) L'équation $u(t) = 220\sqrt{2}$ lorsque
$\sin(100\pi t - \frac{\pi}{3}) = 1$.
Donc lorsque $100\pi t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Soit lorsque
$t = \frac{1}{120} + k \times 0{,}02$.

Problème 10

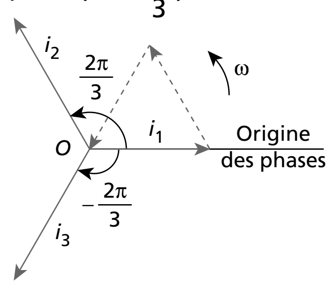
a) $v_1(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t)$;
$v_2(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$;
$v_3(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$.

b)



Problème 11

a) $i_1(t) = 0{,}45\sin(\omega t)$; $i_2(t) = 0{,}45\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$;
$i_3(t) = 0{,}45\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$.



b) L'intensité du courant dans la ligne de neutre est nulle.

Je teste mes connaissances

Page 127

1. B	**6.** A
2. A	**7.** A
3. C	**8.** B
4. C	**9.** A
5. B	**10.** C

Je m'entraîne au CCF

Page 128

Exercice 1

1. a) I_1 : $A_1 = 3$; $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{0{,}02} = 100\pi$ rad/s ; $\varphi_1 = 0$ rad.

I_2 : $A_2 = 1{,}5$; $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{0{,}02} = 100\pi$ rad/s ; $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

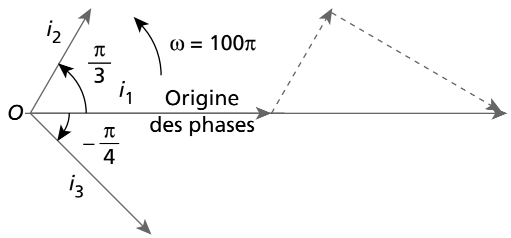
I_3 : $A_3 = 2$; $\omega_3 = \dfrac{2\pi}{0{,}02} = 100\pi$ rad/s ; $\varphi_3 = -\dfrac{\pi}{4}$ rad.

b) $i_1(t) = 3\sin(100\pi t)$;

$i_2(t) = 1{,}5\sin(100\pi t + \dfrac{\pi}{3})$;

$i_3(t) = 2\sin(100\pi t - \dfrac{\pi}{4})$.

2. a) et b)
Échelle : 1 cm pour 0,5 V.



c) $i(t) = 5{,}15\sin(100\pi t)$.

Exercice 2

La pulsation vaut 100π. Donc la période vaut 0,02 s.
D'où $T = 0{,}02$.
L'équation $u(t) = 110\sqrt{2}$ revient à résoudre l'équation $\sin(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}) = 0{,}5$.

Donc lorsque $100\pi t + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$ ou $100\pi t + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$.

Soit lorsque $t = \dfrac{1}{600} + k \times 0{,}02$ ou

$t = \dfrac{1}{200} + k \times 0{,}02$ (k entier relatif).
Les solutions sur $[0 ;\ 0{,}05]$ sont 0,002 ; 0,005 ; 0,022 ; 0,025 ; 0,042 ; et 0,045.

Produit scalaire dans le plan 10

Activités

Page 129

L'angle est égal à : 180° – (90° – 35°) = 125°.

$W_{\vec{F}} = 400 \times 500 \times \cos 20° = 187\ 939$ joules.

Le résultat est positif ; c'est un travail moteur.

$W_{\vec{P}} = 750 \times 500 \times \cos 125° = -\ 215\ 091$ joules.

Le résultat est négatif ; c'est un travail résistant.

Pages 130 et 131

Est-ce que je sais ?

1. a) $\overrightarrow{AB}(4\ ;\ -4)\ ;\ \overrightarrow{AC}(3\ ;\ 2)$.

b) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$;

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

2. a) $\alpha \approx 73°$.

b) $\beta \approx 107°$.

Activité 1

1. a) • $\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC} = 24$.

• Ce résultat est un nombre réel.

b) • Le produit scalaire peut être positif ou négatif.

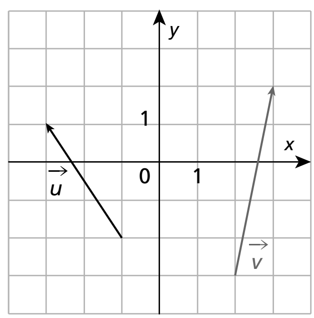
• Le signe du produit scalaire dépend de la mesure α de l'angle $\widehat{BAC}$.

• $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$ si α est compris entre 0° et 90° ; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$ si α est compris entre 90° et 180°.

Le cosinus d'un angle aigu est positif ; le cosinus d'un angle obtus est négatif. Les normes étant des grandeurs positives, on en déduit le signe du produit scalaire.

• Si les points A et B, ou A et C, sont confondus, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à 0.

2.



• $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 1 + 3 \times 5 = 13$.

• Le produit scalaire est un nombre ; on ne peut donc pas le dessiner.

3. • $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

• $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$; $\|\overrightarrow{AD}\| = 3$; $\|\overrightarrow{AC}\| = 6$.

• $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2 - 3^2) = 5{,}5$.

Activité 2

1. • $\alpha = 90°$.

• La valeur de α est toujours 90°.

• Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

2. • Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

• $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

- Si $\alpha = 90°$, alors $\cos \alpha = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times 0 = 0$.

Activité 3

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 3 + 5 \times 4 = -6 + 20 = 14$.
- $3(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 3 \times 14 = 42$.
- $3\vec{u}(-6\ ;\ 15)$.
- $(3\vec{u}) \cdot \vec{v} = -6 \times 3 + 15 \times 4 = -18 + 60 = 42$.
- On a bien $3(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (3\vec{u}) \cdot \vec{v}$.

Exercices et problèmes

Pages 135 à 139

Exercices

Appliquer la définition du produit scalaire

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 \times 8 \times \cos 60° = 48$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 \times 6 \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -27$.

2. a) $\widehat{BAC} = 45°$.

b) $AC = 3\sqrt{2}$ (en cm).

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 3 \times \cos 90° = 0$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3\sqrt{2} \times \cos 45° = 9$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos 90° = 0$.

3. a) $AH = \dfrac{8\sqrt{3}}{2}$ cm ; $BH = 4$ cm.

b) $\widehat{BAH} = 30°$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \times 8 \times \cos 60° = 32$; $\overrightarrow{AB}^2 = 8 \times 8 \times \cos 0° = 64$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 8 \times 4\sqrt{3} \times \cos 30° = 48$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = 8 \times 4 \times \cos 60° = 16$; $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 8 \times 4\sqrt{3} \times \cos 90° = 0$.

4. a) Le triangle DEF est rectangle en D car $EF^2 = DE^2 + DF^2$.

b) $\cos \widehat{DFE} = 0{,}8$; $\cos \widehat{DEF} = 0{,}6$.

c) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 3 \times 4 \times \cos 90° = 0$; $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD} = 4 \times 5 \times \cos \widehat{DFE} = 16$; $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = 9$.

5. a) $\cos 0° = 1$ et $\cos 180° = -1$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 5 \times 1 = 10$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 3 \times (-1) = -6$; $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 1 \times 4 \times 1 = 4$; $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 1 \times (-1) = -2$.

6. a) $\widehat{MPN} = 45°$; $\widehat{MPR} = 135°$.

b) $MP = 3\sqrt{2}$ cm.

c) $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NR} = 3 \times 6 \times \cos 90° = 0$; $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PR} = 3 \times 3 \times (-1) = -9$; $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NR} = 3 \times 6 \times 1 = 18$.

d) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 3 \times 3\sqrt{2} \times \cos 45° = 9$; $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PR} = 3 \times 3\sqrt{2} \times \cos 135° = -9$.

Utiliser l'expression analytique du produit scalaire

7. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 18$; $\vec{u}^2 = 53$; $\|\vec{v}\|^2 = 41$.

8. a) $\overrightarrow{AB}(-4\ ;\ -4)$; $\overrightarrow{BA}(4\ ;\ 4)$; $\overrightarrow{CB}(-7\ ;\ 7)$; $\overrightarrow{CA}(-3\ ;\ 11)$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4) \times 3 + (-4) \times (-11) = 32$.

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times 7 + 4 \times (-7) = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

d) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = (-7) \times (-3) + 7 \times 11 = 98$. Donc $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 98$.

e) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$; $BC = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{98}$.

9. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -29$.

b) $\|\vec{u}\| = 5$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{34}$.

c) $\cos \widehat{AOB} \approx -0{,}99469$; $\widehat{AOB} \approx 3{,}04$ rad.

10. a) $\overrightarrow{AB}(4\ ;\ 10)$; $\overrightarrow{AC}(-3\ ;\ 2)$.

b) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116}$; $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times (-3) + 10 \times 2 = 8$.

d) $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{8}{\sqrt{116} \times \sqrt{13}} \approx 0{,}206$; $\widehat{BAC} \approx 78°$.

Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes

11. a) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 8 \times 12 \times \cos 70° \approx 32{,}83$.

b) $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{DB}$.

c) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}(DB^2 - 8^2 - 12^2)$.

d) $32{,}83 = \dfrac{1}{2}(DB^2 - 8^2 - 12^2)$;

$DB^2 \approx 273{,}66$; $DB \approx 16{,}54$ cm.

e) $AC \approx 11{,}93$ cm.

Appliquer les propriétés du produit scalaire

12. a) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2 \times (-8) = -16$;
$(-\vec{u}) \cdot (5\vec{v}) = -5(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -5 \times (-8) = 40$.

b) $\vec{u} \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 20 - 8 = 12$;
$(4\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 4\|\vec{u}\|^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\|\vec{v}\|^2 = 40 + 8 - 48 = 0$.

13. a) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$
$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

b) $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.

Reconnaître des vecteurs orthogonaux

14. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-1) + 2 \times 2{,}5 = 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

15. $\overrightarrow{AB}(1 ; 2)$; $\overrightarrow{AC}(2 ; -1)$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

16. Vecteurs orthogonaux : $\vec{u}$ et $\vec{w}$; $\vec{u}$ et $\vec{y}$; $\vec{v}$ et $\vec{t}$; $\vec{t}$ et $\vec{z}$.

17. La phrase qui devient fausse en la transposant aux vecteurs est la phrase ④ : le produit scalaire de deux vecteurs peut être nul sans que les vecteurs soient nuls (vecteurs orthogonaux).

Utiliser le produit scalaire en physique

18. a) $\vec{F} \cdot \vec{F'} = 30 \times 10 \times \cos 35° \approx 246$ (arrondi à l'unité).

b) $\vec{R}^2 = (\vec{F} + \vec{F'})(\vec{F} + \vec{F'}) = \vec{F}^2 + \vec{F} \cdot \vec{F'} + \vec{F} \cdot \vec{F'} + \vec{F'}^2 = \vec{F}^2 + \vec{F'}^2 + 2\vec{F} \cdot \vec{F'}$.

c) $\|\vec{R}\|^2 = 30^2 + 10^2 + 2 \times 246 = 1\,492$.
D'où $R = \sqrt{1492} \approx 38{,}6$ N.

19. a) Travail du poids à la descente :
$25 \times 10 \times \cos 70° \approx 85{,}5$ joules. C'est un travail moteur.

b) Travail du poids à la montée :
$25 \times 10 \times \cos 110° \approx -85{,}5$ joules. C'est un travail résistant.

Problèmes

Problème 1

a) $M(24 ; 8)$; $N(12 ; 16)$.
$\overrightarrow{OM}(24 ; 8)$; $\overrightarrow{ON}(12 ; 16)$.

b) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 24 \times 12 + 8 \times 16 = 416$.

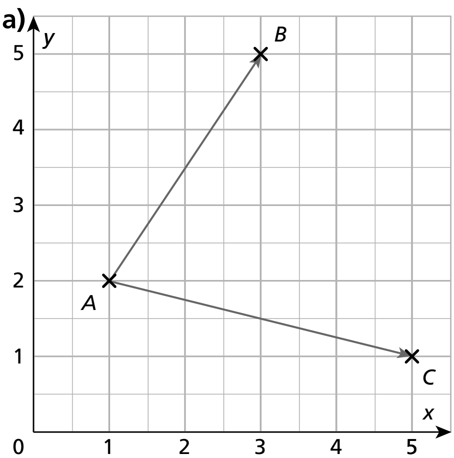
c) $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{24^2 + 8^2} \approx 25{,}3$.

d) $\|\overrightarrow{ON}\| = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.

e) $416 = 25{,}3 \times 20 \times \cos \widehat{MON}$;
$\cos \widehat{MON} \approx 0{,}8221$; $\widehat{MON} \approx 35°$.

Problème 2

a)



b) $\overrightarrow{AB}(2 ; 3)$; $\overrightarrow{AC}(4 ; -1)$; $\overrightarrow{BC}(2 ; -4)$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 - 3 = 5$.

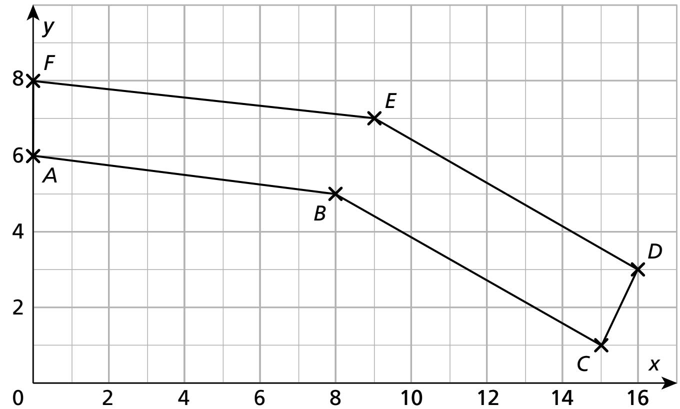
d) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{13}$; $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{17}$; $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{20}$.

e) $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{5}{AB \times AC} \approx 0{,}336$; $\widehat{BAC} \approx 70°$.

f) $AB \approx 1{,}8$ m ; $AC \approx 2{,}06$ m ; $BC \approx 2{,}24$ m.

Problème 3

1. a)



b) $\overrightarrow{BA}(-8 ; 1)$; $\overrightarrow{BC}(7 ; -4)$.

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -56 - 4 = -60$.

d) $BA = \sqrt{65} \approx 8{,}06$; $BC = \sqrt{65} \approx 8{,}06$.

e) $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{-60}{\left(\sqrt{65}\right)^2} \approx -0{,}923$;

$\widehat{ABC} \approx 157°$.

2. La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ est comprise entre 154° et 158°. L'angle correspond donc à la condition d'un glissement minimum.

Problème 4

1. a) et b) Voir la réponse à la question 2. e.

2. a) $f'(x) = -0{,}5x + 4$.

b) $-0{,}5x + 4 > 0$ pour $x < 8$; $-0{,}5x + 4 < 0$ pour $x > 8$.

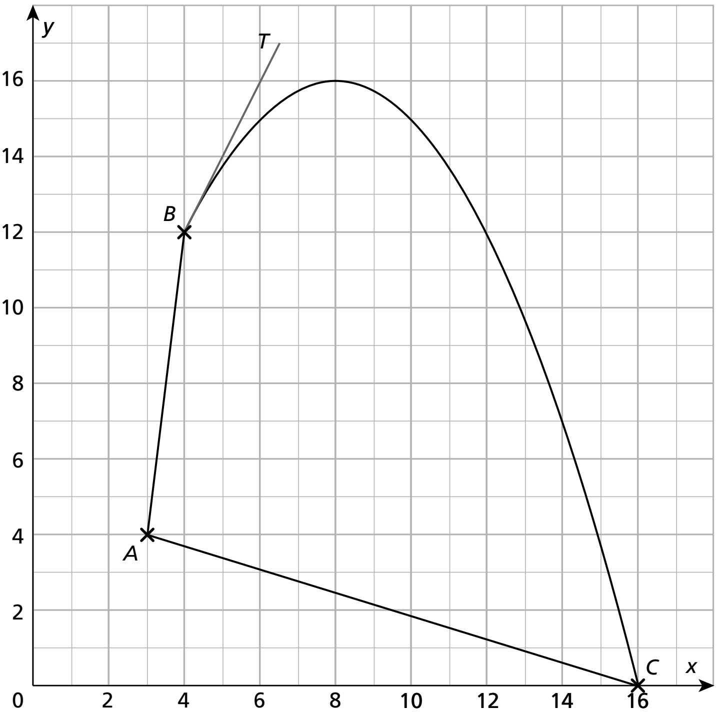
$f'(x)$ est positif pour x variant de 4 à 8 et négatif pour x variant de 8 à 16.

c)

x	4	8	16
$f(x)$	12 ↗	16	↘ 0

d) $f'(4) = 2$. C'est le coefficient directeur de la tangente T.

e)



3. a) $\overrightarrow{AB}(1\ ;\ 8)$; $\overrightarrow{AC}(13\ ;\ -4)$.

b) $AB = \sqrt{65} \approx 8{,}1$; $AC = \sqrt{185} \approx 13{,}6$.

c) $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC} = 13 - 32 = -19$.

d) $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{-19}{8{,}1 \times 13{,}6} = -0{,}172$;

$\widehat{BAC} \approx 100°$.

Problème 5

a) $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\ (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA}\ .\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\ .\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}^2$

$= \overrightarrow{BA}^2 + 2(\overrightarrow{BA}\ .\ \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}^2$.

b) On sait que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

$2(\overrightarrow{BA}\ .\ \overrightarrow{AC}) = 2(-\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}) = -2(\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC})$.

Donc $BC^2 = BA^2 - 2(\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}) + AC^2$ (relation (2)).

c) $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC}$.

d) On remplace dans la relation (2) $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}$ par l'expression écrite au c.

On obtient la relation (1) :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

e) Si le triangle ABC est rectangle en A, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Donc $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC} = 0$ et on a bien :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$.

f) $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos\widehat{A}$

$= 144 + 64 - 2 \times 12 \times 8 \times \cos 130° \approx 273{,}68$.

Donc $BD \approx 16{,}54$ cm.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \times \cos\widehat{D}$

$= 64 + 144 - 2 \times 8 \times 12 \times \cos 70° \approx 142{,}33$.

Donc $AC \approx 11{,}9$ cm.

Problème 6

1. La vitesse $\vec{v}$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

2. a) $\widehat{AOC} = 120° - 65° = 55°$.

b. $\widehat{OAB} = 180° - 55° = 125°$.

3. a) $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OC} = 80 \times 20 \times \cos 55° \approx 917{,}72$.

b) $OB^2 = 80^2 + 20^2 + 2 \times 917{,}22 = 8\,635{,}44$;
$OB \approx 93$.

4. $20^2 = 80^2 + 8\,635 - 2 \times 80 \times 93 \times \cos \widehat{AOB}$.
D'où $\cos \widehat{AOB} \approx 0{,}9835$ et $\widehat{AOB} \approx 10°$.

5. a) La vitesse de l'avion est environ 93 m/s.
b) La « route » de l'avion est :
$65° + 10° = 75°$.

Problème 7

$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \times OA \times AB \times \cos \widehat{OAB}$.
$OB^2 = 2{,}5^2 + 2{,}2^2 - 2 \times 2{,}5 \times 2{,}2 \times \cos 100° \approx 13$.
$OB \approx 3{,}6$ m.

Je teste mes connaissances

Page 140

1. B
2. B
3. A
4. C
5. B
6. B
7. C
8. C
9. A
10. B

Nombres complexes

11

Activités

Page 141

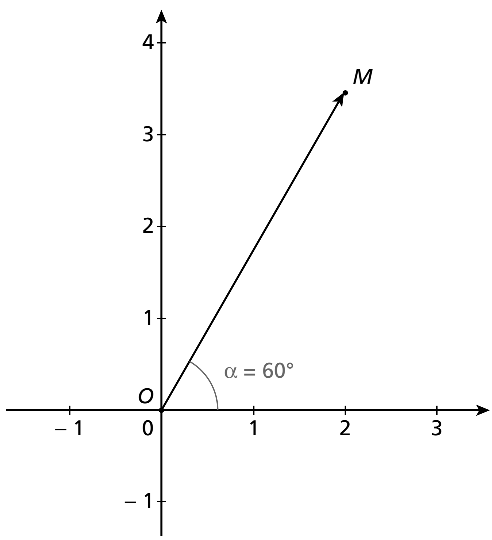
$(-1+j)^2 + j = 1 - 2j + j^2 + j = 1 - 1 - 1 + j$
$= -j.$
$(-j)^2 + j = j^2 + j = -1 + j.$

Pages 142 et 143

Est-ce que je sais ?

1. $(1-x)(1+x) = 1 - x^2.$
$(3-a)^2 = 9 - 6a + a^2.$

2.



Activité 1

1. a) $I = 4.\ \varphi = \dfrac{\pi}{3}.$

b) $U = 6.\ \varphi = -\dfrac{\pi}{4}.$

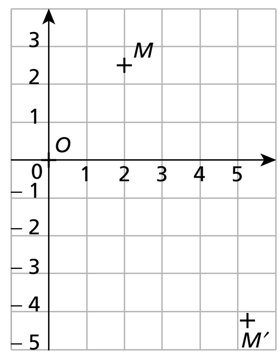
2. a) $z = 4(\cos\dfrac{\pi}{3} + j\sin\dfrac{\pi}{3})$;

$z' = 6[\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + j\sin(-\dfrac{\pi}{4})].$

b) $z = 4(\dfrac{1}{2} + j \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2 + 2\sqrt{3}j.$

$z' = 6(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + j \times \dfrac{-\sqrt{2}}{2}) = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\ j.$

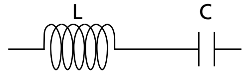
3.



Activité 2

1. Circuit LC en série

$z = 2j + (-3j) = 2j - 3j = -j.$



2. Circuit RLC en parallèle

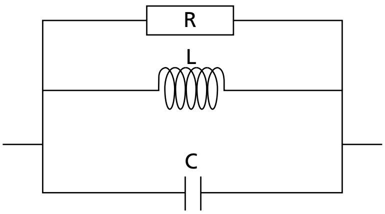
$\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}.$

a) On a $\dfrac{1}{2j} = \dfrac{1 \times j}{2j \times j} = \dfrac{j}{2j^2} = \dfrac{j}{-2}$

et $\frac{1}{-3j} = \frac{1 \times j}{-3j \times j} = \frac{j}{-3 \times (-1)} = \frac{j}{3}$.

Donc

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{6} + \frac{j}{-2} + \frac{j}{3} = \frac{1}{6} - \frac{3 \times j}{6} + \frac{2j}{6} = \frac{1-j}{6}.$$



b) $z' = \frac{6}{1-j} = \frac{6 \times (1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{6+6j}{1-j^2}$

$= \frac{6+6j}{2} = 3 + 3j.$

Activité 3

a) $z_1 = 3{,}6(\cos 2{,}55 + j \sin 2{,}55)$;
$z_2 = 5{,}37(\cos 5{,}09 + j \sin 5{,}09)$.
$z_3 = 7(\cos 0 + j \sin 0)$;
$z_4 = 1(\cos 1{,}55 + j \sin 1{,}55)$;
$z_5 = 3(\cos 4{,}7 + j \sin 4{,}7)$.

b) $z_6 = 4{,}38 + 2{,}4j$; $z_7 = 2 - 4j$.

J'utilise un logiciel

Page 147

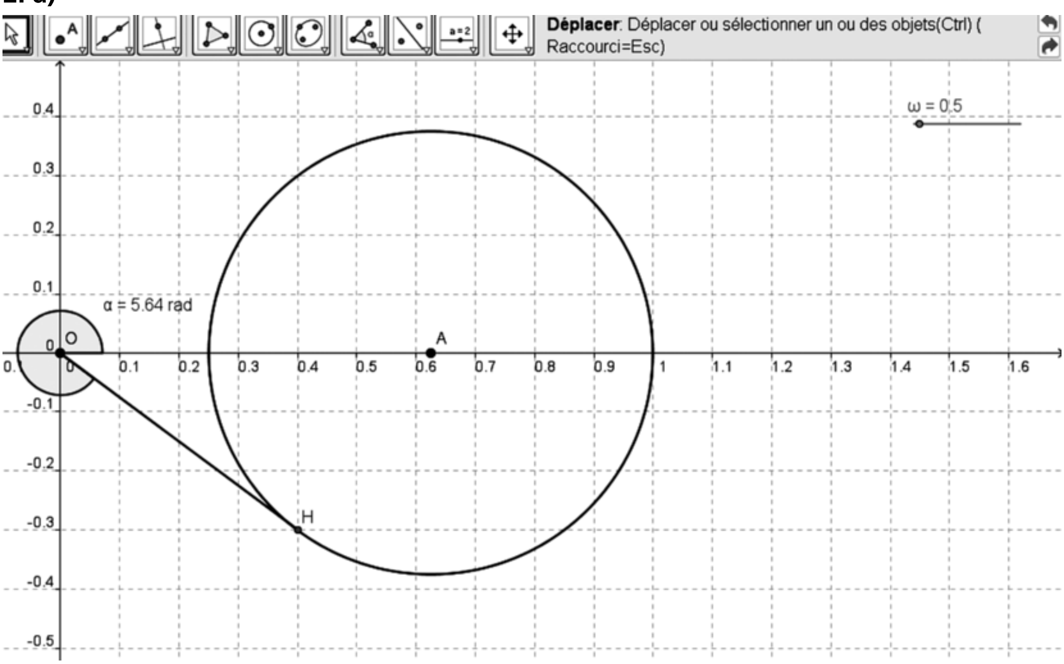
Analyser la fonction de transfert d'un montage

1. a) On a $H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(1+\frac{1}{2}j)(1-2j)}{(1+2j)(1-2j)}$

$= \frac{1 - 2j + \frac{1}{2}j + 1}{1+4} = \frac{2}{5} - \frac{3}{10}j = 0{,}4 - 0{,}3j.$

b) Les points H se situent sur le cercle de centre $A(0{,}625 ; 0)$ et de rayon 0,375.

2. a)



b) On obtient $\theta \approx 5{,}64$ rad.

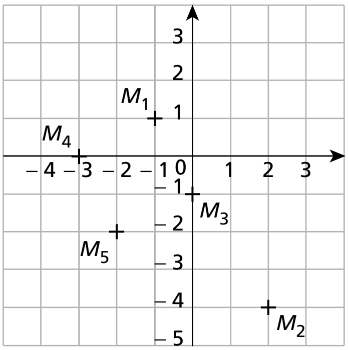
Exercices et problèmes

Pages 148 à 151

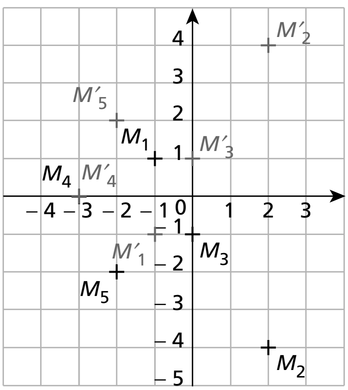
Exercices

Représenter un nombre complexe

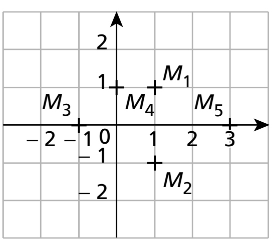
1.



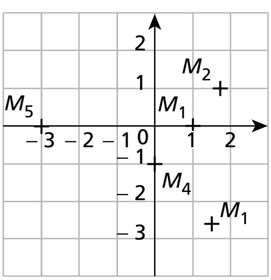
2.



3.

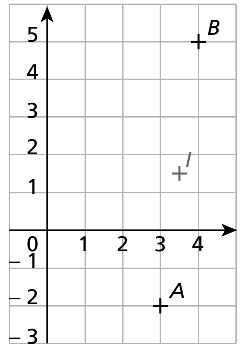


4.



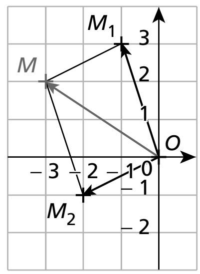
5.

a) et c)

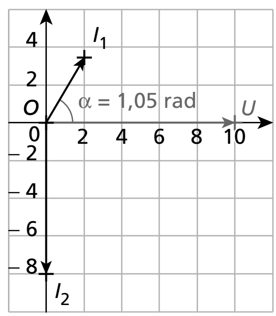


b) $z = \dfrac{3 - 2j + 4 + 5j}{2} = \dfrac{7 + 3j}{2} = 3{,}5 + 1{,}5j.$

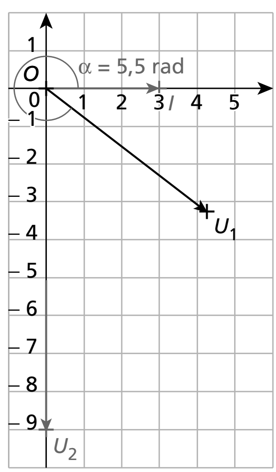
6.



7. a)



b)



Calculer avec les nombres complexes

8. a) $z + z' = -2 - 2j$.
b) $3z - 2z' = 6 - 3j + 8 - 2j = 14 - 5j$.
c) $z \times z' = (2 - 3j)(-4 + j)$
$= -8 + 2j + 12j + 3 = -5 + 14j$.
d) $z^2 = (2 - 3j)^2 = 4 - 12j + 9j^2 = -5 - 12j$.

9. a) $z + z' = 2 + 0j = 2$.
b) $3z - 2z' = 9 + 6j + 2 + 4j = 11 + 10j$.
c) $z \times z' = (3 + 2j)(-1 - 2j)$
$= -3 - 6j - 2 - 4j = -5 - 10j$.
d) $z^2 = 9 + 12j + 4j^2 = 5 + 12j$.

10. a) $(1 + j)^2 = 1 + 2j + j^2 = 1 + 2j - 1 = 2j$.
b) $(2 - j)^2 = 4 - 4j + j^2 = 4 - 4j - 1 = 3 - 4j$.
c) $(3 - j)(3 + j) = 9 - j^2 = 9 + 1 = 10$.

11. a) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}j$.
b) $\dfrac{1}{z'} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}j$.
c) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}j$.
d) $\dfrac{1+z}{1-z'} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}j$.

12. a) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3-2j} = \dfrac{3+2j}{9+4} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}j$.
b) $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{1-j} = \dfrac{1+j}{1+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}j$.
c) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{3-2j}{1-j} = \dfrac{(3-2j)(1+j)}{1+1}$
$= \dfrac{3+3j-2j+2}{2} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}j$.
d) $\dfrac{1+z}{1-z'} = \dfrac{-2-2j}{2-j} = \dfrac{(-2-2j)(2+j)}{4+1}$
$= \dfrac{-4-2j+4j-2}{5} = -\dfrac{6}{5} + \dfrac{2}{5}j$.

13. a) $z = \dfrac{(3-2j)(5-j)}{25+1} = \dfrac{15-3j-10j-2}{26}$
$= \dfrac{13}{26} - \dfrac{13}{26}j$.
$z' = \dfrac{(3+2j)(5+j)}{25+1} = \dfrac{15+3j+10j-2}{26}$
$= \dfrac{13}{26} + \dfrac{13}{26}j$.
b) On constate que $\bar{z} = z'$.

14. a) $\underline{Z} = 10 - 50j$.
b) $\dfrac{1}{\underline{Z'}} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{j}{-150} + \dfrac{j}{200}$
$= \dfrac{1}{10} + \dfrac{-4j}{600} + \dfrac{3j}{600} = \dfrac{60-j}{600}$.
$\underline{Z'} = \dfrac{600}{60-j} = \dfrac{600(60+j)}{3\,600+1} = \dfrac{36\,000}{3\,601} + \dfrac{600}{3\,601}j$.

15. a) $T = \dfrac{12}{25} - \dfrac{16}{25}j$.
b) $|T| = \dfrac{\sqrt{400}}{25} = \dfrac{20}{25} = 0{,}8$.

16. L'équation équivaut à
$(1+3j)z = -2 + 4j$, c'est-à-dire $z = \dfrac{-2+4j}{1+3j}$.
$z = \dfrac{(-2+4j)(1-3j)}{1+9} = \dfrac{-2+6j+4j+12}{10}$
$= 1 + j$.

17. a) $(z - j)(z + j) = z^2 - j^2 = z^2 + 1$.
b) On a $(z - j)(z + j) = 0$ lorsque $z - j = 0$ ou $z + j = 0$.
Les solutions sont j et – j.

Passer d'une forme à une autre

18. $z_1 = 3(\cos\dfrac{\pi}{6} + j\sin\dfrac{\pi}{6}) = 3(\dfrac{\sqrt{3}}{6} + j \times \dfrac{1}{2})$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}j$.
$z_2 = 2(\cos\dfrac{\pi}{4} + j\sin\dfrac{\pi}{4}) = 2(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + j \times \dfrac{\sqrt{2}}{2})$
$= \sqrt{2} + \sqrt{2}j$.
$z_3 = \dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{-\pi}{3} + j\sin\dfrac{-\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2} + j \times \dfrac{-\sqrt{3}}{2})$
$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}j$.
$z_4 = 1(\cos\dfrac{5\pi}{4} + j\sin\dfrac{5\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}j$.

19. $z_1 = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + j\sin\dfrac{\pi}{3}) = 2(\dfrac{1}{2} + j \times \dfrac{\sqrt{3}}{2})$
$= 1 + \sqrt{3}j$.
$z_2 = 3(\cos\dfrac{\pi}{2} + j\sin\dfrac{\pi}{2}) = 3j$.

$z_3 = \frac{1}{4}(\cos 4\pi + j \sin 4\pi) = \frac{1}{4}.$

$z_4 = \frac{1}{2}(\cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2} (\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j)$
$= \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}j.$

20. $z_1 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$; $z_2 = \left[5, -\frac{\pi}{2}\right]$;
$z_3 = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$; $z_4 = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$; $z_5 = \left[1, -\frac{\pi}{4}\right].$

21. $|z_1| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{4}.$
Donc $z_1 = [3\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}].$

$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
d'où $\theta = \frac{\pi}{4}.$
Donc $z_2 = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}].$

$|z_3| = 7$; $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = -1$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{2}.$
Donc $z_3 = [7, -\frac{\pi}{2}].$

$|z_4| = 5$; $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$ d'où $\theta = 0.$
Donc $z_4 = [5, 0].$

$z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j.$

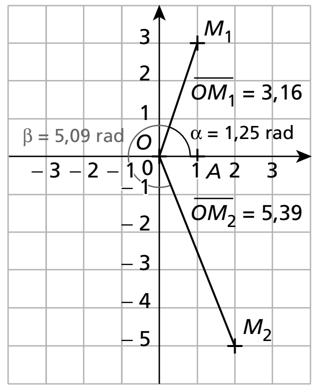
$|z_5| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
d'où $\theta = -\frac{\pi}{3}.$
Donc $z_5 = [1, -\frac{\pi}{3}].$

22. $|z_1| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16.$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ et $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}.$
En utilisant la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\theta \approx 1{,}25$ rad.

$|z_2| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \approx 5{,}39.$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$ et $\sin\theta = \frac{-5}{\sqrt{29}}.$
En utilisant la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\theta \approx -1{,}19$ rad.

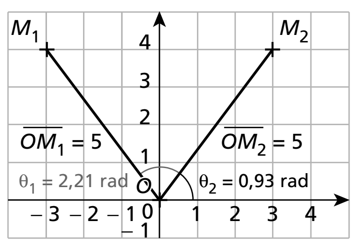


23. $|z_1| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

$\cos\theta = \frac{-3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}.$
En utilisant la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\theta \approx 2{,}21$ rad.

$|z_2| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}.$
En utilisant la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\theta \approx 0{,}93$ rad.



Problèmes

Problème 1

1. $\underline{Z}_1 = 10$; $\underline{Z}_2 = 200j$; $\underline{Z}_3 = -120j.$

2. $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{200j} + \frac{1}{-120j}$
$= \frac{60}{600} + \frac{-3j}{600} + \frac{5j}{600} = \frac{60+2j}{600}.$

$$\underline{Z} = \frac{600}{60+2j} = \frac{600(60-2j)}{3\,600+4}$$
$$= \frac{36\,000}{3\,604} - \frac{1\,200}{3\,604}j.$$

3. a) $\frac{1}{\underline{Z'}} = \frac{1}{\underline{Z_2}} + \frac{1}{\underline{Z_3}} = \frac{1}{200j} + \frac{1}{-120j}$

$$= \frac{j}{-200} + \frac{j}{120} = \frac{-3j}{600} + \frac{5j}{600} = \frac{j}{300}.$$

$$\underline{Z'} = \frac{300}{j} = \frac{300j}{-1} = -300j.$$

b) $\underline{Z} = \underline{Z_1} + \underline{Z'} = 10 - 300j.$

4. a) $\frac{1}{\underline{Z''}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{200j}$

$$= \frac{1}{10} - \frac{j}{200} = \frac{20-j}{200}.$$

$$\underline{Z''} = \frac{200}{20-j} = \frac{200(20+j)}{400+1}$$

$$= \frac{4\,000}{4\,001} + \frac{200}{4\,001}j.$$

b) $\underline{Z} = \underline{Z''} + \underline{Z_3} = \frac{4\,000}{4\,001} + \frac{200}{4\,001}j - 120j$

$$= \frac{4\,000}{4\,001} + \frac{479\,920}{4\,001}j.$$

Problème 2

1. a) $z_3 = -2 + 2j\sqrt{3}.$

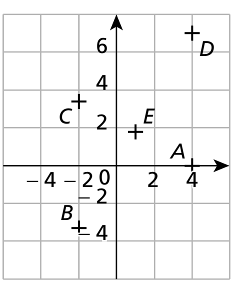
$$z_4 = 8(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}) = 8(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 4 + 4\sqrt{3}j.$$

$$z_5 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \sqrt{3}j.$$

b) $z_1 = [4\,;0]\,;\ z_2 = 4(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j) = [4\,; -\frac{2\pi}{3}].$

$z_3 = [4\,; \frac{2\pi}{3}].$

2.



3. a) $z_2^2 = 16(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j)^2 = 16(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}j - \frac{3}{4})$

$= -8 + 8\sqrt{3}j.$

b) $z_2^2 + 4z_2 + 16$

$= -8 + 8\sqrt{3}j + 4(-2 - 2\sqrt{3}j) + 16$

$= -8 + 8\sqrt{3}j - 8 - 8\sqrt{3}j + 16 = 0.$

Problème 3

1. a) $z_3 = z_2^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1.$

$z_4 = z_3^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$

b) Les prochains nombres z_n valent tous 0 ou 1.

c) Le point correspondant à $c = -1$ est dans l'ensemble de Mandelbrot car le module de z_n vaut 0 ou 1.

2. a) $z_3 = (-1 + i)^2 + i = 1 - 2i - 1 + i = -i.$

$z_4 = (-i)^2 + i = -1 + i.$

b) Les prochains nombres z_n valent $-i$ et $-1 + i$.

c) On a $|-i| = 1$ et $|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Le point correspondant à $c = i$ est dans l'ensemble de Mandelbrot.

3. Les modules des nombres z_n calculés sont inférieurs à 2.

4. a) $|z_5| = \sqrt{3{,}29^2 + 1{,}34^2} \approx 3{,}55.$

b) Le point correspondant à $c = 0{,}5 + 0{,}5i$ n'est pas dans l'ensemble de Mandelbrot car $|z_5|$ est strictement supérieur à 2.

Je teste mes connaissances

Page 152

1. C
2. B
3. A
4. B
5. B
6. B
7. B
8. A
9. A
10. A

Calcul intégral 12

Activités

Page 153

– $\frac{100}{3,6} \approx 27,8$. 100 km/h = 27,8 m/s.

$V(14) = a \times 14 = 27,8$. D'où $a = 1,986$.

– Il s'agit de $d_3(t) = 0,99t^2 + k$.

– La fonction d a pour expression $d(t) = 0,99t^2$.

$d(14) = 194,04$.

Pages 154 et 155

Est-ce que je sais ?

a) Cas n° 1 : $\frac{3 \times 1}{2} = 1,5$.

Cas n° 2 : $\frac{1,5 \times 1}{2} = 0,75$.

Cas n° 3 : $\frac{1,5 \times 0,5}{2} = 0,375$.

b) Cas n° 1 : $u = 1 \times 1 = 1$.

Cas n° 2 : $u = 0,5 \times 1 = 0,5$.

Cas n° 3 : $u = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

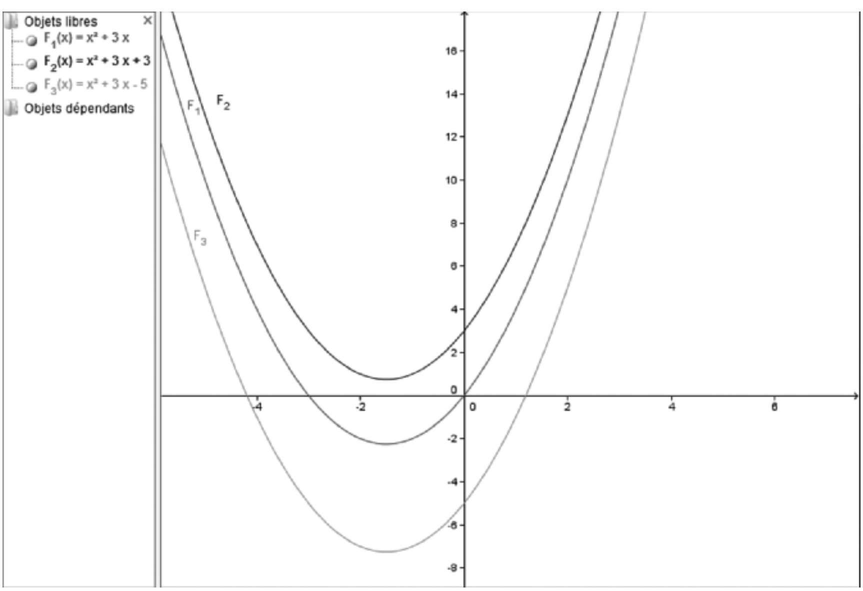
c) Cas n° 1 : $\frac{1,5}{1} = 1,5$.

Cas n° 2 : $\frac{0,75}{0,5} = 1,5$.

Cas n° 3 : $\frac{0,375}{0,25} = 1,5$.

Activité 1

1. a)



b) Les courbes sont décalées le long de l'axe (Oy).

c) $F'_1(x) = 2x + 3$; $F'_2(x) = 2x + 3$; $F'_3(x) = 2x + 3$.

d) $F'_1(x) = F'_2(x) = F'_3(x)$.

e) $F_4(x) = x^2 + 3x - \sqrt{2}$; $F_5(x) = x^2 + 3x + 0{,}4$.

2. a) $G'(x) = F'_1(x)$.

b) La fonction $G = F_1 + k$ est aussi une primitive de la fonction f.

3. a) $f(x) = 3x^2$ et $g(x) = 2x$.

b) $F(x) + G(x) = x^3 + x^2$.
$\big(F(x) + G(x)\big)' = 3x^2 + 2x = f(x) + g(x)$.

c) $2F(x) = 2x^3$ et $3G(x) = 3x^2$.
$\big(2F(x)\big)' = 2 \times 3x^2 = 6x^2 = 2f(x)$;

$\big(3G(x)\big)' = 3 \times 2x = 6x = 3g(x)$.

d) $2F(x) + 3G(x) = 2x^3 + 3x^2$.
$\big(2F(x) + 3G(x)\big)' = 6x^2 + 6x = 2f(x) + 3g(x)$.

Activité 2

1. a) Longueur de la petite base : $b = 3$.

b) Longueur de la hauteur : $h = x - 2$; et longueur de la grande base : $B = f(x)$.

c) $A_{\text{trapèze}} = \dfrac{(3 + 0{,}5x + 2) \times (x - 2)}{2}$

$= \dfrac{(0{,}5x + 5)(x - 2)}{2} = \dfrac{0{,}5x^2 + 4x - 10}{2}$

$= 0{,}25x^2 + 2x - 5$.

d) $S(6) = \dfrac{1}{4} \times 6^2 + 2 \times 6 - 5 = 16$.

2. a) $S'(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$.

b) La fonction S est une primitive de la fonction f.

c) $S(6) = 16$; $S(2) = 0$; $S(6) - S(2) = 16$.

d) Cela correspond à l'aire située entre la courbe et l'axe des abscisses et délimitée par les droites d'équations $x = 2$ et $x = 6$.

J'utilise un logiciel

Coût marginal

Page 159

1. a) Voir fichier **« 12_page159.xls »**.
- Il faut entrer dans la cellule B2 =3*A2+40.

b) • Il faut entrer dans la cellule C2 =Somme($B$2:B2).
- Le coût de fabrication pour 10 objets supplémentaires est de 565 €.

2. $F(q) = 3 \times 1 + 40 + 3 \times 2 + 40 + \ldots + 3 \times q + 40$;
$F(q) = 3 \times (1 + 2 + \ldots + q) + 40q$
$= 3 \times \dfrac{q}{2}(1 + q) + 40q$;

$F(q) = \dfrac{3}{2}q + \dfrac{3}{2}q^2 + 40q = \dfrac{3}{2}q^2 + 41{,}5q$.

3. a) $C(q) = \dfrac{3}{2}q^2 + 40q$.

b) Voir fichier.
c) Plus q augmente et plus l'erreur commise diminue.
d) L'erreur commise est due à la différence entre $F(q)$ et $C(q)$ de $1{,}5q$.

Exercices et problèmes

Pages 160 à 163

Exercices

Primitives d'une fonction

1. a) $F(x) = 1{,}5x^2 - 5x + k$.
b) $G(x) = 0{,}5x^2 + 2x + k$.

2. a) $F(x) = -\dfrac{1}{7}x^2 - 15x + k$.

b) $G(x) = x - 5{,}5x^2 + k$.

3. a) $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + 6x + k$.

b) $G(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + 2x^2 - \dfrac{1}{5}x + k$.

4. a) $F(x) = -\dfrac{0{,}01}{3}x^3 + 3x + k$.

b) $G(x) = -\dfrac{\sqrt{11}}{3}x^3 - 2x + k$.

5. a) $F(x) = -\dfrac{3}{x} + k \ (x \neq 0)$.

b) $G(x) = \dfrac{2}{x} + k \ (x \neq 0)$.

6. a) $F(x) = 3\ln x + k \ (x > 0)$.

b) $G(x) = -2\ln x + k \ (x > 0)$.

7. a) $F(x) = -2x^2 + \ln x + k \ (x > 0)$.

b) $G(x) = -3x^3 - 2\ln x + k \ (x > 0)$.

8. a) $F(x) = 4\ln x + 0{,}5x^4 + k \ (x > 0)$.

b) $G(x) = -\dfrac{1}{x} - 3\ln x + k \ (x > 0)$.

9. a) $F(x) = -0{,}5x^6 + 0{,}75x^4 - 2x^2 + k$.

b) $G(x) = x^5 - \dfrac{7}{3}x^3 - 2x + k$.

Primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné

10. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 + x + \dfrac{1}{6}$.

11. $F(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - 2{,}5x^2 + 7x + \dfrac{46}{9}$.

12. $F(x) = x + 3\ln x + 2 \ (x > 0)$.

13. $F(x) = -2\ln x + \dfrac{x^2}{2} + x + 2 + 2\ln 7 \ (x > 0)$.

14. $F(x) = -4\ln x - \dfrac{2}{9}x^3 + \dfrac{2}{9}$.

15. $F(x) = -\dfrac{2}{3}x^6 + \dfrac{5}{4}x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + 63$.

Intégrale définie

16. $I = 6$; $J = 20$.

17. $I = -3$; $J = 18$.

18. $I = \dfrac{1}{18}$; $J = 0{,}5$.

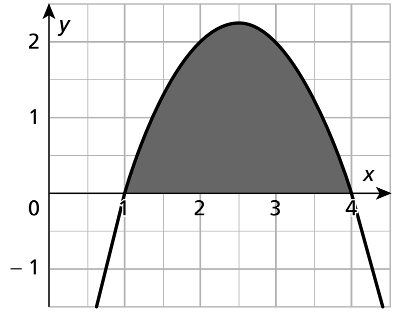
19. $I = 2$; $J = 4\ln 3$.

20. $I = \dfrac{4}{3}$; $J = 1{,}5 + 8\ln 0{,}5$.

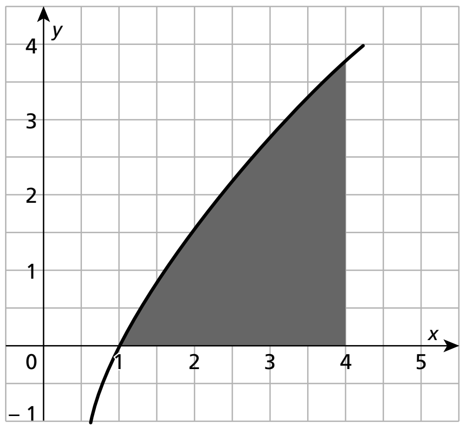
21. $I = 8$; $J \approx 3{,}9696$.

Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

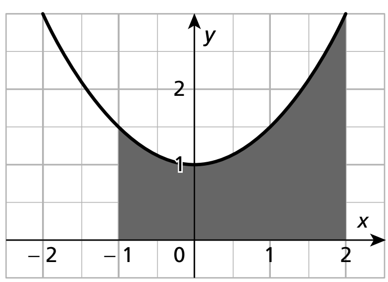
22. $I = 4{,}5$.



23. $I = 7{,}5 - \ln 4$.



24. $I = 4{,}5$.

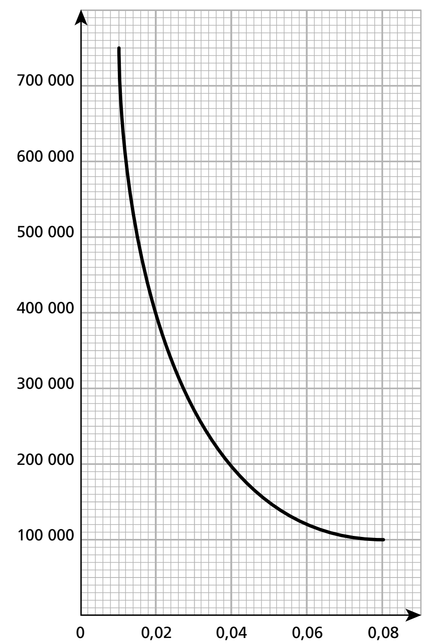


Problèmes

Problème 1

1. La fonction f est décroissante car le numérateur est positif.

2.



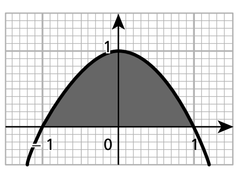
3. a) $F(x) = 7\ 650 \times \ln x + k$.

b) $I = 7\ 650 \ln 8$ u.a.

Erratum : les unités graphiques du repère sont 2×10^{-2} cm en abscisses et 10^5 cm en ordonnées.

Problème 2

a)



b) $I = \int_{-1}^{1}(-x^2 + 1)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$.

Problème 3

1. a) $V = \pi \int_0^4 2^2\ \mathrm{d}x = 16\pi$.

b) Le rayon vaut 2 et la hauteur 4. D'où $V = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$.

2. a) $y = 0{,}5x$.

b) $V = \pi \int_0^4 (0{,}5x)^2\mathrm{d}x = \dfrac{16}{3}\pi$.

c) Erratum : la question est « quels sont le rayon de la base et la hauteur du cône ? ».
Le rayon vaut 2 et la hauteur 4.
D'où $V = \dfrac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 4 = \dfrac{16}{3}\pi$.

3. $V = \pi \int_0^3 (\sqrt{1{,}5x})^2\mathrm{d}x = \pi \int_0^3 1{,}5x\ \mathrm{d}x$
$= 6{,}75 \times \pi \approx 21{,}21$.

Problème 4

Erratum : il faut lire 0,041 à la place de – 0,041.
Le travail W mis en jeu vaut 518 joules.

Problème 5

1. $v = 0{,}104 \times (7{,}5^2 - r^2) = -0{,}104r^2 + 5{,}86$.

2. a) $F(x) = -\dfrac{0{,}104}{3}x^3 + 5{,}86x + k$.

b) $I = 29{,}325$.

c) $\mu = \dfrac{1}{7{,}5} \times I = \dfrac{1}{7{,}5} \times 29{,}325 = 3{,}91$.

La vitesse moyenne d'écoulement μ est de 3,91 m/s.

Problème 6

1. a) $T = 0{,}01$ s.

b) $s(t) = 1\ 000t$.

2. a) $A = \dfrac{0{,}01 \times 10}{2} = 0{,}05$ u.a.

L'aire A de OBC vaut 0,05 u.a.

b) $S(t) = 500t^2$, donc $\overline{U} = 5$.

c) Les valeurs $\overline{U}$ et A sont dans un rapport 100 qui se justifie par le coefficient $\dfrac{1}{0{,}01}$ devant l'intégrale de $s(t)$.

d) Le signal u peut être remplacé à chaque instant par le signal moyen symbolisé par la droite D.

3. a) $S = \dfrac{1}{0{,}01} \times \dfrac{1}{3} \approx 33{,}33$.

b) $U_{\text{eff}} = \sqrt{S} = \sqrt{33{,}33} \approx 5{,}77$.

La tension efficace U_{eff} est de 5,77 V.

Problème 7

Partie A

1. $\omega = 100\pi$ rad/s d'où $T = 0{,}02$ s.

2. a) $U(t) = -\dfrac{2{,}2\sqrt{2}}{\pi}\cos(100\pi t)$.

b) $\overline{u} = \dfrac{1}{0{,}02} \times 0 = 0$. La valeur moyenne du signal est nulle.

3. a) On a $(220\sqrt{2})^2 = 220^2 \times 2$ et $\sin^2(100\pi t) = \dfrac{1 - \cos(2 \times 100\pi t)}{2}$.

D'où $u^2(t) = 220^2 \times 2 \times \dfrac{1 - \cos(200\pi t)}{2}$

$220^2(1 - \cos(200\pi t))$.

b) Erratum : il n'y a pas de question.

c) $S = \dfrac{220^2}{0{,}02} \times 0{,}02 = 220^2$.

d) $U_{\text{eff}} = \sqrt{S} = 220$. La tension efficace du signal est de 220 V.

Partie B

1. La pulsation $\omega = 100\pi$ rad/s mais $T = 0{,}01$ s du fait du redressement.

2. $\overline{u_r} = \dfrac{1}{0{,}01} \times \dfrac{2{,}2\sqrt{2}}{\pi} \approx 99$.

3. a) Erratum : il n'y a pas de question.

b) $S_r = \dfrac{220^2}{0{,}01} \times 0{,}01 = 220^2$.

c) $U_{\text{reff}} = \sqrt{S_r} = 220$. La tension efficace du signal redressé est de 220 V.

4. Le redressement modifie la tension moyenne du signal mais laisse inchangée la tension efficace.

Problème 8

a) $F(q) = -0{,}008q^2 + 24q + 4{,}008$.
b) $F(100) = 2\ 324{,}008$.
Le coût total de production de 100 pièces est de 2 324 €.

Je teste mes connaissances

Page 164

1. C
2. B
3. B
4. A
5. C
6. C
7. B
8. A
9. B
10. C

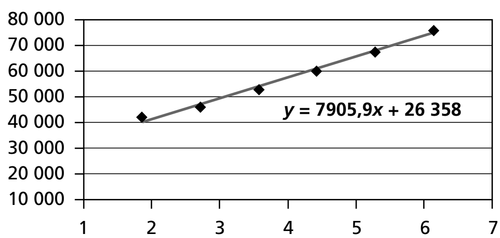
Évaluations

Évaluation vers le Bac pro 1

Page 166

Exercice 1

1. et 2.



3. On peut estimer la puissance du parc éolien européen en 2012 à :
$7\ 906 \times 2012 + 26\ 358$
$= 15\ 933\ 230$ mégawatts.

Exercice 2

1. Pour tout v dans l'intervalle [5 ; 20], $f'(v) = 3 \times 733\ v^2 = 2\ 199\ v^2$.

Pour tout v dans l'intervalle [5 ; 20], $f'(v) > 0$.

2.

v	5	20
$f'(v)$	+	
$f(v)$	91 625 ↗	5 864 000

3. $f(v) = 2.10^6$ équivaut à $733\ v^3 = 2.10^6$,

c'est-à-dire $v^3 = \dfrac{2.10^6}{733}$ d'où $v = \left(\dfrac{2.10^6}{733}\right)^{\frac{1}{3}}$,

donc $v \approx 14$ mètres par seconde.

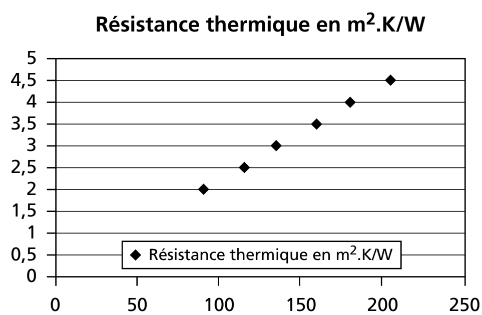
Remarque : sans utiliser la puissance $\dfrac{1}{3}$ (ou la racine cubique), on peut obtenir cette valeur par balayage à l'aide de la calculatrice ou du tableur.

Évaluation vers le Bac pro 2

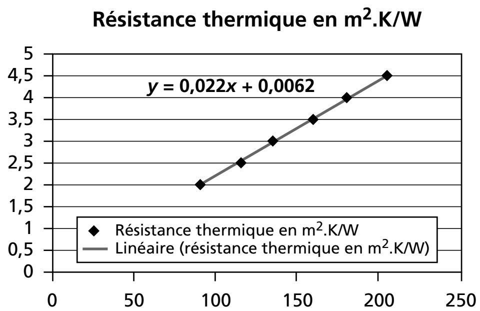
Page 168

Exercice 1

1.



2. On utilise les fonctionnalités du tableur ou de la calculatrice graphique pour afficher une courbe de tendance.



Le nuage de points est modélisé par une droite d'équation $y = 0{,}0022x + 0{,}0062$.
En utilisant cette équation, on trouve que pour une épaisseur d'isolant de 250 mm, la résistance thermique peut être estimée à 5,51 m². K/W.
$y = 0{,}0022 \times 250 + 0{,}0062 = 5{,}5062$.

Exercice 2

1. Le montant de la mensualité du deuxième mois sera 475 € car
$500 \times 5 \div 100 = 25$ € de réduction, et
$500 - 25 = 475$.
En procédant de même, on trouve pour le troisième mois un montant de mensualité de 451,25 € et 428,6875 € pour le quatrième mois.

2. La suite de nombres formée par les montants des mensualités est une suite géométrique de raison 0,95 car :

$$\frac{475}{500} = \frac{451{,}25}{475} = \frac{428{,}6875}{451{,}25} = 0{,}95.$$

3. a) Il faut utiliser la formule des suites géométriques donnant le terme de rang n en fonction du premier terme u_1 et de n, soit : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ pour calculer le 36e terme qui correspondra à la 36e mensualité.
b) $u_{36} = 500 \times 0{,}95^{35} \approx 83{,}04$
La mensualité du 36e mois sera 83,04 €.

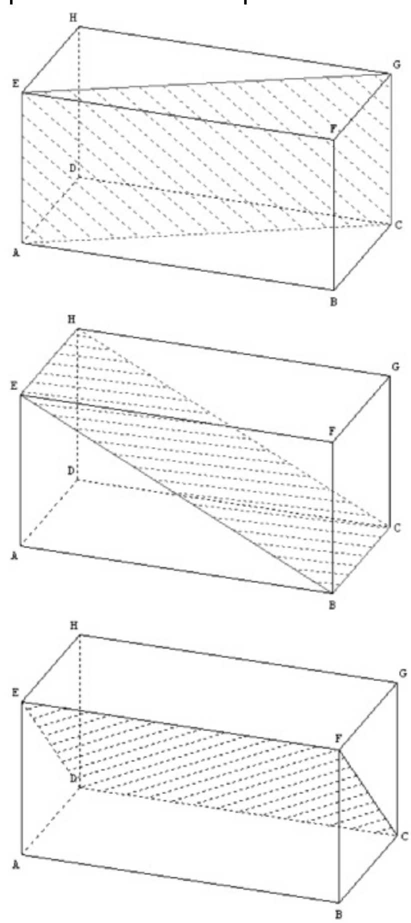
4. À l'aide des fonctionnalités d'un logiciel tableur, on peut calculer le montant des 36 mensualités et en faire la somme. On peut également utiliser la formule de la somme des k premiers termes d'une suite géométrique : $S_k = u_1 \times \frac{(1-q^k)}{(1-q)}$.
Avec la formule, on obtient :
$S_{36} = 500 \times \frac{(1-0{,}95^{36})}{(1-0{,}95)} \approx 8\,422{,}21$.
Le coût total du crédit s'élève à 8 422,21 €, ce qui convient à Alex qui ne souhaitait pas dépenser plus de 8 500 €.

Évaluation vers le Bac pro 3

Page 170

Exercice 1

1. a) Voici trois plans de coupe possibles pour obtenir deux prismes identiques.



b) Dans chacun des cas précédents, la section entre le parallélépipède et le plan de coupe est un rectangle.

2. a) $F(3 ; 6 ; 3)$; $H(0 ; 0 ; 3)$.

b) $\overrightarrow{FH}(-3 ; -6 ; 0)$.

$\left\|\overrightarrow{FH}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$.

Exercice 2

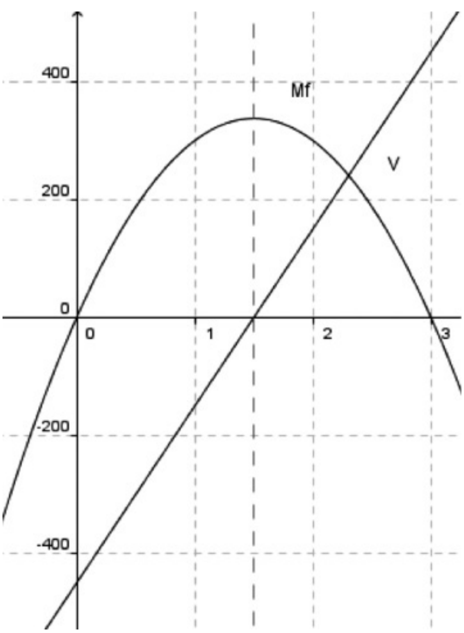
1. Dérivée :
$Mf'(x) = -150 \times 2x + 450$, soit
$Mf'(x) = -300x + 450$.

2. On étudie le signe de Mf'.
$-300x + 450 \geqslant 0$ si $x \leqslant 1{,}5$.
On complète le tableau de variation de Mf sur l'intervalle [0 ; 3].

x	0		1,5		3
Signe $Mf'(x)$		+	0	−	
Variations de Mf	0	↗	337,5	↘	0

3. $Mf'(x) = -V(x)$.

4. Voici un exemple de représentation graphique obtenu avec le logiciel GeoGebra.



L'effort tranchant est négatif sur l'intervalle [0 ; 1,5] ; le moment fléchissant est croissant sur cet intervalle, en accord avec le signe de la dérivée puisque :
$V(x) = -Mf'(x)$.

Évaluation vers le Bac pro 4

Page 172

Exercice 1

a) Voir fichier « **eval4_corrige.xls** » ou « **eval4_corrige.ods** ».

b) Avec un tableur, si on ajuste le premier nuage de points par une courbe de tendance logarithmique, l'équation affichée est : $y = 0{,}1202 \ln x - 0{,}0006$.
En arrondissant les coefficients au centième, on obtient : $k = 0{,}12$ et $k' = 0$.
En abscisse, la variable est f et en ordonnée, on a porté le coefficient α.
On a donc $\alpha = 0{,}12f$.

c) Si $f = 1\,500$,
alors $\alpha = 0{,}12 \times \ln 1\,500 \approx 0{,}88$.
Si $\alpha = 0{,}8$, alors on a à résoudre l'équation : $0{,}12 \times \ln f = 0{,}8$.
D'où $\ln f = \dfrac{0{,}8}{0{,}12}$; $\ln f = \dfrac{20}{3}$; $f = e^{20/3} \approx 786$.

Exercice 2

1. a) $f(1) \approx 70$ dBA.

b) $f(3) \approx 34$ dBA.

c) On peut seulement affirmer que le minimum cherché est entre 1 m et 3 m puisqu'on ne trouve pas exactement 40 dBA comme niveau d'intensité.

2. a) $f'(x) = -36e^{-0{,}36x}$.
Cette dérivée est négative quel que soit x.
Donc la fonction f est décroissante sur [0 ; 3,5].

b) On peut résoudre cette équation soit par le calcul, soit graphiquement.

$100 \times e^{-0,36x} = 40$; $e^{-0,36x} = 0,4$;

$-0,36x = \ln 0,4$; $x = \dfrac{\ln 0,4}{-0,36} \approx 2,55$.

3. La largeur d cherchée est environ 2,55 mètres.

Évaluation vers le Bac pro 5

Page 174

Exercice 1

1. a) La suite (a_n) est une suite géométrique.

b) $a_2 = 0,9 \times a_1 = 0,9 \times 15 = 13,5$. Le taux d'augmentation de la maladie le deuxième mois est de 13,5 %.
$a_3 = 0,9 \times a_2 = 0,9 \times 13,5 = 12,15$. Le taux d'augmentation de la maladie le troisième mois est de 12,15 %.

c) Pour tout entier n non nul,
on a $a_n = 0,9^{n-1} \times a_1 = 0,9^{n-1} \times 15$.

2. On a $u_1 = \left(1 + \dfrac{15}{100}\right) \times 5\,000 = 5\,750$.

3.

B4 = =0,9*B3

	A	B	C	D	E
1	n	a(n)	u(n)		différence
2	0		5000		
3	1	15	5750		750
4	2	13,5	6526,25		776,25
5	3	12,15	7319,18938		792,939375
6	4	10,935	8119,54273		800,353358
7	5	9,8415	8918,62753		799,084798
8	6	8,85735	9708,58159		789,954056
9	7	7,971615	10482,5123		773,930746
10	8	7,1744535	11234,5753		752,062973
11	9	6,45700815	11959,9927		725,417443
12	10	5,81130734	12655,0247		695,031936
13	11	5,2301766	13316,9048		661,88014
14	12	4,70715894	13943,7527		626,847876
15	13	4,23644305	14534,4718		590,719142
16	14	3,81279874	15088,642		554,17016
17	15	3,43151887	15606,4116		517,769597
18	16	3,08836698	16088,3949		481,983263
19	17	2,77953028	16535,5767		447,181807
20	18	2,50157725	16949,2269		413,650225

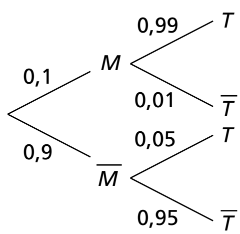
B4 = =0,9*B3

	A	B	C	D	E
28	26	1,07684698	19247,3607		205,056478
29	27	0,96916228	19433,8989		186,538161
30	28	0,87224606	19603,4103		169,511416
31	29	0,78502145	19757,3013		153,890976
32	30	0,7065193	19896,8904		139,589148
33	31	0,63586737	20023,4083		126,517835
34	32	0,57228064	20137,9983		114,590088
35	33	0,51505257	20241,7196		103,721279
36	34	0,46354732	20335,5496		93,8299479
37	35	0,41719258	20420,388		84,8384047
38	36	0,37547333	20497,0611		76,6731098
39	37	0,33792599	20566,326		69,2648972
40	38	0,30413339	20628,875		62,5490652
41	39	0,27372005	20685,3404		56,465368
42	40	0,24634805	20736,2983		50,9579325
43	41	0,22171324	20782,2735		45,9751198
44	42	0,19954192	20823,7428		41,4693474
45	43	0,17958773	20861,1397		37,3968865
46	44	0,16162895	20894,8573		33,7176421
47	45	0,14546606	20925,2523		30,3949256
48	46	0,13091945	20952,6475		27,3952259
49	47	0,11782751	20977,3355		24,6879824
50	48	0,10604476	20999,5808		22,2453645
51	49	0,09544028	21019,6229		20,0420591
52	50	0,08589625	21037,678		18,0550686

4. À partir du 34^e mois, l'extension de la maladie est de moins de 100 animaux par mois.

Exercice 2

1.



2. $P(M \cap T) = 0,1 \times 0,99 = 0,099$. La probabilité que l'animal soit malade et testé positif est donc de 0,099.

3. $P(M \cap \overline{T}) = 0,1 \times 0,01 = 0,001$. La probabilité que l'animal soit malade et testé négatif est donc de 0,001.

4. $P(T) = 0,1 \times 0,99 + 0,9 \times 0,05 = 0,144$. La probabilité que l'animal soit testé positif est donc de 0,144.

Évaluation vers le Bac pro 6

Page 176

1. Désinfectant A

a) $u_1 = 18\ 000$; $u_2 = 16\ 200$; $u_3 = 14\ 580$; $u_4 = 13\ 122$; $u_5 = 11\ 522$; $u_6 = 9\ 922$; $u_{10} = 3\ 522$.

b) La suite (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) est une suite géométrique de raison 0,9.

c) $u_4 = u_0 \times 0{,}9^4$.

d) La suite (u_5, u_6, ... , u_9, u_{10}) est une suite arithmétique de raison – 1 600.

e) $u_{10} = u_5 + 5 \times (-\ 1\ 600)$.

f) On ne connaît pas exactement au bout de combien de temps le nombre de bactéries a diminué de moitié, mais on sait que c'est entre la 5e et la 6e heure.

2. Désinfectant B

a) $f(0{,}5) \approx 18\ 279$.

b) $f'(t) = -\ 3\ 600 \times \mathrm{e}^{-0{,}18\,t}$.
Cette dérivée est négative quel que soit t.
Donc la fonction f est décroissante sur [0 ; 10].

c) On peut connaître au bout de combien de temps le nombre de bactéries a diminué de moitié en résolvant l'équation $f(t) = 10\ 000$, soit algébriquement, soit graphiquement.
On obtient : $\mathrm{e}^{-0{,}18t} = 0{,}5$.
$-\ 0{,}18t = \ln 0{,}5$; $t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}18} \approx 3{,}85$.

La durée cherchée est 3,85 heures, soit 3 h 51 min.

3. Désinfectant C

a) $g(0{,}5) \approx 18\ 463$.

b) $g'(t) = 300t - 3\ 150$.
$g'(t) = 0$ pour $t = 10{,}5$ qui est supérieur à 10 ; $g'(t)$ est donc négative sur l'intervalle [0 ; 10].
Donc la fonction g est décroissante sur [0 ; 10].

c) On peut connaître au bout de combien de temps le nombre de bactéries a diminué de moitié en résolvant l'équation $g(t) = 10\ 000$, soit algébriquement, soit graphiquement.
On obtient : $150t^2 - 3\ 150t + 10\ 000 = 0$.
Le discriminant de cette équation du second degré est 3 922 500.
Les deux solutions sont 17,1 et 3,9 (valeurs arrondies au dixième).
Seule la solution 3,9 est dans l'intervalle [0 ; 10].
La durée cherchée est 3,9 heures, soit 3 h 54 min.

Évaluation vers le Bac pro 7

Page 178

Exercice 1

a) $C_M(x) = x^2 - 30x + 300$.
b) On fait cette étude soit à l'aide de la fonction dérivée, soit à partir des coordonnées du sommet de la parabole.
Le minimum de C_M sur [0 ; 20] est pour $x = 15$.
c) Le coût de production minimal $C_M(15)$ vaut 75 milliers d'euros.
La production correspondante $C(15)$ vaut 1 125 milliers d'euros.

Exercice 2

a)

	Vis présentant le défaut (a)	Vis ne présentant pas le défaut (a)	Total
Vis présentant le défaut (b)	80	160	240
Vis ne présentant pas le défaut (b)	200	1 560	1 760
Total	280	1 720	2 000

b)

	a	$\overline{a}$	Total
b	$\frac{80}{2\,000} = 0{,}04$	$\frac{160}{2\,000} = 0{,}08$	0,12
$\overline{b}$	$\frac{200}{2\,000} = 0{,}1$	$\frac{1\,560}{2\,000} = 0{,}78$	0,88
Total	0,14	0,86	1

c) $P(a \cup b) = 0{,}04 + 0{,}08 + 0{,}14 = 0{,}26$.
La probabilité que la vis présente au moins l'un des deux défauts est 0,26.

d) La probabilité que la vis ne présente aucun défaut est 0,86.

Évaluation vers le Bac pro 8

Page 180

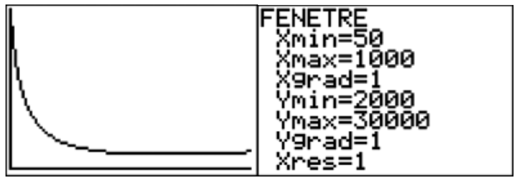
1. a) $C(n) = 3{,}5n + \frac{1\,470\,000}{n}$.

b) $C(300) = 5\,950$. Le coût d'approvisionnement pour une commande de 300 pièces est de 5 950 €.

c) $C'(n) = 3{,}5 - \frac{1\,470\,000}{n^2}$. $C'(n) > 0$ pour $n > \sqrt{420000}$.

Donc la fonction C est croissante pour n supérieur à $\sqrt{420000}$.

La courbe obtenue correspond à la fenêtre ci-dessous.



d) Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée lorsque $n > 0$.

$C'(n) = 0$ lorsque $3{,}5 - \frac{1\,470\,000}{n^2} = 0$. Soit $3{,}5n^2 - 1\,470\,000 = 0$.
C'est-à-dire pour $n > 0$,
lorsque $n = \sqrt{420000} \approx 648$.

e) $C(648) = 4\,536{,}52$. Le coût minimal d'approvisionnement est 4 537 €.

2. a) La fréquence : $f = \frac{1}{T} = 400$ Hz ; et la pulsation : $\omega = 2\pi f = 800\pi$ rad/s.

b) $u_2(t) = 20\sin(800\pi t + \frac{\pi}{3})$.

c) $u_2(t) = 15$ revient à résoudre l'équation $\sin(800\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0{,}75$.

Soit sur la période $[0 ; 0{,}0025]$ lorsque
$t \approx 4{,}96 \times 10^{-4}$ ou $t \approx 2{,}42 \times 10^{-3}$.

d) À l'aide d'une représentation graphique, on constate que la tension u_2 est écrêtée durant la durée
$\left(0{,}0025 - (2{,}42 \times 10^{-3} - 4{,}96 \times 10^{-4})\right)$,
soit pendant $5{,}76 \times 10^{-4}$ s.

Composition : STDI

Éditions Foucher – Vanves – Juillet 2011 – 01 – CL-DL/EG

Imprimé en France par EMD S.A.S. – 53110 Lassay-les-Châteaux – Dépôt légal : juillet 2011